

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О КРУЧЕНИИ ВАЛОВ ПЕРЕМЕННОГО ДИАМЕТРА

С. М. Белоносов

(Новосибирск)

§ 1. Постановка задачи. Под стержнем (валом) переменного сечения будем понимать тело, образованное вращением некоторой плоской кривой L вокруг оси, лежащей в одной плоскости с кривой.

Отнесем вал переменного сечения к цилиндрической системе координат r, z, φ , совместив ось z с осью вала. Предположим, что нагрузка, действующая на вал, распределена симметрично относительно оси z и направлена перпендикулярно плоскости $\varphi = \text{const}$. Тогда перемещения точек вала также распределяются симметрично, т. е. не зависят от координаты φ . Естественно принять предположение, что перемещения $v(r, z)$ направлены перпендикулярно плоскости $\varphi = \text{const}$.

При этих предположениях уравнения упругого равновесия в смещениях сводятся к одному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) тесно связано с уравнением Лапласа, изученным в работе [1]. Положив $u(r, z, \varphi) = v(r, z) e^{i\varphi}$, имеем $\Delta u = 0$.

При заданных на поверхности вала напряжениях, ради упрощения граничного условия, целесообразно функцию $v(r, z)$ заменить функцией напряжений $\Phi(r, z)$, связанной с $v(r, z)$ соотношениями

$$\mu \frac{\partial}{\partial r} \frac{v}{r} = - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \mu \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (\mu - \text{модуль сдвига}) \quad (1.2)$$

Функция $\Phi(r, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.3)$$

Напряжения выражаются через $\Phi(r, z)$ по формулам

$$\tau_{r\varphi} = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \tau_{z\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (1.4)$$

Остальные компоненты тензора напряжений равны нулю.

На контуре L значения $\Phi(r, z)$ легко вычисляются по заданным напряжениям

$$\Phi(r, z) = \int_0^s \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{dz}{ds} \right) ds = \int_0^s \left(\tau_{z\varphi} \frac{dr}{ds} - \tau_{r\varphi} \frac{dz}{ds} \right) \frac{ds}{r^2} + C = f(s) + C \quad (1.5)$$

Здесь $f(s)$ — заданная функция длины дуги s контура L , а C — произвольная постоянная.

§ 2. Общее решение уравнения (1.3) и приведение граничной задачи к интегральному уравнению. 1°. Положим

$$\Phi(r, z) = r^2 w(r, z) \quad (2.1)$$

Функция $w(r, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{4}{r^2} w + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2), связанное с уравнением Лапласа $\Delta \{w(r, z) e^{2i\varphi}\} = 0$, рассматривалось в работе [1]. Общее решение уравнения (2.2) представляется интегралом [2]

$$w(r, z) = \operatorname{Re} \int_0^\pi \psi(r \cos \lambda + iz) \cos 2\lambda d\lambda \quad (2.3)$$

Здесь $\psi(\xi + iz)$ — функция, регулярная внутри области, имеющей очертание осевого сечения вала (предполагается, что всякая прямая, перпендикулярная оси z , пересекает контур L только в одной точке); кроме того, на функцию ψ накладывается требование $\operatorname{Re} \psi(\xi + iz) = \operatorname{Re} \psi(-\xi + iz)$, т. е. условие четности по r .

Представление (2.3) не единственно: к $\psi(\tau)$ можно добавить произвольную линейную функцию $a\tau + b$ (это обстоятельство не было замечено в работе [1]).

Интегрируя дважды по частям, получим интегральное представление $w(r, z)$, удовлетворяющее теореме единственности

$$w(r, z) = r^2 \int_0^\pi \operatorname{Re} \chi(r \cos \lambda + iz) \sin^4 \lambda d\lambda \quad (\chi(\tau) = \psi''(\tau)) \quad (2.4)$$

Таким образом

$$\Phi(r, z) = r^4 \int_0^\pi \operatorname{Re} \chi(r \cos \lambda + iz) \sin^4 \lambda d\lambda \quad (2.5)$$

Полагая здесь $\chi = \text{const}$, получим решение задачи о кручении круглого цилиндрического вала моментами, приложенными на бесконечности.

Таким образом, решение задачи о кручении цилиндрического вала с кольцевыми выточками можно искать в форме (2.5), полагая $\chi(\tau) = c + \chi_0(\tau)$, где $\chi_0(\tau)$ — функция, равная нулю на бесконечности.

При решении задачи кручения бесконечно длинного вала с разными диаметрами на противоположных концах, полагаем

$$\chi(\tau) = ic \ln(\tau_1 / \tau_2) + \chi_0(\tau) + c_1 \quad (\tau_1 = \tau - \tau_0, \quad \tau_2 = \tau + \bar{\tau}_0)$$

где c и c_1 — вещественные постоянные, τ_0 — любая точка вне меридионального сечения вала. Формулу (2.5) можно записать также в виде

$$\Phi(r, z) = \int_{-r}^r \operatorname{Re} \chi(\xi + iz) (r^2 - \xi^2)^{3/2} d\xi = 2 \int_0^r \operatorname{Re} \chi(\xi + iz) (r^2 - \xi^2)^{3/2} d\xi \quad (2.6)$$

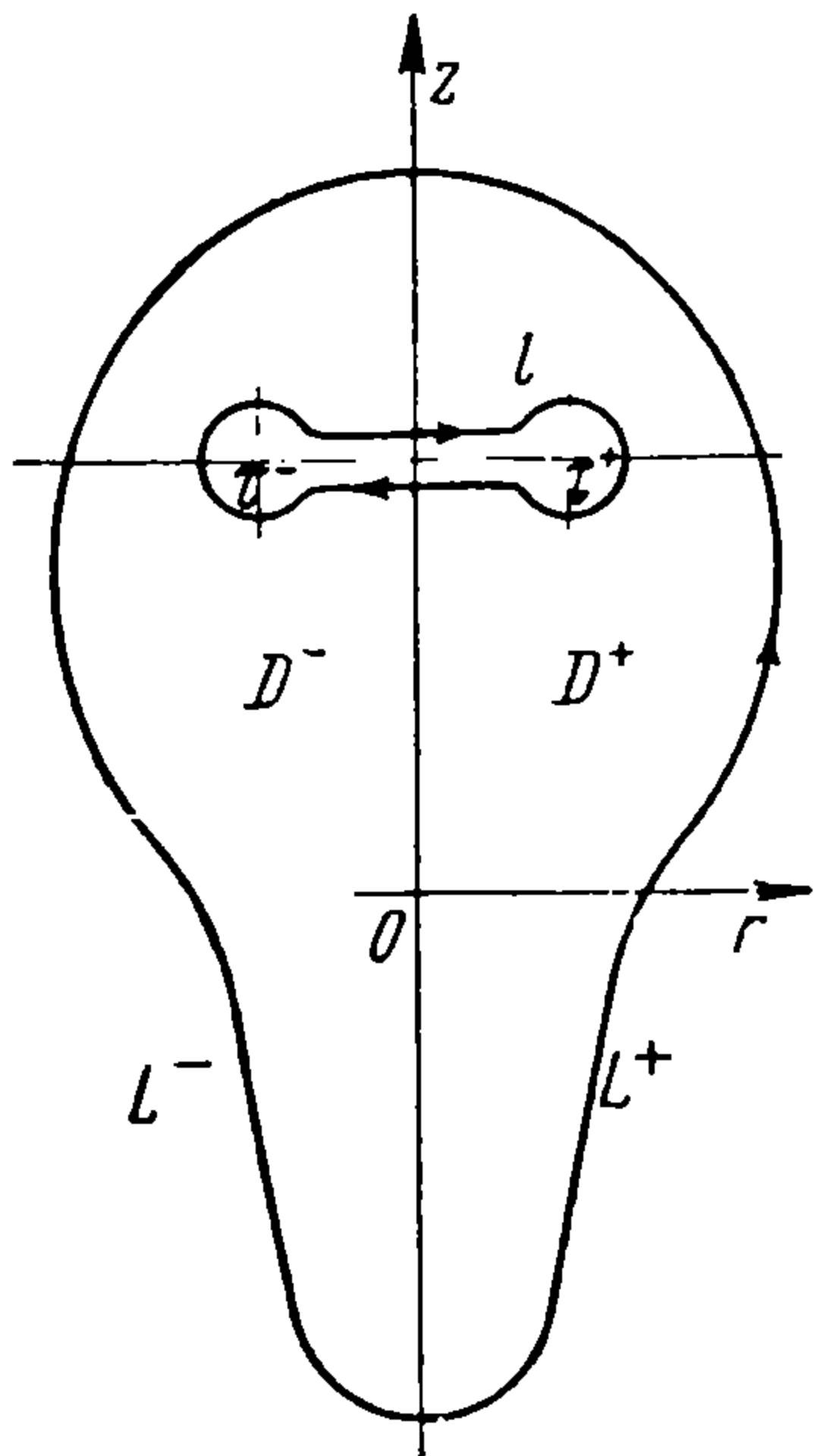
Действительно, функция $u(x, y, z) = w(r, z) e^{2i\varphi}$ — четная относительно x и y . Поэтому $\partial w / \partial r = 0$ при $r = 0$, и в силу (2.3) имеем $\operatorname{Re} \psi'(iz) = 0$, т. е. $\operatorname{Re} \chi(\xi + iz)$ — четная по ξ функция.

Соотношение (2.6) можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра первого рода относительно неизвестной $\operatorname{Re} \chi(\xi + iz)$, считая z

параметром, а $\Phi_1(r, z)$ — заданной функцией r . Это уравнение Вольтерра можно решить с помощью интегрального преобразования Римана — Меллина. Таким путем оказывается возможным доказать интегральное представление (2.5) общего решения уравнения (1.3).

Полагая $\zeta = \xi + iz$, $\tau = r + iz$, из (2.6) имеем

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) &= \operatorname{Re} \int_{-\tau}^{\tau} \chi(\zeta) [(\zeta - \tau)(\zeta + \bar{\tau})]^{1/2} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_l \chi(\zeta) [(\zeta - \tau)(\zeta + \bar{\tau})]^{1/2} d\zeta \end{aligned} \quad (2.7)$$



Фиг. 1

Контур l изображен на фиг. 1. Далее известно [3], что функцию $\chi_0(\tau)$, регулярную внутри контура $L^+ + L^-$, где L^- — зеркальное отражение относительно оси z , можно единственным образом представить интегралом типа Коши с вещественной плотностью $\varphi(t)$

$$\chi(\tau) = \frac{1}{\pi i} \int_{L^+ + L^-} \frac{\varphi(t) ds}{t - \tau} \quad (2.8)$$

Здесь ds — элемент длины дуги, t — комплексная координата точки контура $L^+ + L^-$. Из (2.7) и (2.8) имеем

$$\Phi(r, z) = - \int_{L + \bar{L}} \varphi(t) \Phi_0(t, \tau) ds + r^4 \operatorname{const} \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(t, \tau) &= - \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{[(\zeta - \tau)(\zeta + \bar{\tau})]^{1/2}}{t - \zeta} d\zeta \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \{ [(t - \tau)(t + \bar{\tau})]^{1/2} - t^3 + 3izt^2 + \frac{3}{2}t(r^2 + 2z^2) \} \end{aligned}$$

Обозначим $\nu(t) = \varphi(-\bar{t}) - \varphi(t)$, заметив, что

$$\Phi_0(-\bar{t}, \tau) = -\Phi_0(t, \tau)$$

из (2.9) имеем

$$\Phi(r, z) = \int_L \nu(t) \Phi_0(t, \tau) ds + Cr^4 \quad (2.10)$$

Интегральное представление (2.10), содержащее произвольную вещественную функцию $\nu(t)$, является более общим, нежели представление (2.5): его можно использовать для решения задач кручения валов с внутренними полостями в форме тел вращения.

Пусть t_0 — точка на контуре L ; тогда при $\tau \rightarrow t_0$ из (2.10) для неизвестной $\nu(t)$ получим интегральное уравнение первого рода

$$\int_L \nu(t) \Phi_0(t, t_0) ds = f(t_0) \quad (2.11)$$

Здесь $f(t_0)$ — заданная функция. Уравнение типа (2.11) можно преобразовать к уравнению Фредгольма второго рода [1]. Практически, однако, оказывается удобнее решать непосредственно уравнение (2.11).

§ 3. Кручение цилиндрического вала с кольцевой выточкой. Пусть L_1^+ — верхняя часть контура выточки, L_2^+ — верхняя цилиндрическая часть контура L . L_1^- , L_2^- — соответственные участки нижней части контура L .

Обозначим: через M — крутящий момент на бесконечности, R — радиус цилиндрической части вала, R_0 — радиус наиболее узкой части вала у дна выточки.

$$t = t' = \xi' + i\eta' \text{ на } L_1^+, \quad t = t'' = \xi'' + i\eta'' \text{ на } L_2^+$$

Функцию напряжений ищем в виде

$$\Phi(r, z) = \int_L v(t) \Phi_0(r, \tau) ds + \frac{M}{2\pi} r^4 \quad (3.1)$$

Из условия на контуре L

$$\Phi(r, z) \Big|_L = \text{const} = \frac{M}{2\pi} R^4$$

используя симметрию относительно оси r , получаем интегральное уравнение

$$\int_{L_1^+} v_1(t') \Phi_*(t', \tau) ds' + \int_{L_2^+} v_2(t'') \Phi_*(t'', \tau) ds'' = f(\tau) \quad (3.2)$$

Здесь

$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{на } L_2, \\ (M/2\pi)(R^4 - r^4) & \text{на } L_1, \end{cases} \quad v(t) = v(\bar{t}) = \begin{cases} v_1(t') & \text{на } L_1 \\ v_2(t'') & \text{на } L_2 \end{cases}$$

$$\Phi_*(t, \tau) = \Phi_0(t, \tau) + \Phi_0(\bar{t}, \tau)$$

Очевидно, что $\Phi_*(t, \tau) = \Phi_*(t, \bar{\tau})$. Поэтому, удовлетворив интегральному уравнению на верхних контурах L_1^+ и L_2^+ , мы одновременно автоматически удовлетворим условию $\Phi(r, z) = MR^4/2\pi$ на нижних контурах L_1^- и L_2^- .

Уравнение (3.2) путем замены переменных преобразуем в систему интегральных уравнений первого рода на промежутке $(1, 0)$:

$$\int_0^1 [a(x) \Phi_1(x, y) + b(x) \Phi_2(x, y)] dx = F(y) \quad (3.3)$$

$$\int_0^1 [a(x) \Phi_3(x, y) + b(x) \Phi_4(x, y)] dx = 0$$

Здесь

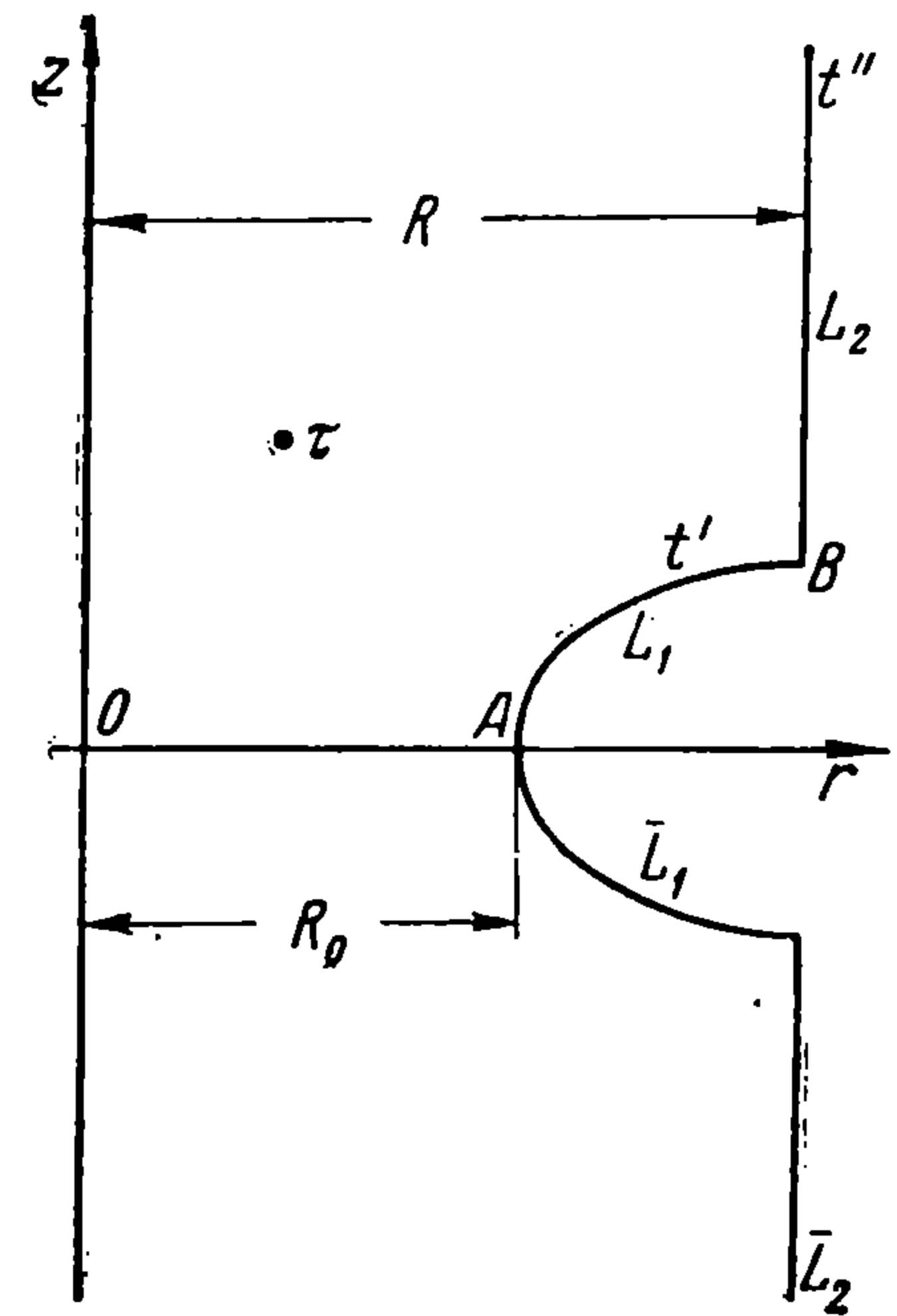
$$a(x) = v_1(t') \frac{ds'}{dx}, \quad b(x) = v_2(t'') \frac{ds''}{dx}, \quad F(y) = \frac{M}{2\pi} (R^4 - r'(y))$$

$$\Phi_1(x, y) = \Phi_*(t'(x), \tau'(y)), \quad \Phi_3(x, y) = \Phi_*(t'(x), \tau''(y))$$

$$\Phi_2(x, y) = \Phi_*(t''(x), \tau'(y)), \quad \Phi_4(x, y) = \Phi_*(t''(x), \tau''(y))$$

Будем считать, что при указанной замене переменных точке $x = 0$ соответствуют точки $t' = R_0$ и $t'' = i\infty + R$.

Подынтегральные функции в (3.3) имеют неограниченную вторую производную при $x = y$. Поэтому при численном решении задачи к



Фиг. 2

этим интегралам целесообразно применить квадратную формулу С. М. Никольского [4]

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{2}{2m+1} \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{2k+2}{2m+1}\right) + \frac{2m-1}{2m+1} f(0) \quad (3.4)$$

наилучшую для класса функций $W^{(1)}(M, 0.1)$ при заданном натуральном m . Полагая $y = y_k = (2k+2)/(2m+1)$ в уравнениях (3.3), получаем систему $2m+1$ линейных алгебраических уравнений относительно $2m+1$ неизвестных $a_k = a(x_k)$, $b_k = b(x_k)$ и $a(0)$. Решив эту систему, найдем приближенное выражение $\Phi(r, z)$

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) \approx & \frac{2}{2m+1} \sum_{k=0}^{m-1} [a_k \Phi_*(t_k', \tau) + b_k \Phi_*(t_k'', \tau)] + \\ & + \frac{2m-1}{2m+1} a(0) \Phi_*(t_A, \tau) + \frac{M}{2\pi} r^4 \end{aligned} \quad (3.5)$$

На электронной машине «Стрела» в Вычислительном центре МГУ были выполнены расчеты для полукруглой выточки при следующих данных

$$R = 1, \quad M = 2\pi, \quad m = 14, \quad \rho = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}$$

Приведем значения коэффициента k , вычисленные для ряда значений $\lambda = \rho/R$

$\lambda = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4
$k = 2$	2.292	2.861	3.888	5.780
$k^\circ = 2$	2.481	3.024	4.485	6.613
$\lambda = 0.5$	0.6	0.7	0.8	0.9
$k = 9.549$	18.14	42.55	145.8	1257
$k^\circ = 10.67$	19.53	46.60	138.9	1053

Вычисления для каждого значения λ на «Стреле» занимают время около трех минут.

По этим данным построена сплошная кривая на фиг. 3. Для сравнения здесь во второй строке приведены приближенные значения

$k = k^\circ$ (пунктирная кривая на фиг. 3) по формуле Р. Зонтага

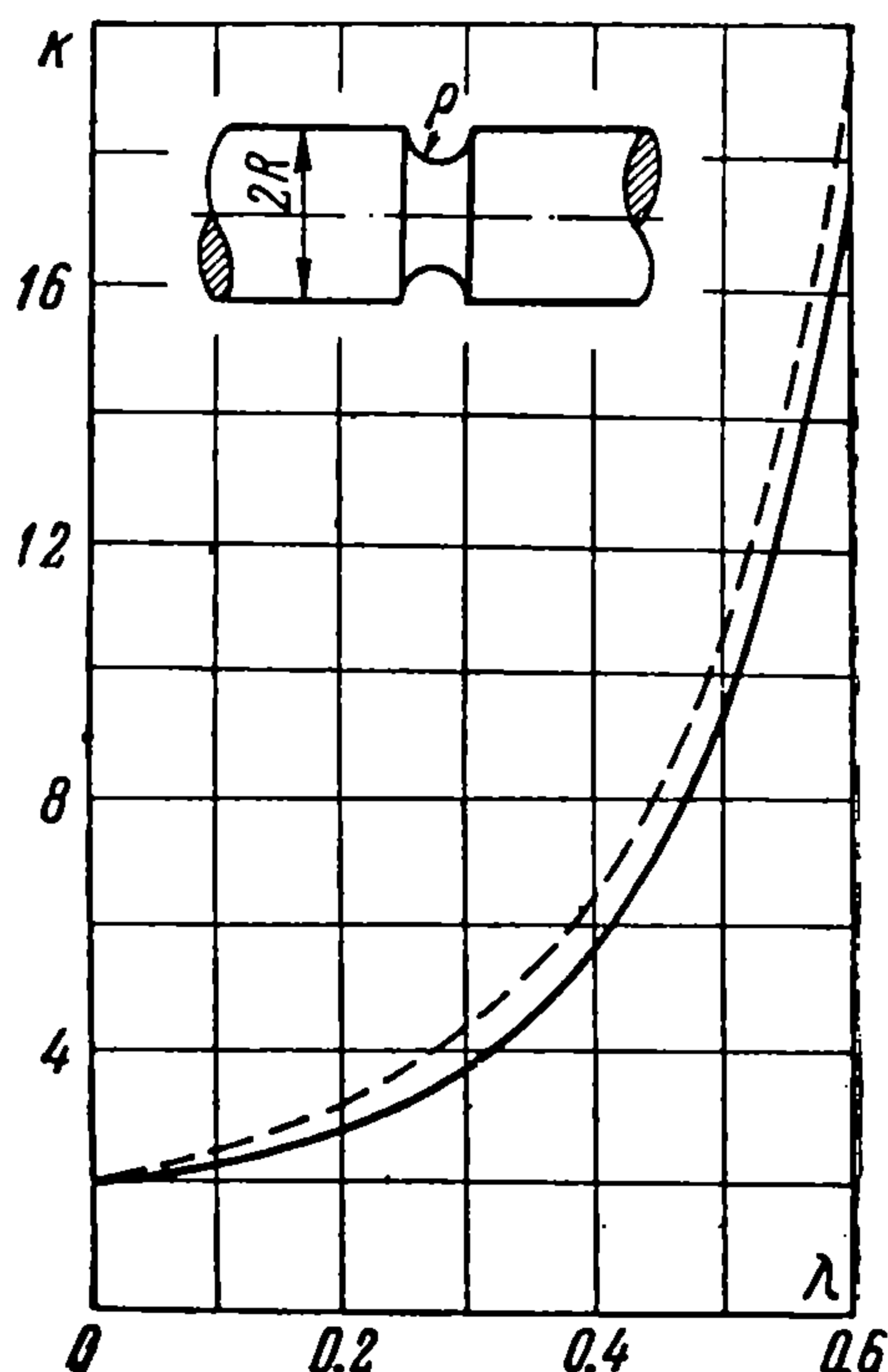
$$k^\circ = \frac{2}{(1-\lambda)^3(1+\lambda)}$$

Как видно из приведенных данных и фиг. 3, при больших λ формула Зонтага, которой обычно пользуются при инженерных расчетах, дает заниженный коэффициент концентрации напряжений.

Поступила 20 VII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоносов С. М. Метод неполного разделения переменных в краевых задачах электростатики. Тр. Рязанск. радиотехн. ин-та. 1956, т. I.
2. Уиттекер Е. Т. и Ватсон В. Г. Курс современного анализа, т. II. ГТТИ, 1934.
3. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. ГТТИ, 1946.
4. Никольский С. М. Квадратурные формулы. Физматгиз, 1958.



Фиг. 3