

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ АВТОНОМНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА

Ю. К. Жбанов

(Москва)

Рассматривается влияние свободных колебаний гирокомпаса на работу системы в целом с учетом возможной ошибки в начальных условиях на интегрирующем устройстве. Эта задача, поставленная А. Ю. Ишлинским [1], решается для произвольного маневра основания. Получена простая связь между вычисляемой траекторией и движением компасной вертикали.

Рассматривается система, предложенная в работе [1]. В п. 1 дается описание системы в аспекте, наиболее подходящем для проводимых здесь исследований. В п. 2 и 3 доказаны два утверждения, сводящие задачу о колебаниях всей системы к задаче о колебаниях вертикали гирогоризонткомпаса. В п. 4 дается механическая модель компаса.

Исследование проведено в предположении, что все элементы, входящие в систему, сами по себе идеальны.

1. Задача определения земных координат объекта эквивалентна определению его местоположения на неподвижной сфере S , совпадающей с земной поверхностью, но не участвующей в суточном вращении. Если координатная сетка сферы S при $t = 0$ совпадает с географической земной сеткой координат, то объект с широтой $\varphi(t)$ и долготой $\lambda(t)$ по сетке сферы S имеет текущие земные координаты соответственно $\varphi(t)$, $\lambda(t) - Ut$; здесь U — угловая скорость суточного вращения земли. Этот переход не вносит ошибки, поэтому далее рассматривается задача определения местоположения на сфере S .

Для ее решения в работе [1] предлагается использовать счетно-решающий прибор, гирогоризонткомпас и гироскоп направления.

Счетно-решающий прибор решает систему уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_y(t) \sin \vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_z(t) - \omega_y(t) \cos \vartheta \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \omega_y(t) \frac{\cos \vartheta}{\cos \varphi} \quad (1.1)$$

Если в качестве начальных условий для φ , λ , ϑ введены φ_0 , λ_0 , ϑ_0 (фиг. 1) и в качестве коэффициентов подаются некоторые функции $\omega_y(t)$ и $\omega_z(t)$, то прибор выдает на выходе текущие координаты $\varphi(t)$, $\lambda(t)$ некоторой сферической траектории. Эта вычисляемая траектория выходит из точки φ_0 , λ_0 под углом ϑ_0 к параллели, и при движении по ней естественный трехгранник Дарбу имел бы

$$\omega_y = \omega_y(t), \quad \omega_z = \omega_z(t)$$

Такая траектория единственна.

Гирогоризонткомпас с гироскопом направления дают угловые скорости вращения компасного трехгранника ω_y и ω_z . Величина ω_y связана с углом ε разведения гироскопов соотношением:

$$= \frac{2B \cos \varepsilon}{amR}$$

а ω_z непосредственно замеряется гироскопом направления, чувствительная ось которого жестко связана с компасным трехгранником. Величины этих ω_y и ω_z подаются на решающий прибор в качестве коэффициентов.

Заметим, что здесь и далее символы ω_y [ω_z] означают угловую скорость вращения трехгранника вокруг собственной оси y [z], но каждый раз указывается, о каком именно трехграннике идет речь.

Если для компаса выполнены определенные начальные условия [2], то при любом движении основания по сфере S компасный трехгранник совпадает с естественным трехгранником Дарбу и на решающий прибор подаются ω_y и ω_z трехгранника Дарбу траектории основания. Если при этом введенные начальные условия $\varphi_0, \lambda_0, \vartheta_0$ соответствуют начальному положению основания и начальному направлению его скорости, то, согласно отмеченным свойствам решающего прибора, на выходе прибора будут выданы текущие координаты истинной траектории основания.

При несоблюдении какого-либо из начальных условий для компаса или для прибора вычисляемая траектория не совпадает с истинной, но находится с ней в некоторой взаимосвязи. Характер этой взаимосвязи выясняется в следующих пунктах.

2. Рассмотрим случай, когда необходимые начальные условия для компаса выполнены и, стало быть, на прибор поступают ω_y и ω_z трехгранника Дарбу истинной траектории основания. Покажем, что в этом случае при произвольном вводе $\varphi_0, \lambda_0, \vartheta_0$ вычисляемая траектория конгруэнтна истинной.

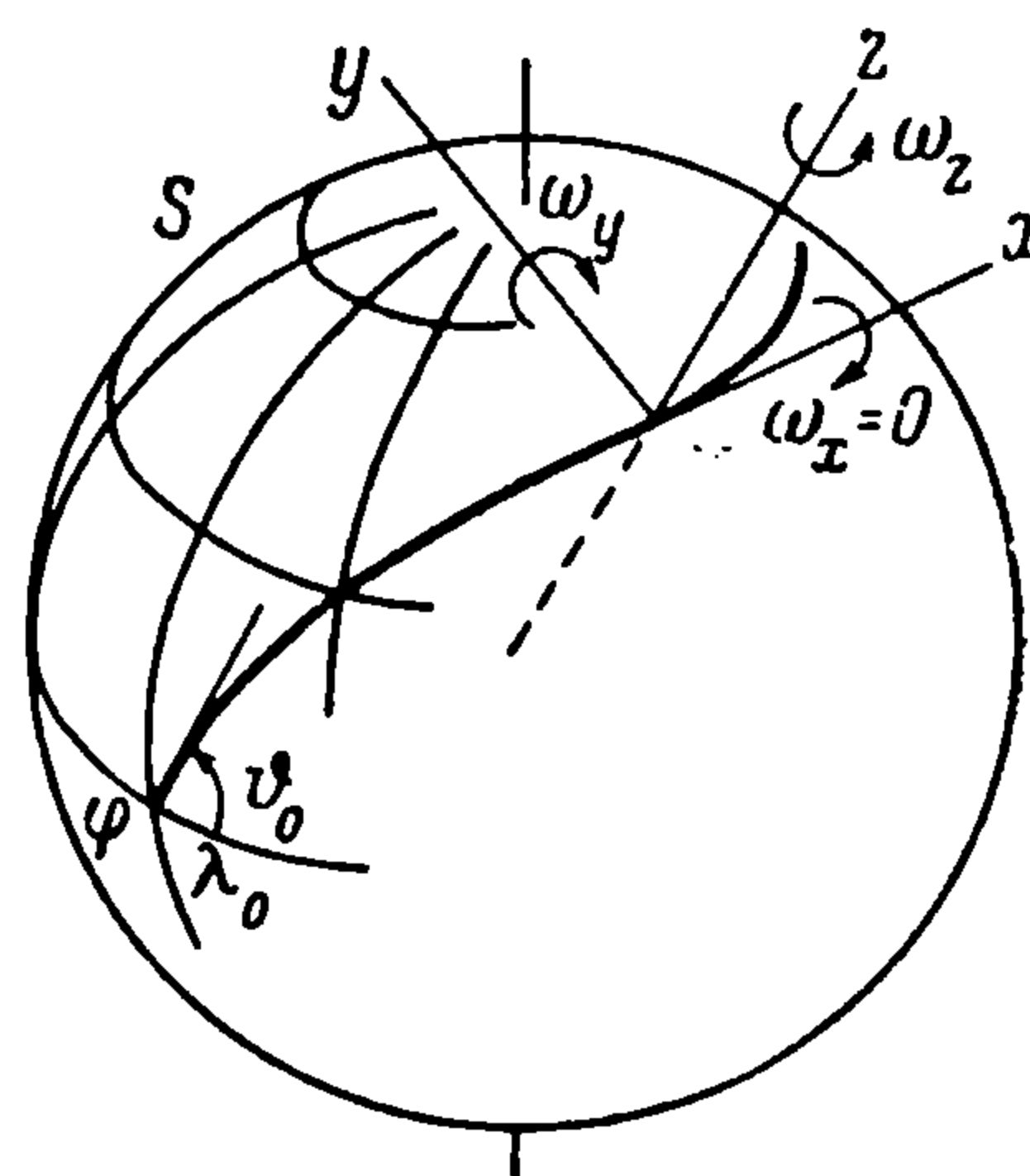
Согласно свойствам решающего прибора, в этом случае $\omega_y(t)$ и $\omega_z(t)$ трехгранника Дарбу вычисляемой траектории тождественно равны соответствующим угловым скоростям трехгранника Дарбу истинной траектории. Отсюда следует, что независимо от $\varphi_0, \lambda_0, \vartheta_0$ для обеих траекторий попарно тождественно равны:

- а) скорости $V(t)$, так как $V(t) = R\omega_y(t)$,
- б) пройденные пути $s(t)$, так как $s(t)$ является определенным интегралом от $V(t)$,
- в) геодезические кривизны как функции времени $K_g(t)$, так как

$$K_g(t) = \omega_z(t) / V(t)$$

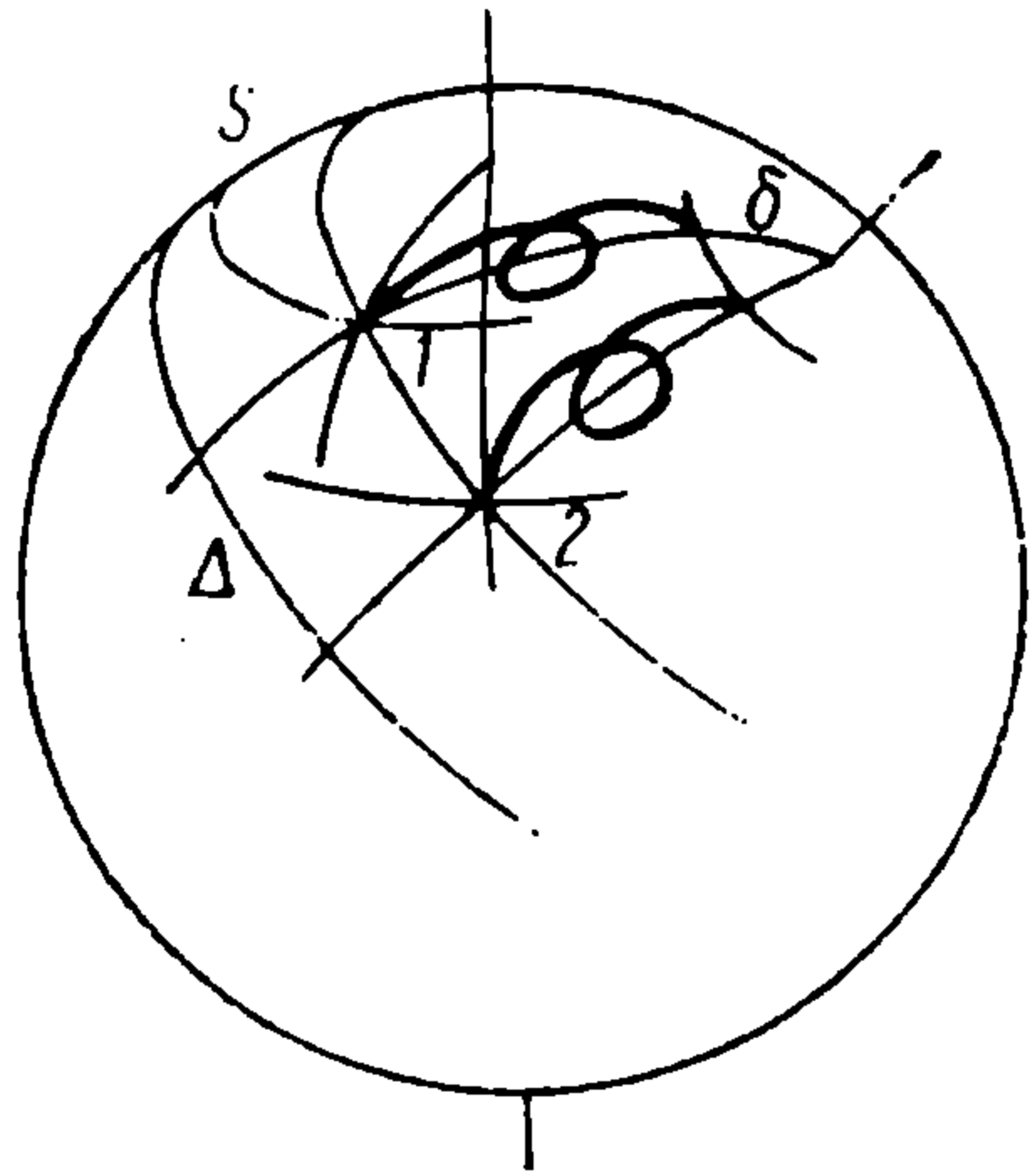
г) геодезические кривизны как функции пути $K_g(s)$, так как $K_g(s)$ уже задана параметрически функциями $K(t)$ и $s(t)$.

Последний пункт указывает на конгруэнтность.

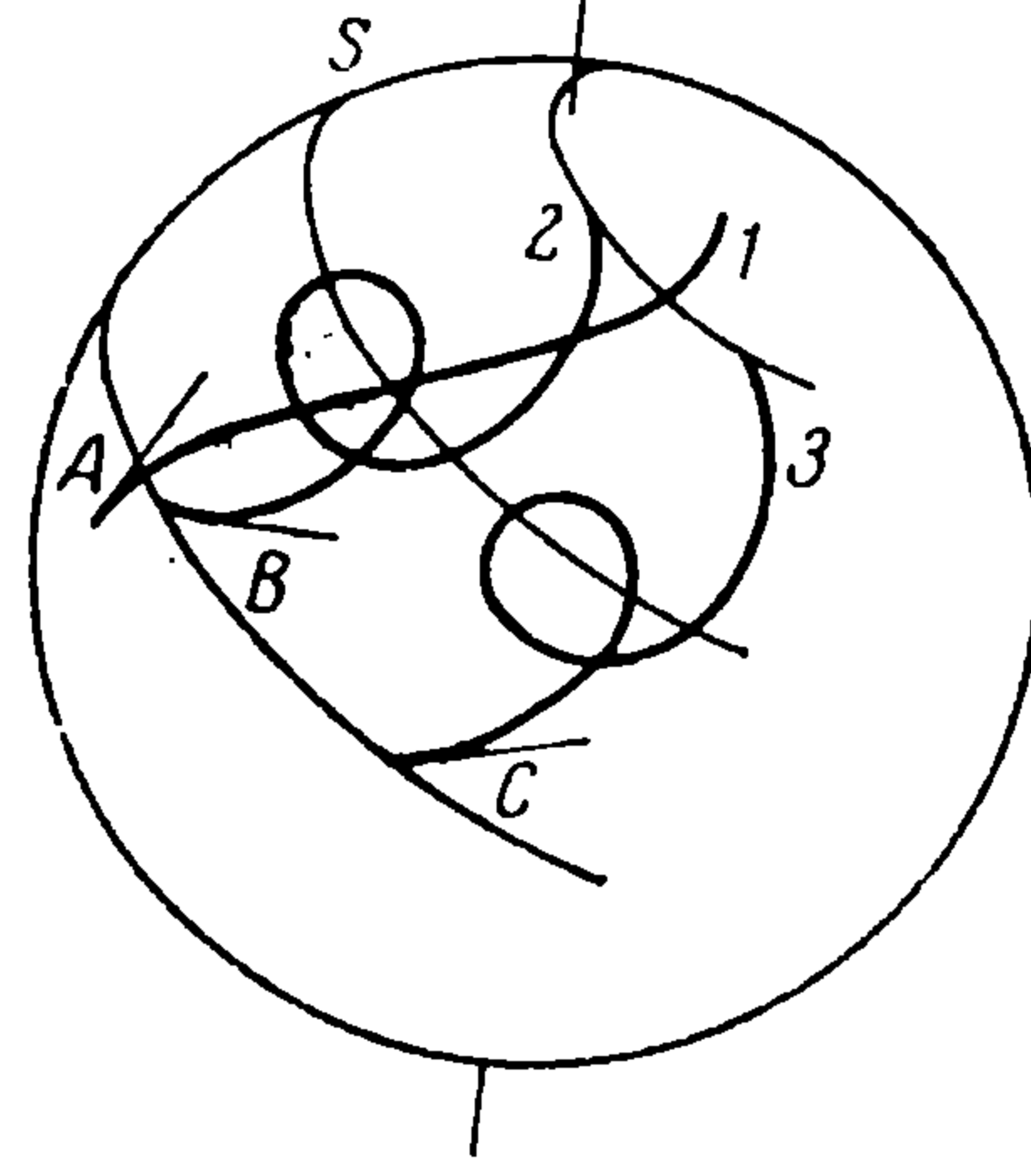


Фиг. 1

Из доказанного следует, что общее решение системы (1.1) при любой фиксированной паре функций $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ получается из любого частного решения путем записи его в произвольно повернутой сферической системе координат. Три постоянные, характеризующие этот поворот, играют роль трех произвольных постоянных общего решения.



Фиг. 2



Фиг. 3

Два близких частных решения (фиг. 2) получаются одно из другого поворотом на малый угол δ , зависящий лишь от различия начальных условий по φ , λ , ϑ , и угловое расстояние по большому кругу между любыми точками этих решений, соответствующими одинаковым временам, не превышает Δ . Очевидно, $\Delta = \delta$. Таким образом, речь идет, в определенном смысле, об устойчивости любого частного решения.

Для поставленной задачи из сказанного важно, что наличие ошибки в начальных условиях φ_0 , λ_0 , ϑ_0 не приводит к накапливающейся ошибке в определении текущего местоположения. Максимальная возможная ошибка не превосходит некоторого угла δ , зависящего лишь от начальной ошибки. Угол δ тем меньше, чем меньше начальная ошибка, и равен нулю, когда ошибки нет.

3. Чтобы использовать результаты предыдущего пункта в общем случае, когда и для компаса не выполнены необходимые начальные условия, докажем следующее утверждение.

Колеблющийся из-за невыполнения начальных условий компас своим трехгранником физически реализует трехгранник Дарбу сферической траектории той точки на сфере S , истинная вертикаль места которой в каждый момент коллинеарна компасной. Короче, оси компасного трехгранника в каждый момент параллельны соответствующим осям трехгранника Дарбу указанной траектории.

Если $\mathbf{r}_1(t)$ — единичный вектор оси z трехгранника Дарбу, то его ось x направлена по $\dot{\mathbf{r}}_1(t)$ и ось y направлена по $\mathbf{r}_1(t) \times \dot{\mathbf{r}}_1(t)$. Согласно уравнениям компаса [2-5], для компасного трехгранника имеет место $\omega_x = 0$, поэтому, если $\mathbf{r}_2(t)$ — единичный вектор оси z компасного трехгранника, то его ось x направлена по $\dot{\mathbf{r}}_2(t)$, а y — по $\mathbf{r}_2(t) \times \dot{\mathbf{r}}_2(t)$.

Для рассматриваемых трехгранников $\mathbf{r}_1(t) \equiv \mathbf{r}_2(t)$, откуда

$$\dot{\mathbf{r}}_1(t) \equiv \dot{\mathbf{r}}_2(t), \quad \mathbf{r}_1(t) \times \dot{\mathbf{r}}_1(t) \equiv \mathbf{r}_2(t) \times \dot{\mathbf{r}}_2(t)$$

Тем самым и доказана коллинеарность соответствующих осей.

Из доказанного непосредственно следует, что в общем случае на решающий прибор подаются $\omega_y(t)$ и $\omega_z(t)$ трехгранника Дарбу траектории, указанной в формулировке утверждения, и, согласно п. 2, этой траектории конгруэнта вычисляемая.

Таким образом, в общем случае, когда имеет место ошибка и в начальных условиях для компаса, и в начальных значениях $\varphi, \lambda, \vartheta$, о работе системы можно сказать следующее (фиг. 3). При движении основания по некоторой произвольной траектории A колеблющейся из-за невыполнения начальных условий компас выдает параметры ($\omega_y(t)$ и $\omega_z(t)$ трехгранника Дарбу) другой траектории B . Эту траекторию вычертил бы на сфере S вектор компасной вертикали, проведенной из центра сферы. Счетно-решающий прибор выдает текущие координаты траектории C , такой же, как и B , только повернутой на сфере S в соответствии с введенными начальными условиями по $\varphi, \lambda, \vartheta$. Эти начальные условия указывают, откуда и в каком направлении начинается траектория. В частности, можно сказать, что при любом маневрировании основания рассматриваемая система автономного определения координат не имеет иной накапливающейся ошибки, кроме той, которую может иметь компас в определении вертикали места.

4. В заключение приведем механическую аналогию для идеального гиригоризонткомпаса. Такая аналогия позволяет более наглядно представить себе поведение вертикали компаса при произвольном маневре основания и доказать устойчивость ее совпадения с вертикалью места в случае простых курсов.

Произвольный маневр основания по сфере S можно задать единичным вектором местной вертикали $r_1(t)$, проведенным из центра O° сферы S (фиг. 4). Поведение идеального гиригоризонткомпаса [на этом маневре полностью характеризуется единичным вектором компасной вертикали. Действительно, если $r_2(t)$ единичный вектор оси z компасного трехгранника, то в силу тождества $\omega_x = 0$ имеем для единичных векторов осей x и y выражения

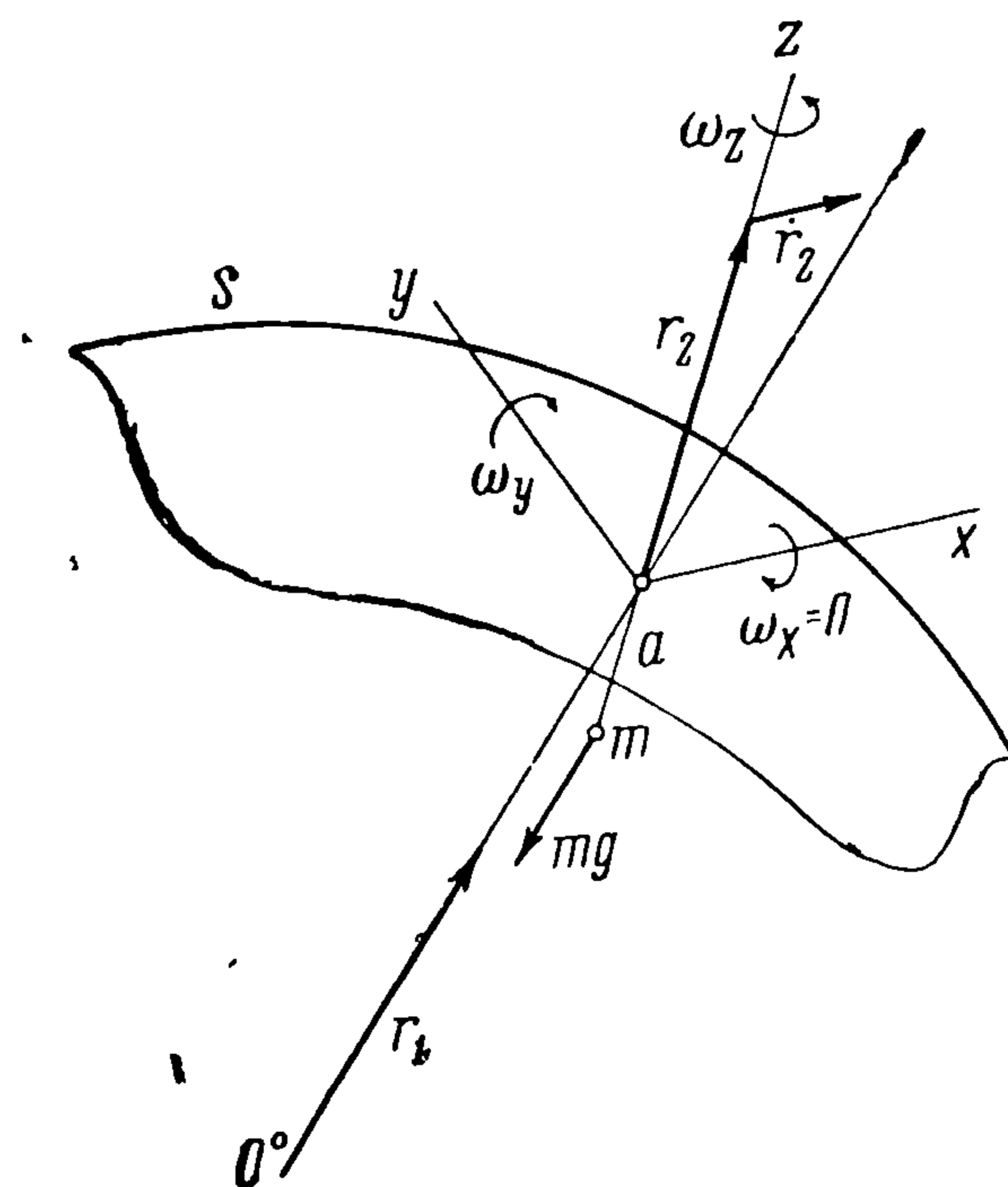
$$[x] = \frac{\dot{r}_2}{|\dot{r}_2|}, \quad [y] = \frac{r_2 \times \dot{r}_2}{|\dot{r}_2|} \quad (4.1)$$

угловые скорости компасного трехгранника

$$\omega_y = |\dot{r}_2|, \quad \omega_z = \frac{\ddot{r}_2 (r_2 \times \dot{r}_2)}{\dot{r}_2^2} \quad (4.2)$$

Таким образом, все величины, входящие в уравнения компаса

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(2B \cos \varepsilon) &= M_y, & \omega_x &= 0 \\ \omega_z 2B \cos \varepsilon &= -M_x, & \omega_y &= \frac{2B \cos \varepsilon}{amR} \end{aligned} \quad (4.3)$$



Фиг. 4

могут быть выражены через $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ и их производные.

Надо помнить, что M_x и M_y — моменты, создаваемые силами тяжести — $m g \mathbf{r}_1$ и инерционными — $m R \ddot{\mathbf{r}}_1$, т. е.

$$\mathbf{F} = -mR \left(\ddot{\mathbf{r}}_1 + \frac{g}{R} \mathbf{r}_1 \right)$$

и момент

$$\mathbf{M} = -a \mathbf{r}_2 \times \left[-mR \left(\ddot{\mathbf{r}}_1 + \frac{g}{R} \mathbf{r}_1 \right) \right] \quad (4.4)$$

После вычислений

$$M_x = -\frac{amR}{|\dot{\mathbf{r}}_2|} (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2) \cdot \left[\ddot{\mathbf{r}}_1 + \frac{g}{R} \mathbf{r}_1 \right], \quad M_y = \frac{amR}{|\dot{\mathbf{r}}_2|} \dot{\mathbf{r}}_2 \cdot \left[\ddot{\mathbf{r}}_1 + \frac{g}{R} \mathbf{r}_1 \right] \quad (4.5)$$

После подстановки (4.3) и (4.5) в (4.3) имеем

$$\begin{aligned} \frac{2B \cos \varepsilon}{amR} &= |\dot{\mathbf{r}}_2|, & \omega_x &= 0 \\ \frac{d}{dt} (2B \cos \varepsilon) &= \frac{amR}{|\dot{\mathbf{r}}_2|} \dot{\mathbf{r}}_2 \cdot \left[\ddot{\mathbf{r}}_1 + \frac{g}{R} \mathbf{r}_1 \right] \\ \frac{\ddot{\mathbf{r}}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2)}{\dot{\mathbf{r}}_2^2} 2B \cos \varepsilon &= \frac{amR}{|\dot{\mathbf{r}}_2|} (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2) \cdot \left[\ddot{\mathbf{r}}_1 + \frac{g}{R} \mathbf{r}_1 \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Исключая $2B \cos \varepsilon / amR$ из двух последних уравнений системы (4.6), сокращая и учитывая, что

$$|\dot{\mathbf{r}}_2| \frac{d|\dot{\mathbf{r}}_2|}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}}_2^2 = \dot{\mathbf{r}}_2 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_2$$

получим

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 \cdot \dot{\mathbf{r}}_1 = \left[\ddot{\mathbf{r}}_1 + \frac{g}{R} \mathbf{r}_1 \right] \cdot \dot{\mathbf{r}}_1$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 \cdot (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) = \left[\ddot{\mathbf{r}}_1 + \frac{g}{R} \mathbf{r}_1 \right] \cdot (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1)$$

Откуда вытекает следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 + \alpha \mathbf{r}_2 = \ddot{\mathbf{r}}_1 + \frac{g}{R} \mathbf{r}_1, \quad |\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2| = 1 \quad (4.7)$$

где α — реакция связи $|\dot{\mathbf{r}}_2| = 1$.

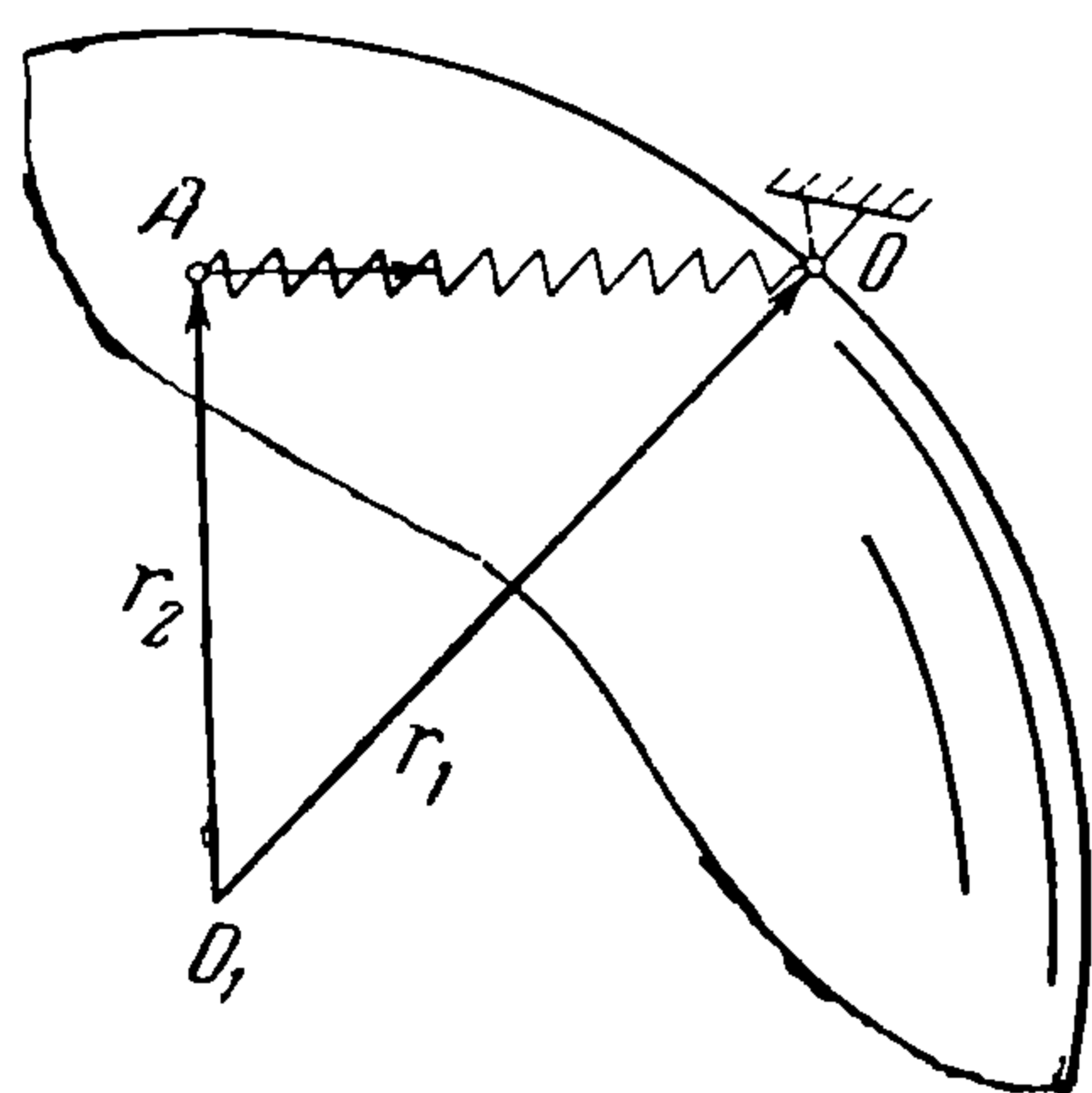
Рассмотрим теперь следующую механическую модель (фиг. 5). Материальная точка A единичной массы находится на единичной сфере и притягивается к другой точке O сферы пружинкой жесткости g/R . Точка O сферы неподвижна; O_1 — центр сферы.

Обозначим единичные вектора O_1O и O_1A соответственно через ρ_1 и ρ_2 , а вектор OA через ρ . Движение сферы определится вектором $\rho_1(t)$. Уравнение движения точки A имеет вид

$$\ddot{\rho} = -\frac{g}{R} \rho - \alpha_1 \rho_2$$

а так как $\rho = \rho_2 - \rho_1$, то

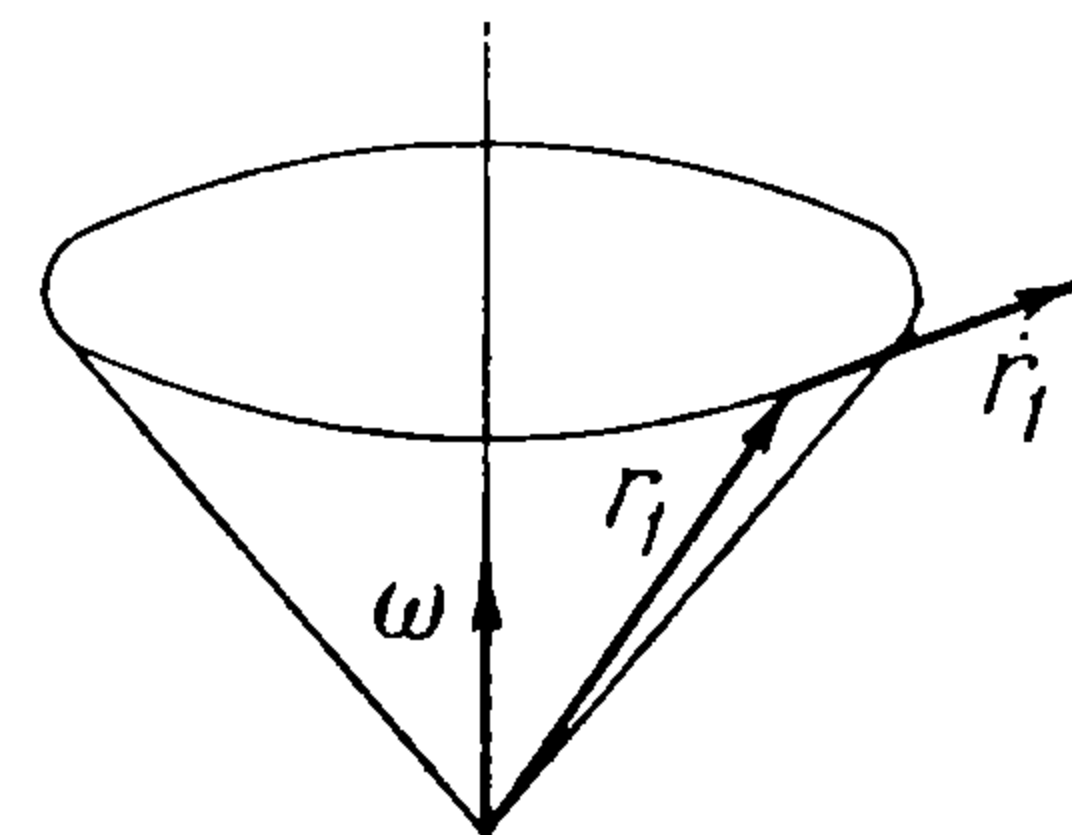
$$\ddot{\rho}_2 + \alpha \rho_2 = \ddot{\rho}_1 + \frac{g}{R} \rho_1 \quad (4.8)$$



Фиг. 5

Уравнение (4.8) совпадает с уравнением (4.7), причем ρ_1 является аналогом \mathbf{r}_1 , а ρ_2 аналогом \mathbf{r}_2 , поэтому на фиг. 5 употреблены символы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Таким образом, рассмотренная модель, представляющая собой маятник Шулера, является механическим аналогом идеального гироскопа.

По этой модели материальная точка находится в потенциальном поле и подчинена идеальной, но нестационарной связи. В частном случае простого курса (стоянка или движение по параллели с $V = \text{const}$) вектор $\mathbf{r}_1(t)$ равномерно поворачиваясь, описывает конус вращения (фиг. 6). В системе координат, вращающейся с определенной скоростью вокруг оси этого конуса, связь окажется стационарной, а поле сил останется потенциальным, так как к центральному полю добавится лишь поле центробежных сил, тоже имеющее потенциал, и кориолисовы силы, вообще не совершающие работы. Следовательно, в этом случае существует интеграл энергии. Этот интеграл можно получить непосредственно следующим образом. Введем вектор $\boldsymbol{\omega}$, такой что



Фиг. 6

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 \quad (4.9)$$

В общем случае $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 + \gamma \mathbf{r}_1$ при любых \mathbf{r}_1 и γ . Умножим (4.7) скалярно на вектор

$$\dot{\mathbf{r}}_2 - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2$$

Используя свойство (4.9) вектора $\boldsymbol{\omega}$ в результате получим

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left\{ [\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \boldsymbol{\omega}]^2 + \left(\frac{g}{R} - \boldsymbol{\omega}^2 \right) (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 + [\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]^2 \right\} + \boldsymbol{\omega} \cdot \{ (\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \} = 0 \quad (4.10)$$

Соотношение (4.10) справедливо при любом маневре $\mathbf{r}_1(t)$ и при любом $\boldsymbol{\omega}$, удовлетворяющем (4.9). Для простого курса в качестве $\boldsymbol{\omega}$ можно взять вектор, направленный по неподвижной оси конуса, описываемого \mathbf{r}_1 ; ввиду равномерности вращения $|\boldsymbol{\omega}| = \text{const}$, т. е. $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$. Выражение (4.10) при этом превращается в интеграл энергии

$$[\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \boldsymbol{\omega}]^2 + \left(\frac{g}{R} - \boldsymbol{\omega}^2 \right) (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 + [\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]^2 = \text{const} \quad (4.11)$$

доказывающий устойчивость решения $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(t)$ для всех $\boldsymbol{\omega}$ при $|\boldsymbol{\omega}| < \sqrt{g/R}$.

Поступила 30 V 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Об автономном определении местоположения движущегося объекта посредством пространственного гироскопического компаса, гироскопа направления и интегрирующего устройства. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 1.
2. Ишлинский А. Ю. К теории гироскопа. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
3. Ишлинский А. Ю. Теория дву гироскопической вертикали. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2.
4. Ишлинский А. Ю. Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, 1956, т. XX, вып. 3.
5. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГИТТЛ, М., 1955.