Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ДВИЖЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. С. Новоселов

(Ленинград)

Получены асимптотические оценки, позволяющие в некоторых случаях при немалых изменениях позиционных координат и скоростей судить о приемлемости уравнений, выводимых при помощи прикладной (прецессионной) теории гироскопов.

Автор выражает глубокую признательность А. Ю. Ишлинскому и Я. Н. Ройтенбергу за ценные замечания, которые помогли улучшить статью.

1. В общем случае для произвольной зависимости от времени движения основания, масс гироскопической системы и обычных и реактивных обобщенных сил, отвечающих циклическим координатам, уравнения движения механических систем с гироскопами записываются [1] в виде

$$\frac{Д}{Дt}\frac{DR}{D\dot{q}_i}-\frac{DR}{Dq_i}=Q_i+\Psi_i$$

Здесь приняты обозначения производных механики переменных масс, при вычислении которых закрепляются массы, q_i $(i=1,\ldots,s)$ — позиционные координаты; Q_i и Ψ_i — им отвечающие обычные и реактивные силы абсолютного движения, являющиеся функциями позиционных координат, их производных и времени; $Д\,/\,Дt$ — частная производная по времени при группе переменных m и t, принимаемых за независимые; $D\,/\,Dq_i$ и $D\,/\,D\dot{q}_i$ — частные производные по указанным переменным при группе переменных m, t, q_i и $\dot{q}_i$, принимаемых за независимые.

Функция Рауса абсолютного движения системы с точностью до постоянного слагаемого равна [1]

$$R=\sum_{k=1}^{r}C_k(H+h_k)\Big(\sum_{j=1}^{s}a_j{}^k\dot{q}_j+a_0{}^k\Big)+T^*\qquad(H\gg h_k)\tag{1.2}$$

где C_k — осевой момент инерции k-го гироскопа, r — число гироскопов, H — достаточно большая постоянная величина, h_k — функции времени, $a_j{}^k$ — косинус угла между вектором угловой скорости $\dot{q}_j$ и осью k-го гироскопа, $a_0{}^k$ — проекция на ось k-го гироскопа угловой скорости основания.

В выражении (1.2) величина T^* представляет собой кинетическую энергию абсолютного движения элементов подвеса гироскопической системы, кожухов и двигателей гироскопов, а также кинетическую энергию вращений самих роторов вокруг несобственных осей.

Составим уравнения (1.1) при помощи (1.2)

$$\sum_{j=1}^{s}a_{ij}\ddot{q}_j+H\Big(\sum_{j=1}^{s}g_{ij}\dot{q}_j+g_{i0}\Big)+\Omega_i=0\tag{1.3}$$

Здесь введены обозначения

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{r} C_k \left(\frac{\partial a_i^k}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j^k}{\partial q_i} \right), \qquad g_{i0} = \sum_{k=1}^{r} C_k \left(\frac{\partial a_i^k}{\partial t} - \frac{\partial a_0^k}{\partial q_i} \right)$$

$$\Omega_i = \Phi_i - \Theta_i, \qquad \Phi_i = \frac{Д}{Дt} \frac{DT^*}{D\dot{q}_i} - \frac{DT^*}{Dq_i} - \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\ddot{q}_j, \qquad a_{ij} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \tag{1·4}$$

$$\Theta_i = Q_i + \Psi_i - \sum_{k=1}^{r} C_k h_k \left[\left(\frac{\partial a_i^k}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j^k}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j + \left(\frac{\partial a_i^k}{\partial t} - \frac{\partial a_0^k}{\partial q_i} \right) \right]$$

При составлении уравнений движения по методу прикладной теории гироскопов полагают $T^* = 0$. Обозначая в этом случае позиционные координаты через g_i, получим уравнения

$$H \left(\sum_{j=1}^{s} g_{ij} \dot{g}_j + g_{i0} \right) - \Theta_i = 0 \tag{1.5}$$

причем в g_{ij}, g_{i0} позиционные координаты, а в Θ_i позиционные координаты и скорости заменяются на величины g_i и $\dot{g}_i$.

Если гироскопическая система расположена на неподвижном основании, то $\partial a_i^k / \partial t = a_0^k = 0$ и, следовательно, $g_{i0} = 0$.

В реальных гироскопических системах на подвижном основании коэффициенты g_{i0} могут иметь порядок угловой скорости вращения Земли, которая будет достаточно малой величиной. Маятниковый же момент, входящий в Q_i, в некоторых гироскопических системах близок к величине H. Поэтому при рассмотрении конкретной системы следует учитывать ее особенность.

Будем предполагать определитель матрицы гироскопических членов $\| g_{ij} \|$ отличным от нуля, коэффициенты a_{ij}, g_{ij} и g_{i0} имеющими порядок по H не выше нулевого и все функции (1.4) разлагающимися в степенные ряды.

Рассмотрим дифференциальные уравнения, содержащие малый параметр λ

$$\sum_{j=1}^{s} g_{ij}^{(1)} \dot{q}_{j1} + g_{i0}^{(1)} + \lambda \Phi_i^{(1)} - H^{-1} \Theta_i^{(1)} = 0$$

Символ (1) показывает, что в соответствующих функциях позиционные координаты и скорости заменяются переменными q_{i1} и $\dot{q}_{i1}$.

Как следует из метода малого параметра Пуанкаре [2], переменные q_{i1} и $\dot{q}_{i1}$ с точностью до членов порядка λ определяются уравнениями (1.5). Полагая, в частности, $\lambda = H^{-1}$, имеем

$$\{ q_{i1} - g_i, \ \dot{q}_{i1} - \dot{g}_i \} = O(H^{-1}) \tag{1.6}$$

2. Пусть гироскопическая система расположена на неподвижном основании и обобщенные силы абсолютного движения содержат лишь члены нулевого порядка относительно H.

Решение уравнений (1.3) будем искать в виде

$$q_i = q_{i1}(H^{-1}t) + x_i(Ht) \tag{2.1}$$

Переменные q_{i1} в рассматриваемом случае удовлетворяют уравнениям

$$H \sum_{j=1}^{s} g_{ij}^{(1)} \dot{q}_{j1} + \Omega_i^{(1)} = 0 \tag{2.2}$$

Начальные значения принимаем в виде

$$q_{i1}^{\circ} = q_i^{\circ}, \qquad x_i^{\circ} = 0, \qquad H \sum_{j=1}^{s} g_{ij}^{(1)\circ} \dot{q}_{j1}^{\circ} + \Omega_i^{(1)\circ} = 0, \qquad \dot{x}_i^{\circ} = \dot{q}_i^{\circ} - \dot{q}_{i1}^{\circ} \tag{2.3}$$

Будем обозначать штрихами производные по аргументам $\tau_1 = H^{-1}t$ и $\tau_2 = Ht$. Если $\partial g_{ij} / \partial t$ и $\partial \Omega_i / \partial t$ равны нулю или имеют порядок не больше чем H^{-1}, то будем говорить, что для гироскопической системы выполнены условия (A). Из уравнений (2.2) и условий (2.3) следует, что q_{i1} и q_{i1}' имеют нулевой порядок относительно H, далее q_{i1}'' имеют порядок H и при выполнении условий (A) нулевой порядок относительно H.

Для определения x_i в силу (1.3), (2.1) — (2.2), равенства $g_{i0} = 0$ и принятых обозначений для производных по τ_1 и τ_2 получим уравнения

$$\sum_{j=1}^{s} \left[a_{ij}(q_{m1}(H^{-2}\tau_2)+x_m,\ H^{-1}\tau_2)\, x_j'' + g_{ij}(q_{m1}(H^{-2}\tau_2)+x_m,\ H^{-1}\tau_2)\, x_j'\right] +$$
$$+ H^{-2}\left[\Omega_i(q_{m1}(H^{-2}\tau_2)+x_m,\ H^{-1}q_{m1}'(H^{-2}\tau_2)+Hx_m',\ H^{-1}\tau_2) -\right.$$
$$\left. - \Omega_i(q_{m1}(H^{-2}\tau_2),\ H^{-1}q_{m1}'(H^{-2}\tau_2),\ H^{-1}\tau_2)\right] + H^{-2} f_i(H^{-1},\ x_m,\ \tau_2) = 0$$

г

$$f_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\left[q_{m1}(H^{-2}\tau_2)+x_m,\ H^{-1}\tau_2\right] q_{j1}''(H^{-2}\tau_2) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{s}\left[g_{ij}(q_{m1}(H^{-2}\tau_2)+x_m,\ H^{-1}\tau_2) - g_{ij}(q_{m1}(H^{-2}\tau_2),\ H^{-1}\tau_2)\right] q_{j1}'(H^{-2}\tau_2)$$

Пусть при нулевом порядке величин ξ_j

$$O\{\Omega_i(\xi_j,\ \eta_j,\ t)\} = \sigma O(\eta_j)$$

Практический интерес представляют случаи $\sigma = 0,\ 1,\ 2$, которые и будем рассматривать. Функции f_i имеют порядок H, а при выполнении условий (A) нулевой порядок по H.

На основании метода малого параметра Пуанкаре [2] получаем

$$\{x_i - y_i,\ x_i' - y_i'\} = O(H^{-1}) \tag{2.4}$$

Переменные y_i имеют те же начальные данные, что и x_i, и удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{j=1}^{s}\left[a_{ij}(q_m^{\circ}+y_m,\ 0)\, y_j'' + g_{ij}(q_m^{\circ}+y_m,\ 0)\, y_j'\right] =$$
$$= -H^{-2}\left[\Omega_i(q_m^{\circ}+y_m,\ Hy_m',\ 0) - \Omega_i(q_m^{\circ},\ 0,\ 0)\right] \tag{2.5}$$

Если $\sigma = 0,\ 1$, то правая часть (2.5) может быть заменена нулем. Так как a_{ij}, g_{ij} и при $\sigma = 2$ правая часть уравнения (2.5) имеет нулевой порядок по H, то в силу уравнений (2.5) порядок y_j и y_j' равен порядку y_j° и $y_j'^{\circ}$, т. е. H^{-1}.

Поэтому вследствие (1.6), (2.1) и (2.4) получаем

$$\{q_i - g_i\} = O(H^{-1}) \tag{2.6}$$

Формула (2.6) служит обоснованием прикладной теории гироскопов в рассматриваемом случае.

Замечание. Для доказательства сходимости рядов по методу Пуанкаре требуется ограниченность переменных $q_{i1} - g_i$, $\dot{q}_{i1} - \dot{g}_i$ в п. 1 и $x_i - y_i$, $x_i' - y_j'$ в п. 2. Поэтому предлагаемые асимптотические оценки сохраняют свое значение для бесконечного промежутка времени лишь в случае ограниченности указанных выше переменных. В общем случае при возможной неустойчивости гироскопической системы полученные оценки имеют место для любого момента времени, при котором переменные находятся пусть и в достаточно большой, но ограниченной области. Настоящее замечание применительно к соответствующим переменным относится ко всему последующему рассмотрению.

Получим оценки для позиционных скоростей. Вводя параметр $\mu = H^{-2}$ и имея в виду, что q_{j1}'' имеют в общем случае порядок H, найдем

$$\{x_i - z_i,\ x_i' - z_i'\} = O(H^{-2}), \qquad \{\dot{x}_i - \dot{z}_i\} = O(H^{-1}) \tag{2.7}$$

Переменные z_i имеют те же начальные данные, что и x_i, и определяются уравнениями

$$\sum_{j=1}^{s} \left[a_{ij}(q_m^\circ + z_m, t)\ddot{z}_j + Hg_{ij}(q_m^\circ + z_m, t)\dot{z}_j\right] = \tag{2.8}$$

$$= -\Omega_i(q_{m1} + z_m,\ H^{-1}q_{m1}' + Hz_m',\ t) + \Omega_i(q_{m1},\ H^{-1}q_{m1}',\ t) -$$

$$- \sum_{j=1}^{s} a_{ij}(q_m^\circ + z_m,\ t)\ddot{q}_{j1}(0)$$

Если выполнены условия (A), то q_{j_1}'' имеют нулевой порядок относительно H и в правой части (2.8) может быть опущен последний член, содержащий $\ddot{q}_{j1}(0)$. Если при этом $\sigma = 0$, то правая часть (2.8) может быть заменена нулем.

Как следует из уравнений (2.2), производные $\dot{q}_{i1}$ имеют порядок H^{-1}, поэтому в силу (1.6), (2.1) и (2.7) имеем оценку для позиционных скоростей $\{\dot{q}_i - \dot{z}_i\} = O(H^{-1})$.

В качестве примера рассмотрим случай гироскопа переменной массы, точные уравнения движения которого даются в работе [3]

$$A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \sin\theta\cos\theta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\dot{\psi}\sin\theta = \mathrm{mgl}\sin\theta$$

$$A\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\sin^2\theta) + C\frac{d}{dt}[(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta] = K\cos\theta$$

$$C\frac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = K$$

Здесь моменты инерции A и C, маятниковый момент mgl и реактивный момент K являются известными функциями времени; находим

$$\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta = H + h, \qquad h = \int_0^t \frac{K}{C}\,dt$$

Уравнения (1.3) имеют вид

$$A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \sin\theta\cos\theta + C(H + h)\dot{\psi}\sin\theta = \mathrm{mgl}\sin\theta$$

$$A\ddot{\psi}\sin^2\theta + 2A\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta - C(H + h)\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

Согласно прикладной теории гироскопов получим

$$C(H+h)\dot{\psi} = \mathrm{mgl}, \quad \dot{\theta} = 0, \text{ или } \theta = \theta_0, \quad \psi = \int_0^t \frac{\mathrm{mgl}}{C(H+h)} dt + \psi_0 \tag{2.9}$$

По доказанному медленная прецессия (2.9) с точностью до членов порядка H^{-1} определяет решение точных уравнений.

Таким образом, приходим к следующему выводу. Если быстро вращающийся гироскоп переменной массы отклонить от вертикального положения на угол θ_0, то он будет совершать в переменных θ и ψ колебания амплитуды порядка H^{-1} и частоты порядка H вокруг движения (2.9).

3. Рассмотрим теперь случай, когда гироскопическая система может располагаться на подвижном основании и обобщенные силы могут иметь порядок H (например, маятниковый момент). Пусть $\ddot{g}_i$, определяемые с помощью дифференцирования уравнений (1.5), имеют некоторый порядок λ' относительно величины H. Решение уравнений (1.3) также ищем в виде (2.1). Переменные q_{i1} удовлетворяют уравнениям

$$H\left(\sum_{j=1}^{s} g_{ij}^{(1)}\dot{q}_{j1} + g_{i0}^{(1)}\right) + \Omega_i^{(1)} = 0 \tag{3.1}$$

В этом случае нельзя рассматривать q_{i1} как функции аргумента $\tau_1 = H^{-1}t$. Для определения x_i получим уравнения

$$\sum_{j=1}^{s} \left[a_{ij}(q_{m1}+x_m, H^{-1}\tau_2)x_j'' + g_{ij}(q_{m1}+x_m, H^{-1}\tau_2)x_j'\right] +$$
$$+ H^{-2}\left[\Omega_i(q_{m1}+x_m, \dot{q}_{m1}+Hx_m', H^{-1}\tau_2) - \Omega_i(q_{m1}, \dot{q}_{m1}, H^{-1}\tau_2)\right] +$$
$$+ F_i(H^{-1}, \mu, x_m, \tau_2) = 0$$

где

$$F_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}(q_{m1}+x_m, H^{-1}\tau_2)\ddot{q}_{j1} + H^{-1}\sum_{j=1}^{s}\left[g_{ij}(q_{m1}+x_m, H^{-1}\tau_2) -\right.$$
$$\left.- g_{ij}(q_{m1}, H^{-1}\tau_2)\right]\dot{q}_{j1} + H^{-1}\left[g_{i0}(q_{m1}+x_m, H^{-1}\tau_2) - g_{i0}(q_{m1}, H^{-1}\tau_2)\right]$$

Будем считать, что при нулевом порядке ξ_j

$$O\left[\Omega_i(\xi_j, \eta_j, t)\right] \leqslant O'', \qquad O'' = \max\{H^2, \sigma O(\eta)\} \qquad (\sigma = 0, 1, 2)$$

Это отвечает практически интересным случаям гироскопических систем.

Функции F_i зависят от двух малых параметров H^{-1} и μ и обращаются в нуль при нулевых значениях параметров. Обозначая через O' наибольший из порядков H^{-1} и μ, по методу малого параметра Пуанкаре получим

$$O\{x_i - y_i, x_i' - y_i'\} = O' \tag{3.2}$$

Переменные y_i в рассматриваемом случае определяются уравнениями

$$\sum_{j=1}^{s} \left[a_{ij}(q_{m1}+y_m, H^{-1}\tau_2)y_j'' + g_{ij}(q_{m1}+y_m, H^{-1}\tau_2)y_j'\right] + \tag{3.3}$$
$$+ H^{-2}\left[\Omega_i(q_{m1}+y_m, \dot{q}_{m1}+Hy_m', H^{-1}\tau_2) - \Omega_i(q_{m1}, \dot{q}_{m1}, H^{-1}\tau_2)\right] = 0$$

Из уравнений (3.3) следует, что y_i и y_i' имеют порядок начальных данных, т. е. H^{-1}. В силу оценок (1.6) и (3.2) находим

$$O\{q_i - g_i\} = O' \tag{3.4}$$

Формула (3.4) может служить для суждения о приемлемости уравнений прикладной теории гироскопов в случае подвижного основания.

В качестве примера рассмотрим движение гироскопа постоянной массы, ось наружного карданового кольца которого укреплена на платформе, перемещающейся с постоянной по величине скоростью и при постоянном курсе по поверхности Земли.

По методу прикладной теории гироскопов ($T^* = 0$), пренебрегая восточной составляющей скорости, получим

$$R = C(H+h)(\dot\psi\cos\theta - v_N R^{-1}\sin\theta\sin\psi - \omega\cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \omega\sin\varphi\cos\theta)$$

Здесь θ и ψ — углы Эйлера, измеряемые от вертикали и параллели (на восток) данного места, v_N — северная составляющая скорости платформы, R и ω — радиус и угловая скорость вращения Земли, φ — геоцентрическая широта. Уравнения движения в переменных g имеют вид

$$\dot\psi = -(v_N R^{-1}\operatorname{ctg}\theta\sin\psi + \omega\cos\varphi\operatorname{ctg}\theta\cos\psi + \omega\sin\varphi) + \frac{\mathrm{mgl}}{C(H+h)}$$
$$\dot\theta = v_N R^{-1}\cos\psi - \omega\cos\varphi\sin\psi \tag{3.5}$$

По доказанному решение уравнений (3.5) представляет движение гироскопа в координатах θ и ψ с точностью до членов порядка O', где

$$O' = \max\left\{H^{-1}, O\left(\frac{v_N}{R}\right)^2, \ O(\omega^2), \ O\left(\frac{v_N\omega}{R}\right), \ O\left[\frac{v_N\,\mathrm{mgl}}{CR(H+h)}\right], \ O\left[\frac{\omega\,\mathrm{mgl}}{C(H+h)}\right]\right\}$$

4. Рассмотрим гироскопическую систему с n дополнительными уравнениями, разрешенными относительно старших производных

$$\ddot q_\alpha + \Omega_\alpha(q_i, \dot q_i, q_\nu, \dot q_\nu, q_\gamma, t) = 0, \quad \dot q_\beta + \Omega_\beta(q_i, \dot q_i, q_\nu, \dot q_\nu, q_\gamma, t) = 0 \tag{4.1}$$

Здесь $\alpha,\nu = s+1, \ldots, s+n_1$; $\beta, \gamma = s+n_1+1, \ldots, s+n$. Функции Ω_i уравнений (1.3) в этом случае зависят от тех же переменных, что и Ω_α, Ω_β, коэффициенты a_{ij}, g_{ij}, g_{i0} зависят от $s+n$ лагранжевых координат.

Составляя уравнения по методу прикладной теории гироскопов, мы получим совместную систему (1.5) и (4.1), в которой переменные q и их производные должны быть заменены переменными g и их производными с соответствующими индексами. При этом

$$g_\nu{}^\circ = q_\nu{}^\circ, \qquad g_\gamma{}^\circ = q_\gamma{}^\circ, \qquad \dot g_\nu{}^\circ = \dot q_\nu{}^\circ$$

Замена переменных q_{i1}, $q_{\nu1}$, $q_{\gamma1}$, $\dot q_{i1}$, $\dot q_{\nu1}$ переменными g_i, g_ν, g_γ, $\dot g_i$, $\dot g_\nu$ здесь также производится с точностью до членов порядка H^{-1}.

Уравнения для переменных x_p ($p = 1, \ldots, s+n$) имеют вид

$$\sum_{j=1}^{s}\left[a_{ij}(q_{p1}+x_p, \ H^{-1}\tau_2)\,x_j'' + g_{ij}(q_{p1}+x_p, \ H^{-1}\tau_2)\,x_j'\right] +$$
$$+ H^{-2}\left[\Omega_i(q_{p1}+x_p, \ \dot q_{j1}+Hx_j', \ \dot q_\alpha + Hx_\alpha', \ H^{-1}\tau_2) -\right.$$

$$- \Omega_i (q_{p1},\ \dot{q}_{j1},\ \dot{q}_{\alpha 1},\ H^{-1}\tau_2)] + F_i (H^{-1},\ \mu,\ x_p,\ \tau_2) = 0$$

$$x_\alpha'' + H^{-2} [\Omega_\alpha (q_{p1} + x_p,\ \dot{q}_{i1} + Hx_i',\ \dot{q}_{\alpha 1} + Hx_\alpha',\ H^{-1}\tau_2) - \\ - \Omega_\alpha (q_{p1},\ \dot{q}_{i1},\ \dot{q}_{\alpha 1},\ H^{-1}\tau_2)] = 0$$

$$x_\beta' + H^{-1} [\Omega_\beta (q_{p1} + x_p,\ \dot{q}_{i1} + Hx_i',\ \dot{q}_{\alpha 1} + Hx_\alpha'\ H^{-1}\tau_2) - \\ - \Omega_\beta (q_{p1},\ \dot{q}_{i1},\ \dot{q}_{\alpha 1},\ H^{-1}\tau_2)] = 0$$

где

$$F_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} (q_{p1} + x_p,\ H^{-1}\tau_2) \ddot{q}_{j1} + H^{-1} \Big\{ \sum_{j=1}^{s} [g_{ij} (q_{p1} + x_p,\ H^{-1}\tau_2) - \\ - g_{ij} (q_{p1},\ H^{-1}\tau_2)] \dot{q}_{j1} + g_{i0} (q_{p1} + x_p,\ H^{-1}\tau_2) - g_{i0} (q_{p1},\ H^{-1}\tau_2) \Big\}$$

Будем считать, что при $O(\xi_p) = 0$

$$O\{\Omega_i (\xi_p,\ \eta_j,\ \zeta_\alpha,\ t)\} \leqslant O'', \qquad O'' = \max \{H^2,\ \sigma O(\eta_j),\ \sigma O(\zeta_\alpha)\} \qquad (\sigma = 0,\ 1,\ 2)$$

$$O\{\Omega_\nu (\xi_p,\ \eta_j,\ \zeta_\alpha,\ t)\} \leqslant O'', \qquad O\{\Omega_\gamma (\xi_p,\ \eta_j,\ \zeta_\alpha,\ t)\} \leqslant \{H,\ \sigma_1 O(\eta_j),\ \sigma_1 O(\zeta_\alpha)\}$$
$$(\sigma_1 = 0,\ 1)$$

По методу малого параметра Пуанкаре имеем

$$\{x_p - y_p,\ x_i' - y_i',\ x_\alpha' - y_\alpha'\} = O'$$

Переменные y_i удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{j=1}^{s} [a_{ij} (q_{p1} + y_p,\ H^{-1}\tau_2) y_j'' + g_{ij} (q_{p1} + y_p,\ H^{-1}\tau_2) y_j'] + \\ + H^{-2} [\Omega_i (q_{p1} + y_p,\ \dot{q}_{j1} + Hy_j',\ \dot{q}_{\alpha 1} + Hy_\alpha',\ H^{-1}\tau_2) - \\ - \Omega_i (q_{p1},\ \dot{q}_{j1},\ \dot{q}_{\alpha 1},\ H^{-1}\tau_2)] = 0$$

Переменные y_ν и y_γ удовлетворяют тем же уравнениям, что и x_ν и x_γ. Порядок переменных y_p, y_p' равен порядку их начальных значений. Отсюда имеем

$$\{y_p,\ y_p'\} = O(H^{-1})$$

Окончательно получаем оценки для суждения о приемлемости уравнений прикладной теории гироскопов в виде

$$O\{q_p - g_p\} = O'' \qquad (p = 1,\ 2,\ \ldots,\ s + n)$$

Поступила 5 III 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Новоселов В. С. Движение стабилизированных гироскопических систем на подвижном основании. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
2. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений . ГИТТЛ, М.— Л., 1950.
3. Новоселов В. С. Регулярная прецессия гироскопа переменной массы. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 11.