Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДВИЖЕНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Я. Л. Геронимус
(Харьков)

1. Будем рассматривать движение точки под действием так называемой гироскопической силы $\mathbf{F}$, т. е. силы, перпендикулярной к скорости $\mathbf{v}$ точки; будем предполагать, что эта сила может быть представлена в виде векторного произведения

$$\mathbf{F} = \mathbf{v} \times \mathbf{\Phi} \tag{1.1}$$

где вектор $\mathbf{\Phi}$ зависит только от координат точки.

В качестве конкретного примера рассмотрим движение электрона в магнитном поле под действием лоренцовой силы

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}, \qquad \mathbf{\Phi} = \frac{e}{c}\mathbf{H} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, e — заряд электрона, c — скорость света.

В качестве второго примера рассмотрим движение точки, притягиваемой к неподвижной оси с силой, пропорциональной расстоянию точки от этой оси, по отношению к системе отсчета, равномерно вращающейся относительно этой оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$; закон относительного движения таков

$$m\mathbf{w} = -k\mathbf{r} + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c, \qquad \mathbf{J}_e = m\mathbf{r}\omega^2, \qquad \mathbf{J}_c = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{r}$ — вектор, направленный по кратчайшему расстоянию от оси к точке, $\mathbf{J}_e$ — переносная (центробежная) сила инерции, $\mathbf{J}_c$ — кориолисова сила инерции. Если положить $k = m\omega^2$, то будем иметь

$$m\mathbf{w} = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \qquad \mathbf{\Phi} = 2m\boldsymbol{\omega}$$

Рассмотрим сперва некоторые общие свойства движения точки под действием гироскопической силы. Уравнение движения примем в виде

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \mathbf{\Phi} \tag{1.4}$$

причем масса $m = m(t, v)$ может быть переменной величиной, зависящей от времени t и скорости v. Имеем $\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}$, $v = ds/dt$, где $\boldsymbol{\tau}$ — орт касательной; отсюда легко находим

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(mv\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau}\frac{d(mv)}{dt} + mv\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$$

Так как $\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \mathbf{n}\dfrac{v}{\rho}$, то окончательно имеем

$$\boldsymbol{\tau}\frac{d(mv)}{dt} + \mathbf{n}\frac{mv^2}{\rho} = \mathbf{v} \times \mathbf{\Phi} \tag{1.5}$$

Умножая скалярно обе части равенства на вектор $\boldsymbol{\tau}$, получим

$$\frac{d}{dt}(mv) = 0$$

Отсюда вытекает закон сохранения скалярной величины количества движения

$$q = mv = \text{const} \tag{1.6}$$

Наоборот, из этого закона сохранения вытекает, согласно (1.5), что сила направлена по главной нормали к траектории. В частном случае, когда масса зависит только от скорости, из (1.6) вытекает, что движение равномерно и, следовательно, масса будет постоянной.

Пусть теперь, кроме гироскопической силы, на точку действует еще потенциальная сила $\mathbf{F}_0 = -\operatorname{grad} V_0$; имеем

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = -\operatorname{grad} V_0 + \mathbf{v} \times \mathbf{\Phi} \tag{1.7}$$

Умножая скалярно это равенство на вектор $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, получим

$$d\mathbf{r} \cdot \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{v} \cdot d(m\mathbf{v}) = -\operatorname{grad} V_0 \cdot d\mathbf{r} = -dV_0$$

Вводя обозначение

$$\int mvdv = \lambda \tag{1.8}$$

найдем

$$\mathbf{v} \cdot d(m\mathbf{v}) = d(\mathbf{v} \cdot m\mathbf{v}) - m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d(mv^2) - mvdv = d(mv^2) - d\lambda$$

Отсюда $d(mv^2 + V_0 - \lambda) = 0$. Таким образом, имеем закон сохранения

$$2T + V_0 - \lambda = h \qquad \left(T = \tfrac{1}{2} mv^2\right) \tag{1.9}$$

В случае постоянной массы $\lambda = {}^1/_2\, mv^2 = T$ и равенство (1.9) выражает закон сохранения механической энергии. В релятивистской механике

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \lambda = m_0 \int \frac{vdv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v_2}{c^2}} \tag{1.10}$$

в этом случае (1.9) выражает закон сохранения энергии электрона (см., например, Я. И. Френкель [2], гл. X)

$$h = mv^2 + V_0 - \lambda = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + V_0 = mc^2 + V_0 \tag{1.11}$$

2. Пусть теперь на точку действует любая заданная сила $\mathbf{F}_0$ и гироскопическая сила $\mathbf{F} = \mathbf{v} \times \mathbf{\Phi}$, причем $\mathbf{\Phi}$ — постоянный вектор; массу точки в этом параграфе также будем считать постоянной.

На основании (1.3) можем утверждать следующее: движение точки при наличии гироскопической силы такое же, как движение этой же точки относительно системы отсчета, равномерно вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = {}^1/(2m)\mathbf{\Phi}$ вокруг оси, совпадающей с вектором $\mathbf{\Phi}$, причем на эту точку вместо гироскопической силы действует сила притяжения к оси вращения, равная $-m\mathbf{r}\omega^2$.

Если вектор $\mathbf{\Phi}$ настолько мал, что можно пренебречь квадратом его модуля, то этой дополнительной силой можно пренебречь.

В частности, при движении электрона в магнитном поле имеем, как было сказано, $\mathbf{\Phi} = (e/c)\,\mathbf{H}$; величина $\boldsymbol{\omega} = (e/2cm)\,\mathbf{H}$ называется угловой скоростью Лармора (см., например, А. С. Компанеец [1], § 15).

В качестве иллюстрации рассмотрим движение точки в плоскости Oxy под действием центральной силы F_0 и гироскопической силы F, причем пусть ось Oz совпадает с постоянным направлением вектора $\mathbf{\Phi}$.

Пользуясь проекциями скорости и ускорения точки на радиус-вектор и на перпендикуляр к нему

$$v_r = \dot{r}, \qquad v_s = r\dot{\theta}, \qquad w_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \qquad w_s = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

находим проекции $F_r = r\Phi\dot{\theta}$, $F_s = -\dot{r}\Phi$ силы $\mathbf{F} = \mathbf{v} \times \mathbf{\Phi}$; уравнения движения таковы (2.1)

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_0 + r\dot{\theta}\Phi = F_0 + 2rm\omega\dot{\theta}, \qquad \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = -\dot{r}\Phi = -2m\dot{r}\omega$$

Из второго уравнения находим обобщенный интеграл площадей

$$\frac{d}{dt}[r^2(\dot{\theta} + \omega)] = 0, \qquad r^2(\dot{\theta} + \omega) = C \tag{2.2}$$

Определяя отсюда $\dot{\theta}$ и подставляя в первое уравнение (2.1), получим закон движения точки в радиальном направлении

$$m\ddot{r} = F_0 + \frac{mC^2}{r^3} - mr\omega^2 \tag{2.3}$$

Таким образом, он такой же, как если бы на точку, кроме центральной силы, действовала сила притяжения к центру, пропорциональная расстоянию от него, и сила отталкивания от него, обратно пропорциональная кубу этого расстояния.

Если центральная сила является функцией только этого расстояния и, таким образом, $F_0 = -\operatorname{grad} V_0$, то имеем

$$m\ddot{r} = -\operatorname{grad} V, \qquad V = V_0 + \frac{m}{2}\left(\frac{C}{r} + r\omega\right)^2 \tag{2.4}$$

Эти результаты могут принести пользу при изучении движения электрона в цилиндрическом магнетроне, у которого катод и анод являются соосными цилиндрами радиусов r_1 и r_2, а напряженность $\mathbf{H}$ магнитного поля направлена вдоль общей оси цилиндров; если φ_1 и φ_2 ($> \varphi_1$) — потенциалы катода и анода, то легко видеть, что потенциал V_0 электрического поля таков

$$V_0 = e\left[(\varphi_2 - \varphi_1)\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} + \varphi_1\right] \tag{2.5}$$

для исследования попадания на анод электронов, излучающихся с катода, применяем уравнение (2.3), в котором надо положить

$$F_0 = -\operatorname{grad} V_0 = -\frac{e(\varphi_2 - \varphi_1)}{\ln(r_2/r_1)}\frac{1}{r}, \qquad \omega = \frac{eH}{2cm} \tag{2.6}$$

Так как из (2.4) вытекает равенство $^1/_2 m\dot{r}^2 + V = \text{const}$, то отсюда легко получить условие того, чтобы траектории электронов, излучающихся с катода с радиальной скоростью v_0, касались анода: для этого должны иметь

$$^1/_2 mv_0^2 + V(r_1) = V(r_2)$$

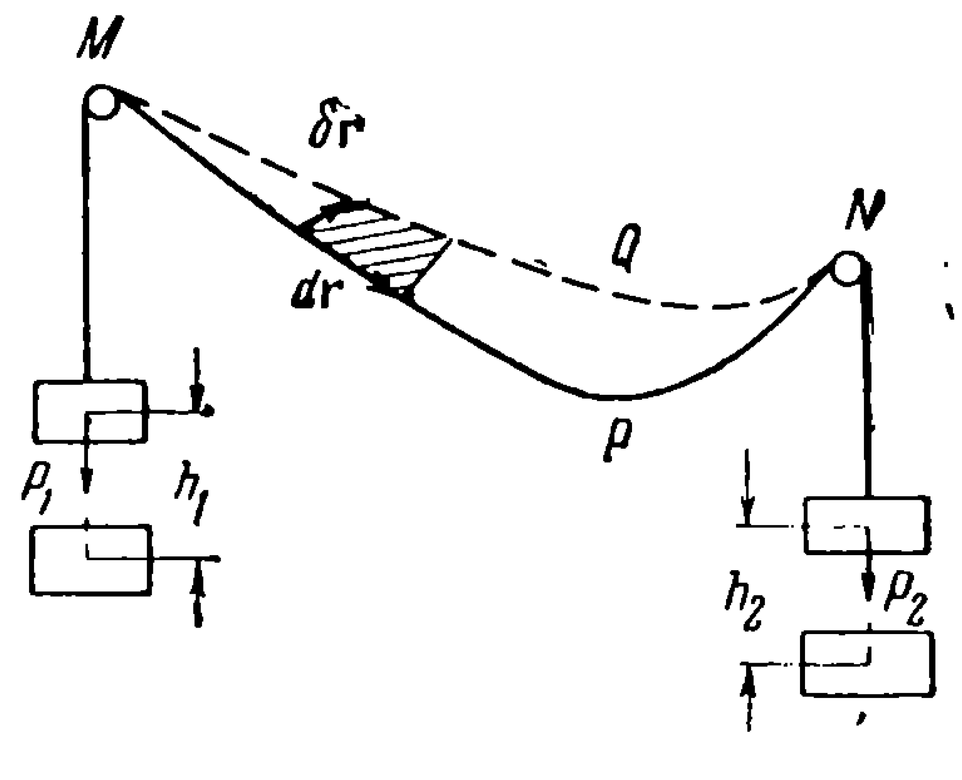
При этом по (2.2) имеем $C = r_1^2\omega = r_1^2 eH/2cm$.

3. Рассмотрим теперь одну простую электро-механическую аналогию. Рассмотрим идеально-гибкую нерастяжимую нить, на каждый элемент ds которой действует сила $\mathbf{F}_1 ds$; как известно, условие равновесия нити таково:

$$\frac{d}{ds}(\mu\tau) + \mathbf{F}_1 = 0 \tag{3.1}$$

где μ — скалярная величина натяжения нити; сопоставляем его с уравнением движения точки

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}$$



которое можно записать в такой форме:

$$\frac{d}{dt}(mv\boldsymbol{\tau}) = \frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}(mv\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{F}, \qquad \frac{d}{ds}(mv\boldsymbol{\tau}) = \frac{\mathbf{F}}{v}$$

Отсюда видно, что кривая, являющаяся равновесной формой нити, совпадает с траекторией точки, движущейся под действием силы $\mathbf{F} = -\mathbf{F}_1 v$; в частности, если сила действует по нормали к нити, то натяжение μ постоянно по величине и равно постоянному количеству движения точки.

Пусть $\mathbf{F}_1 = -\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\Phi}$ и пусть кривая MPN будет равновесной формой нити (фиг. 1); в точках M и N нить перекинута через бесконечно малые идеальные блоки и к свободным концам нити подвешены равные грузы $P_1 = P_2 = \mu$. Сообщим каждому элементу нити возможное перемещение $\delta\mathbf{r}$ и пусть нить займет новое положение MQN; элементарная работа силы $\mathbf{F}_1 ds$ такова

$$\mathbf{F}_1 ds \cdot \delta\mathbf{r} = -(\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\Phi}), \qquad \delta\mathbf{r} ds = (d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\Phi}, \qquad d\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau} ds \tag{3.2}$$

Если ввести вектор $d\mathbf{S} = d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}$, то его модуль $dS = |d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}|$ равен элементарной площадке dS, заштрихованной на фиг. 1, причем он направлен по нормали $\mathbf{n}$ к этой площадке; поэтому имеем

$$\mathbf{F}_1 ds \cdot \delta\mathbf{r} = d\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Phi} = \Phi_n dS$$

т. е. элементарная работа силы равна потоку вектора $\boldsymbol{\Phi}$ через элементарную площадку dS. Введем в рассмотрение вектор $\mathbf{A}$, определяемый в бесконечном пространстве своим вихрем и расхождением

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \boldsymbol{\Phi}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \tag{3.3}$$

(в частном случае движения электрона он только скалярным множителем отличается от вектор-потенциала магнитного поля). Находим сумму элементарных работ сил $\mathbf{F}_1 ds$ на возможных перемещениях

$$\Sigma \mathbf{F}_1 ds \cdot \delta\mathbf{r} = \iint_B \Phi_n dS = \iint_B \operatorname{rot}_n \mathbf{A}\, dS$$

где область B ограничена кривыми MPN и MQN; применяя теорему Стокса получим

$$\Sigma \mathbf{F}_1 ds \cdot \delta\mathbf{r} = \int_{MPN} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} ds - \int_{MQN} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = -\delta \int_{MPN} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$$

Сумма элементарных работ сил P_1 и P_2 такова

$$P_1 h_1 + P_2 h_2 = \mu \int_{MPN} ds - \mu \int_{MQN} ds = -\delta \int_{MPN} \mu\, ds$$

По принципу возможных перемещений алгебраическая сумма элементарных работ указанных сил должна равняться нулю

$$\delta \int_{MPN} (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mu)\, ds = 0 \tag{3.4}$$

Таким образом, кривая MPN, придающая стационарное значение интегралу

$$\int\limits_{M} (\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\tau}+\mu)\, ds$$

является: 1) равновесной формой нити под действием силы

$$\mathbf{F}_1 ds = -(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\Phi})\, ds, \qquad \boldsymbol{\Phi}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$$

причем нить перекинута через бесконечно малые идеальные блоки в точках M и N и к ее свободным концам привешены грузы $P_1=P_2=\mu$; 2) траекторией точки под действием гироскопической силы $\mathbf{F}=\mathbf{v}\times\boldsymbol{\Phi}$, причем количество движения точки $\mu=mv$ постоянно на основании п. 1 в предположении, что масса зависит только от скорости точки.

Рассмотрим в качестве иллюстрации задачу о фокусирующем магнитном поле: пусть напряженность поля $\mathbf{H}$ направлена параллельно оси Oz и пусть величина H является функцией одной координаты y — требуется подобрать эту функцию из того условия, чтобы траектории электронов, вышедших из заданной точки $M(x_1, 0)$ плоскости Oxy, проходили через заданную точку $N(x_2, 0)$ той же плоскости, причем $\mu=mv$ — заданная величина.

Соответствующая механическая задача такова: рассмотрим цилиндрическое полотнище, закрытое с боковых сторон, свободные концы которого перекинуты через горизонтальные ролики с осями, параллельными образующим, и с бесконечно малыми радиусами, причем к ним подвешены равные грузы $P_1=P_2=\mu$; найти закон, по которому должна изменяться плотность тяжелой неоднородной жидкости, налитой в этот сосуд, для того чтобы существовало бесчисленное множество форм равновесия полотнища.

4. Вернемся к траектории точки под действием потенциальной силы $\mathbf{F}_0$ и гироскопической силы $\mathbf{F}$. Не прибегая к аналогии с равновесной формой нити, покажем непосредственно, что траектория точки под действием этих сил отличается от всех прочих кривых, проходящих через две заданные точки, тем, что придает стационарное значение действию

$$S=\int\limits_{t_1}^{t_2} L dt \qquad (L=\lambda+\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}-V_0) \tag{4.1}$$

где L — функция Лагранжа; при этом заданы начальный и конечный моменты времени (t_1 и t_2) и в эти моменты движущаяся точка должна находиться в заданных точках. В релятивистской механике по (1.10):

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}-V_0 \tag{4.2}$$

В том частном случае, когда масса постоянна, а гироскопическая сила равна нулю, имеем $A=0$, $\lambda={}^1/_2 mv^2=T$, т. е. приходим к принципу наименьшего действия в форме Гамильтона—Остроградского.

Для доказательства составляем уравнения Эйлера для вариационной задачи

$$\delta\int\limits_{t_1}^{t_2} L dt=0 \tag{4.3}$$

Имеем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} + A_x\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\lambda}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial \dot{x}} + A_x\right) = \frac{d}{dt}\left(mv\,\frac{\dot{x}}{v} + A_x\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}(m\dot{x} + A_x) = -\frac{\partial V_0}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} = -\frac{\partial V_0}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -\frac{\partial V_0}{\partial x} + \dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = -\frac{\partial V_0}{\partial x} + v_y\Phi_z - v_z\Phi_y$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = -\operatorname{grad} V_0 + \mathbf{v}\times\mathbf{\Phi}$$

Из закона сохранения (1.9) имеем

$$\lambda = 2T + V_0 - h, \qquad L = \lambda + \mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - V_0 = 2T + \mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - h$$

Таким образом, считая массу функцией одной лишь скорости, можно исключить время; получим

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = W - h(t_2 - t_1)$$

Здесь положено

$$W = \int_{t_1}^{t_2}(mv^2 + \mathbf{A}\cdot\mathbf{v})\,dt, \qquad \text{или} \qquad W = \int_M^N (mv + A\cdot\boldsymbol{\tau})\,dt \tag{4.4}$$

Таким образом, траектория точки, движущейся под действием потенциальной и гироскопической сил, придает стационарное значение интегралу (4.4) по сравнению со всеми прочими кривыми, проходящими через заданные точки M и N; при этом надо положить

$$mv\,ds = mv\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,ds$$

а скорость v надо найти как функцию координат из закона сохранения (1.9) при заданном h. Если действует только гироскопическая сила, то $q = mv = \text{const}$ и снова придем к (3.4).

В релятивистской механике имеем по (1.11)

$$h = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + V_0$$

Отсюда

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{h - V_0}\right)^2}, \qquad mv = \frac{1}{c}\sqrt{(h - V_0)^2 - m_0^2c^4}$$

и, таким образом,

$$W = \int_M^N \left\{\frac{1}{c}\sqrt{(h - V_0)^2 - m_0^2c^4} + \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\right\}dt \tag{4.5}$$

Если положить $A = 0$, $h = m_0c^2 + h_1$ и затем $c \to \infty$, то придем к принципу наименьшего действия в форме Мопертюи — Эйлера.

Поступила 23 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Компанеец А. С. Теоретическая физика. ГТТИ, 1957.
2. Френкель Я. И. Электродинамика. ГТТИ, 1934, т. I.