Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О РАССЕЯНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В СРЕДЕ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ОПТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Л. А. Галин

(Москва)

В этой работе дается решение задачи о неустановившемся рассеянии и поглощении света в среде, оптические свойства которой изменяются. Количество рассеивающего вещества (например, капелек воды, находящихся в дисперсном состоянии в воздухе) предполагается зависящим от суммарной энергии поглощенного излучения. При этом первоначальная концентрация рассеивающего вещества предполагается постоянной. В дальнейшем она уменьшается, причем это уменьшение зависит линейно от количества поглощенного излучения.

Подобные соотношения будут иметь место, например, в том случае, когда излучение солнца действует на туман, причем количество влаги, находящейся в виде аэрозоля, будет уменьшаться вследствие испарения. Скорость испарения, т. е. количество испаряющейся воды в единицу времени, будет, очевидно, пропорциональна количеству поглощаемого излучения. При этом пренебрегается некоторой инерционностью указанного процесса.

Будем иметь дело с одномерной задачей, т. е. с полубесконечной средой, которая состоит из параллельных слоев, оптические свойства которых являются функциями z и t. Излучение извне проникает в эту среду.

1. Введем в рассмотрение поток излучения I, являющийся функцией времени t, координаты z и в общем случае двух угловых координат θ и ϑ, центр которых находится в той точке, куда приходит излучение.

В таком случае для определения I имеем систему двух уравнений [1]

$$\frac{dI}{ds} = -\alpha^* I + \varepsilon, \quad \varepsilon = \beta\alpha^* \iint\limits_{\Omega} I \frac{d\omega'}{4\pi} \tag{1.1}$$

Здесь рассматриваются случаи, когда в каждый момент времени устанавливается равновесие излучения и поэтому в выражении (1.1) можно пренебречь производной от I по времени, которая делится на скорость света [2]. Во втором выражении интегрирование производится по телесным углам. Полагаем индикатрису рассеяния сферической. В более общем случае интеграл будет иметь следующий вид:

$$\iint\limits_{\Omega} I\varkappa(\gamma) \frac{d\omega'}{4\pi}$$

Здесь $\varkappa(\gamma)$ — индикатриса рассеяния, дающая величину потока излучения, рассеянного в данном направлении, которая является частью потока I, падающего в данную точку. Величина γ представляет собой угол между направлением падающего и излученного света.

В случае сферической индикатрисы рассеяния свет по всем направлениям рассеивается с одинаковой интенсивностью и поэтому $\varkappa(\gamma) = 1$.

В уравнениях (1.1) α^* — объемный коэффициент поглощения средой, т. е. количество излучения (выраженное, например, в калориях), которое поглощается в единице объема.

Будем рассматривать среду, в которой содержится рассеивающее вещество, причем объемный коэффициент поглощения будет пропорционален концентрации этого вещества $\rho\,(z,\ t)$. Таким образом, $\alpha^* = \alpha\rho\,(z, t)$.

Что касается величины β, т. е. отношения количества рассеянного излучения к поглощенному, то ее будем полагать постоянной.

Таким образом, исходные предположения, касающиеся поглощения и рассеяния, таковы:

а) Коэффициент поглощения пропорционален концентрации поглощающего вещества. Это обстоятельство будет иметь место, например, в том случае, если поглощение обусловлено в основном многократным отражением и преломлением в отдельных частицах, из которых состоит поглощающее и рассеивающее вещество.

б) Отношение количества рассеянного излучения к поглощенному постоянно и не зависит от степени дисперсности частиц. Это соответствует предположению, что альбедо каждой частицы не зависит от ее величины.

Уравнения (1.1) могут быть записаны в следующей форме:

$$\cos\vartheta\,\frac{\partial I}{\partial z} = -\alpha\rho\,(z,\ t)\,I + \varepsilon, \quad \varepsilon = \beta\alpha\rho\,(z, t)\iint\limits_{\Omega} I\,\frac{d\omega'}{4\pi} \tag{1.2}$$

Или, иначе,

$$\cos\vartheta\,\frac{\partial I}{\partial z}\,\frac{1}{\alpha\rho\,(z,\ t)} = -I + \beta\iint\limits_{\Omega} I\,\frac{d\omega'}{4\pi} \tag{1.3}$$

здесь ϑ — угол между направлением потока излучения I и осью z.

Если ввести новую переменную

$$\tau = \alpha\int\limits_0^z \rho\,(\zeta, t)\,d\zeta \tag{1.4}$$

то из (1.3) получим

$$\cos\vartheta\,\frac{\partial I}{\partial\tau} = -I + \beta\iint\limits_{\Omega} I\,\frac{d\omega'}{4\pi} \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) соответствует случаю поглощения и рассеяния излучения в среде, у которой коэффициент поглощения постоянен и равен единице и в которой роль координаты z выполняет τ.

Первоначально рассматривается случай, когда интенсивность излучения, проникающего извне в среду, постоянна. В дальнейшем будет рассмотрен также случай, когда интенсивность излучения зависит от времени. Если ввести функцию $B\,(\tau)$, равную количеству излучения, поглощенному в единичном объеме в единицу времени

$$B\,(\tau) = \iint\limits_{\Omega} I\,d\omega' \tag{1.6}$$

то для ее определения можно получить следующее интегральное уравнение [1]

$$B\,(\tau) = I_0 e^{-\tau} + \frac{\beta}{2}\int\limits_0^\infty B\,(\omega)\,\mathrm{Ei}\,(|\,\tau - \omega\,|)\,d\omega \tag{1.7}$$

Здесь

$$\mathrm{Ei}\,(s) = \int\limits_s^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx \tag{1.8}$$

Для нахождения $B(\tau)$ удобно воспользоваться методом последовательных приближений. Первое приближение, соответствующее случаю отсутствия рассеяния, будет

$$B_1(\tau) = I_0 e^{-\tau} \tag{1.9}$$

Второе приближение

$$B_2(\tau) = I_0\left(e^{-\tau} + \frac{\beta}{2}\int\limits_0^\infty e^{-\omega}\,\mathrm{Ei}\,(|\,\tau-\omega\,|)\,d\omega\right) \tag{1.10}$$

Аналогично могут быть найдены последующие приближения.

Если возвратиться к первоначальной системе координат, то для величины поглощения излучения в единичном объеме имеем выражение

$$B(z, t) = B(\tau)\frac{\partial\tau}{\partial z} \tag{1.11}$$

Так как, согласно исходным предположениям, концентрация рассеивающего вещества убывает по линейному закону в зависимости от количества поглощенного излучения, то для определения $\rho(z, t)$ получаем следующее условие:

$$\rho(z, t) = \rho_0 - \lambda\int\limits_0^t B(\tau)\frac{\partial\tau}{\partial z}\,d\xi \tag{1.12}$$

Здесь ρ_0 — начальная концентрация рассеивающего вещества, а λ — коэффициент пропорциональности, связывающий скорость изменения концентрации этого вещества с интенсивностью поглощенного излучения.

Из (1.4) имеем

$$\rho(z, t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\tau}{\partial z} \tag{1.13}$$

На основании (1.12) и (1.13) находим

$$\frac{\partial\rho(z, t)}{\partial t} = -\lambda B(\tau)\frac{\partial\tau}{\partial z}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2\tau}{\partial z\partial t} = -\lambda\alpha B(\tau)\frac{\partial\tau}{\partial z} \tag{1.14}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(\tau) = \int\limits_\tau^\infty B(\omega)\,d\omega \tag{1.15}$$

Тогда получим

$$B(\tau)\frac{\partial\tau}{\partial z} = -\frac{\partial\Phi(\tau)}{\partial z} \tag{1.16}$$

Если рассматривать последовательные приближения, то, пользуясь (1.9), получим

$$\Phi_1(\tau) = I_0\int\limits_\tau^\infty e^{-\omega}d\omega = I_0 e^{-\tau} \tag{1.17}$$

Следующее приближение, найденное из (1.10), будет

$$\Phi_2(\tau) = I_0\left(e^{-\tau} + \frac{\beta}{2}\int\limits_\tau^\infty d\tau\left(\int\limits_0^\infty e^{-\omega}\,\mathrm{Ei}\,(|\,r-\omega\,|)\,d\omega\right)\right) \tag{1.18}$$

На основании (1.16) уравнение (1.14) приобретает следующую форму

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial z\partial t} = \lambda\alpha\frac{\partial\Phi(\tau)}{\partial z}, \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\tau}{\partial t} - \mu\Phi(\tau)\right] = 0 \qquad (\mu = \lambda\alpha) \tag{1.19}$$

Функция τ, удовлетворяющая этому уравнению, может быть выражена через функции от z и t.

Из (1.19) следует, что τ удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\tau}{dt} - \mu\Phi(\tau) = f(t) \tag{1.20}$$

Установим граничные условия для определения τ. Функция τ определяется в квадранте на плоскости zt, в котором $0 < t < \infty$ и $0 < z < \infty$. Имеем выражение (1.4)

$$\tau = \alpha \int_0^z \rho(\zeta, t)\, d\zeta$$

Отсюда следует, что $\tau = 0$ при $z = 0$. При $t = 0$ имеет место начальное условие $\rho(z, t) = \rho_0$. На основании этого $\tau = \tau_0 = \alpha\rho_0 z$ при $t = 0$. Так как $\tau = 0$ при $z = 0$, то в силу того, что $d\tau / dt = 0$ из (1.20) имеем

$$f(t) = -\mu\Phi(0) \tag{1.21}$$

Отсюда получаем

$$\frac{d\tau}{dt} = \mu(\Phi(\tau) - \Phi(0)), \quad \text{или} \quad \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\xi}{\Phi(\xi) - \Phi(0)} = \mu t \tag{1.22}$$

Так как $\tau_0 = \alpha\rho_0 z$ при $t = 0$, то окончательно получаем

$$t = \frac{1}{\mu} \int_{\alpha\rho_0 z}^{\tau} \frac{d\xi}{\Phi(\xi) - \Phi(0)} \tag{1.23}$$

Отсюда, после обращения полученного соотношения и определения τ, как функции от z и t, на основании (1.13), определяется концентрация рассеивающего вещества $\rho(z, t)$. Функция $\Phi(\tau)$ находится из интегрального уравнения (1.7) и соотношения (1.15).

Приближенные выражения для $\Phi(\tau)$ даются (1.17) и (1.18).

Выше был рассмотрен случай, когда интенсивность излучения, поступающего в среду, была постоянной. Если эта величина (обозначим ее $I_0(t)$) будет зависеть от времени, то вместо (1.12) будем иметь

$$\rho(z, t) = \rho_0 - \lambda \int_0^t I_0(s) B(\tau) \frac{\partial\tau}{\partial z} ds \tag{1.24}$$

В таком случае следует ввести новую переменную

$$\sigma = \int_0^t I_0(s)\, ds \tag{1.25}$$

в результате чего выражение (1.24) преобразуется к виду (1.12). После этого, повторяя предыдущие рассуждения, найдем следующее уравнение для определения τ

$$\frac{1}{\lambda\alpha} \int_{\alpha\rho_0 z}^{\tau} \frac{d\xi}{\Phi(\xi) - \Phi(0)} = \int_0^t I_0(s)\, ds \tag{1.26}$$

2. Рассмотрим задачу, когда в среде имеет место только поглощение излучения и отсутствует рассеяние. Это будет соответствовать случаю, когда в качестве функции $\Phi(\tau)$, входящей в уравнение (1.19), должно быть взято выражение (1.17). В этом случае нетрудно найти выражение для $\rho(z, t)$ в явном виде. Оно может быть получено обращением интеграла (1.23), который в данном случае приводится к элементарным функциям. Ниже дается несколько иной метод определения τ и ρ.

Итак, пусть $\Phi(\tau) = I_0 e^{-\tau}$. При этом уравнение принимает вид:

$$\frac{d\tau}{dt} - \mu I_0 e^{-\tau} = f(t) \tag{2.1}$$

Решение этого уравнения будет зависеть от одной функции z, а также от одной функции t, так как в правой части функция $f(t)$ произвольна. Подстановка $\varphi = e^{-\tau}$ приводит (2.1) к уравнению Бернулли

$$\frac{d}{dt}(\lg\varphi) + \nu\varphi = -f(t), \quad \text{или} \quad \frac{d\varphi}{dt} + f(t)\varphi + \nu\varphi^2 = 0 \qquad (\nu = \mu I_0) \tag{2.2}$$

Введем новую переменную $s = \nu t$ и обозначим

$$g^*(s) = \frac{1}{\nu} f\left(\frac{t}{\nu}\right), \qquad \psi = \exp\int_0^s \varphi d\xi \tag{2.3}$$

Для функции ψ получим следующее выражение:

$$\psi = m^*(z)\exp\left(-\int_0^s g^*(\xi)\, d\xi\right) + h(z) \tag{2.4}$$

Откуда найдем

$$\varphi = \frac{d}{ds}[\lg(g(s) + h(z))] \qquad \left(g(s) = \exp\int_0^s g^*(\xi)\, d\xi\right) \tag{2.5}$$

Отсюда находим выражение для φ

$$\varphi = \frac{g'(s)}{g(s) + h(z)} \tag{2.6}$$

Кроме того, согласно (1.13) и (2.3), имеем

$$\rho(z, t) = -\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dz}[\lg\varphi] \tag{2.7}$$

Подставляя сюда выражение (2.7), найдем

$$\rho(z, t) = \frac{1}{\alpha}\frac{h'(z)}{g(s) + h(z)} \tag{2.8}$$

Для определения функций $g(s)$ и $h(z)$ воспользуемся граничными условиями. Так как $\tau = -\lg\varphi = 0$ при $z = 0$ и, следовательно, $\varphi = 1$, то

$$\varphi = \frac{g_0 e^s}{g_0 e^s - h(0) + h(z)} \tag{2.9}$$

На основании условия, что $\rho = \rho_0$ при $t = 0$ или $s = 0$, получим

$$h(z) = g_0 e^{\alpha\rho_0 z} - g_0 \tag{2.10}$$

Воспользовавшись (2.10) и (2.11), а также перейдя к старым переменным, для концентрации рассеивающего вещества найдем

$$\rho(z, t) = \rho_0 \frac{e^{\alpha\rho_0 z}}{e^{\alpha\lambda I_0 t} - 1 + e^{\alpha\rho_0 z}} \tag{2.11}$$

Выражение (2.12) получено для случая, когда излучение, начинающее проникать в среду в момент времени $t = 0$, в дальнейшем остается постоянным. Однако методом, изложенным в конце предыдущего раздела, этот результат нетрудно обобщить на случай излучения, интенсивность которого меняется со временем.

Поступила 17 VII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М., ИИЛ, 1953.
2. Соболев В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М., ГИТТЛ, 1956.