Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев

(Горький)

В аналитической механике неголономных систем существенную роль играют так называемые перестановочные соотношения [1—10, 14, 21], под которыми обычно понимают выражения, содержащие операции $d\delta$ и δd, где d — дифференцирование по времени, а δ — виртуальное варьирование. Существуют два вида перестановочных соотношений, соответствующих двум различным точкам зрения на коммутативность операций d и δ при наличии неинтегрируемых кинематических связей. Согласно одной точке зрения (которой придерживается, например, Вольтерра и Гамель), перестановочность операций d и δ имеет место для всех истинных координат $q_1, \ldots, q_n$, независимо от того, является ли система голономной или неголономной. Согласно другой точке зрения (Суслов, Леви-Чивита и Амальди), переместимость операций d и δ имеет место лишь для голономных систем.

Для неголономных систем соотношение

$$d\delta q_\tau - \delta d q_\tau = 0 \tag{0.1}$$

принимается только для тех обобщенных координат, вариации которых (в соответствии с уравнениями неголономных связей) можно считать независимыми; для остальных координат перестановочные соотношения выводятся, исходя из уравнений неголономных связей, и оказываются отличными от (0.1). Эта вторая точка зрения получила всеобщее признание [1], и многие ее приверженцы считают первую точку зрения ошибочной [7—13]. Гамель [14] заметил, что обвинение в ошибке не бесспорно, и предложил способ использования перестановочных соотношений, при котором первая точка зрения не приводит к противоречию. Вместе с тем Гамель не дал обоснования своему рассуждению.

В вопрос о перестановочных соотношениях была внесена ясность в работе [15], где показано, что при надлежащем подходе обе точки зрения верны и не противоречат, как полагали, одна другой. Выяснилось, что противоречие возникает из-за отсутствия определения исходных понятий, т. е. операций $d\delta$ и δd, содержащихся в перестановочных соотношениях. В самом деле, величина $\dot q_\tau$ определена только на кривой движения, а операция δ представляет собой варьирование в направлении, вообще говоря, отличном от направления действительного перемещения. Таким образом, нужно с самого начала определить, что́ понимается под операциями d, δ, $d\delta$ и δd. Заметим, что эти операции достаточно определить на произвольной кривой $q_i = q_i(t)$ действительного или кинематически возможного движения, причем в связи именно с данной кривой. Определение операций d и δ эквивалентно заданию векторных полей, соответствующих указанным операциям [15, 16].

§ 1. Некоторые определения. В механике операция d представляет собою дифференцирование по времени, поэтому она определена лишь для точек $q_i = q_i(t)$ кривой движения системы. Операции d можно поставить в соответствие поле векторов с компонентами $\dot q_1 dt, \ldots, \dot q_n dt$.

---

[1] В работе [24] В. И. Киргетова перестановочные соотношения (0.1) принимаются также не для всех обобщенных координат.

Под виртуальным варьированием δ понимается любая из бесчисленного множества операций, для которых соответствующие векторы суть виртуальные перемещения системы, т. е. всевозможные линейные комбинации m линейно независимых векторов $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_m$, получаемых определенным образом по кинематическим связям системы. В силу этого операция δ определена во всех точках пространства конфигураций.

Из сказанного следует, что в точках произвольной (действительной или кинематически возможной) траектории операция $d\delta$ определена, но операция δd не определена. Следовательно, нужно доопределить операцию d так, чтобы операция δd приобрела смысл. При этом весьма существенно заметить, что операции d и δ вне кривой движения $q_i = q_i(t)$ могут быть определены как угодно, но на этой кривой они должны совпадать с операциями дифференцирования по времени и, соответственно, виртуального варьирования, так как требуется сохранение правильности уравнений Даламбера—Лагранжа.

Среди бесчисленного множества мыслимых способов доопределения операций d и δ (с сохранением их обычного смысла на кривой движения) укажем на следующий: введем в окрестности рассматриваемого движения $q_i = q_i(t)$ систему криволинейных координат $q_i = q_i(u_1, \ldots, u_n)$ такую, что линия $u_2 = u_3 = \ldots = u_n = 0$ является кривой движения; параметр u_1 на этой линии совпадает с временем t; плоскости, касательные к поверхностям $u_{m+1} = \ldots = u_n = 0$ в точках $u_2 = u_3 = \ldots = u_n = 0$, являются плоскостями виртуальных перемещений системы.

Предположим для определенности, что уравнения кинематических связей являются линейными и однородными вида (1.2). В окрестности кривой $q_i = q_i(t)$ определим

$$\begin{aligned} &dq_\tau = \frac{\partial q_\tau}{\partial u_1} du_1, \qquad \delta q_\tau = \frac{\partial q_\tau}{\partial u_r} \delta u_r \qquad (\tau = 1, \ldots, m + k; \ r = 1, \ldots, m) \\ &dq_\tau = a_{\tau s}\, dq_s, \qquad \delta q_\tau = a_{\tau s}\, \delta q_s \qquad (\tau = m + k + 1, \ldots, n; \ s = 1, \ldots, m) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь и в дальнейшем по дважды повторяющимся индексам производится суммирование; m — число степеней свободы; k — фиксированное целое число ($0 \leqslant k \leqslant n - m$); индексы пробегают следующие значения:

$$r, s, l = 1, \ldots, m; \ i = 1, \ldots, n; \ j = m + 1, \ldots, n; \ \rho = m + 1, \ldots, m + k$$

$$\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu = 1, \ldots, m + k; \ \sigma = m + k + 1, \ m + k + 2, \ldots, n$$

При значениях $u_2 = u_3 = \ldots = u_n = 0$ операция d совпадает с дифференцированием по времени, а операция δ — с виртуальным варьированием. Согласно введенному определению, переместимость операций d и δ будет выполняться лишь для значения $\tau = 1, \ldots, m + k$, а перемещения dq_τ и δq_τ совместимы со связями в окрестности кривой движения для всех значений τ, кроме $\tau = m + 1, \ldots, m + k$.

Для неголономной системы со связями

$$\dot{q}_j = a_{js}\dot{q}_s \tag{1.2}$$

введем квазикоординаты $\pi_1, \ldots, \pi_{m+k}$ при помощи соотношений

$$\dot{\pi}_r = a_{rs}\dot{q}_s, \qquad \dot{\pi}_\rho = a_{\rho s}\dot{q}_s - \dot{q}_\rho \tag{1.3}$$

В соответствии с (1.1) — (1.3) получаем следующие перестановочные соотношения:

$$d\delta q_\lambda - \delta d q_\lambda = 0, \quad d\delta\pi_\lambda - \delta d\pi_\lambda = \gamma_{\nu\lambda\mu}\, d\pi_\mu \delta\pi_\nu, \quad d\delta q_\sigma - \delta d q_\sigma = B_{rs}^{\sigma} d q_r \delta q_s \quad (1.4)$$

где

$$\gamma_{\nu\lambda\mu} = b_{\alpha\nu} b_{\beta\mu}\left(\frac{\partial a_{\lambda\alpha}}{\partial q_\beta} - \frac{\partial a_{\lambda\beta}}{\partial q_\alpha}\right), \qquad b_{\alpha\lambda} a_{\lambda\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad \begin{pmatrix}\delta_{\alpha\beta} \text{ — символ} \\ \text{Кронекера}\end{pmatrix} \quad (1.5)$$

$$B_{rs}^{\sigma} = \frac{\partial a_{\sigma s}}{\partial q_r} + \frac{\partial a_{\sigma s}}{\partial q_j} a_{jr} - \frac{\partial a_{\sigma r}}{\partial q_s} - \frac{\partial a_{\sigma r}}{\partial q_j} a_{js} \quad (1.6)$$

Две точки зрения на перестановочные соотношения, о которых упоминалось выше, соответствуют $k = n - m$ и $k = 0$.

§ 2. Различные формы уравнений движения неголономных систем и перестановочные соотношения. Используя перестановочные соотношения (1.4), можно получить такую форму записи уравнений движения неголономных систем, из которой, в частности, получаются как уравнения в квазикоординатах Больцмана — Гамеля, так и уравнения в истинных координатах Воронца и Чаплыгина.

Преобразуем уравнение Даламбера — Лагранжа к виду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right) - \delta T + \frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\left(\delta\dot q_i - \frac{d}{dt}\delta q_i\right) = Q_i \delta q_i \quad (2.1)$$

Подставляя в (2.1) первое и третье из соотношений (1.4), получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right) - \delta T - \frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma} B_{rs}^{\sigma}\dot q_r \delta q_s = Q_i \delta q_i \quad (2.2)$$

Согласно (1.2) и (1.3), вариации координат и квазикоординат связаны соотношениями

$$\delta q_\lambda = b_{\lambda\nu}\delta\pi_\nu, \quad \delta q_\sigma = a_{\sigma s}\delta q_s = a_{\sigma s} b_{s\nu}\delta\pi_\nu, \quad (b_{\lambda\nu} a_{\nu\mu} = \delta_{\lambda\mu}) \quad (2.3)$$

Введем функцию

$$T^*(q_i, \dot\pi_\nu) = T(q_i, b_{\lambda\nu}\dot\pi_\nu, a_{\sigma s} b_{s\nu}\dot\pi_\nu) \quad (2.4)$$

которая получается из выражения кинетической энергии $T(q_i, \dot q_i)$ путем исключения обобщенных скоростей $\dot q_{m+k+1}, \dot q_{m+k+2}, \ldots, \dot q_n$ при помощи соотношений (1.2) и замены $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_{m+k}$ на $\dot\pi_1, \dot\pi_2, \ldots, \dot\pi_{m+k}$ из соотношений (1.3). Переходя в (2.2) к квазикоординатам, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot\pi_\nu}\delta\pi_\nu\right) - \delta T^* - \frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma} B_{rs}^{\sigma} \dot q_r b_{s\nu}\delta\pi_\nu = \Pi_\nu \delta\pi_\nu$$

или после преобразований с использованием второго равенства (1.4)

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot\pi_\nu} - \frac{\partial T^*}{\partial q_\lambda} b_{\lambda\nu} - \frac{\partial T^*}{\partial q_\sigma} a_{\sigma s} b_{s\nu} + \gamma_{\nu\lambda\mu}\frac{\partial T^*}{\partial \dot\pi_\lambda}\dot\pi_\mu - \frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma} B_{rs}^{\sigma}\dot q_r b_{s\nu} - \Pi_\nu\right)\delta\pi_\nu = 0$$

Согласно условиям неголономных связей, $\delta\pi_{m+1} = \delta\pi_{m+2} = \ldots$ $\ldots = \delta\pi_{m+k} = 0$. Ввиду независимости вариаций $\delta\pi_l$ оставшаяся сумма распадается на m уравнений вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot\pi_l} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_l} + \gamma_{l\lambda\mu}\frac{\partial T^*}{\partial \dot\pi_\lambda}\dot\pi_\mu - B_{rs}{}^{\sigma}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma}\dot q_r b_{sl} = \Pi_l \quad (2.5)$$

Здесь

$$\frac{\partial T^*}{\partial \pi_l} = \frac{\partial T^*}{\partial q_\lambda} b_{\lambda l} + \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} a_{\sigma s} b_{sl}. \tag{2.6}$$

Полученные уравнения (2.5) являются типом уравнений движения неголономных систем, промежуточным между уравнениями Больцмана — Гамеля в квазикоординатах и уравнениями Чаплыгина — Воронца.

В самом деле, при $k = n - m$ члены

$$B_{rs}^{\sigma} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{q}_r b_{sl}$$

пропадают и уравнения (2.4) совпадают с уравнениями Больцмана — Гамеля [4, 17].

При $k = 0$ уравнения (2.5) являются уравнениями Чаплыгина — Воронца. Эти уравнения записываются в истинных координатах, поэтому в соотношениях (2.3) следует положить $a_{sl} = b_{sl} = \delta_{sl}$. Отсюда и из (1.5) следует, что $\gamma_{l\lambda\mu} = 0$.

Кроме того, при $k = 0$ функция T^*, согласно (2.4), превращается в функцию $T^\circ = T^\circ(q_i, \dot{q}_i)$, используемую обычно при составлении уравнений Воронца. Таким образом приходим к уравнениям

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^\circ}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T^\circ}{\partial q_j} a_{jl} - B_{rl}^{j} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_r = \Pi_l \tag{2.7}$$

совпадающим с уравнениями П. Воронца [1].

Для неголономных систем Чаплыгина эти уравнения совпадают с известными уравнениями [18] Чаплыгина.

§ 3. Различные формы принципа стационарного действия и перестановочные соотношения. Согласно принципу стационарного действия Гамильтона, для действительного движения динамической системы выполняется уравнение

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A)\, dt = 0 \tag{3.1}$$

где δT — виртуальная вариация кинетической энергии системы, δA — виртуальная работа приложенных сил. Обычно этот принцип формулируется для голономных систем. Относительно его применения к неголономным системам до сих пор не существует единой точки зрения: одни авторы (например, Аппель [20]) считают, что принцип Гамильтона (3.1) нельзя применять к неголономным системам, другие (например, Гамель [22]) придерживаются противоположной точки зрения (С. А. Чаплыгин указал на применимость принципа Гамильтона к неголономным системам, допускающим приводящий множитель).

Между тем, здесь возможен общий подход, так как применимость принципа стационарного действия к неголономным системам тесно связана с вопросом о перестановочных соотношениях.

В самом деле, проинтегрируем исходное уравнение (2.1) в пределах между начальным и конечным положениями системы. При условии равенства нулю вариаций на концах интервала интегрирования получаем выражение

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta T + \delta A + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{dt} \delta q_i - \delta \dot{q}_i \right) \right] dt = 0 \tag{3.2}$$

которое можно рассматривать как исходную, общую формулировку принципа стационарного действия. Из (3.2) следует, что частная форма принципа будет зависеть от принятия тех или иных перестановочных соотношений. Так, форма записи (3.1) соответствует перестановочным соотношениям (1.4) при $k = n - m$ и, согласно предыдущему, непосредственно приводит к уравнениям Больцмана — Гамеля.

Примечание. П. Воронец [1] предложил способ получения уравнений движения консервативных неголономных систем, исходя из формы (в принятых здесь обозначениях)

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta (\widetilde{T} + U) + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta (\dot{q}_j - a_{js}\dot{q}_s)]\, dt = 0 \tag{3.3}$$

при условии перестановочности операций d и δ для всех истинных координат. Несмотря на внешнее отличие (3.3) от (3.1), обе эти формы являются следствием принятия одних и тех же перестановочных соотношений, поэтому одно выражение сводится к другому. В самом деле, принимая в качестве первых m квазикоординат истинные координаты, имеем

$$\delta T^* = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_s} \delta \dot{\pi}_s + \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} \delta \dot{\pi}_j + \frac{\partial T^*}{\partial q_i} \delta q_i = \delta \widetilde{T} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta (\dot{q}_j - a_{js}\dot{q}_s)$$

Подставляя это в (3.1), получаем выражение (3.3) П. Воронца.

Поступила 21 III 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронец П. Об уравнениях движения для неголономных систем. Матем. сб., 1901, т. XXII, вып. 4.
2. Kirchhoff G. Vorlesungen über Matematische Physik. Mechanik, Leipzig, 1883.
3. Volterra V. Sopra una classe di equazioni dinamiche. Atti Reale Accad. Scienze Torino, 1898, № 33.
4. Hamel G. Die Lagrange — Eulirschen Gleichungen der Mechanik. Z. Math. und Phys. 1904, bd. 50.
5. Добронравов В. В. Аналитическая динамика в неголономных координатах. Уч. зап. МГУ. Механика, 1948, т. 2, вып. 122.
6. Poincarê H. Sur une forme nouvelle des equations de la mecanique. Paris, G. R. 1901, vol. 132.
7. Prange G. Encyklopadie der Mathematische Wissenschaft, Band IV, Heft 4. 1935.
8. Суслов К. Г. Теоретическая механика. Гостехиздат, 1946.
9. Геронимус Я. Л. Очерки о работах корифеев русской механики. М., 1952.
10. Леви-Чивита I. и Амальди. Курс теоретической механики, т. 2, ч. 1. ИИЛ, 1951.
11. Неймарк Ю. И. и Фуфаев Н. А. Об ошибке В. Вольтерра, допущенной им при выводе уравнений движения неголономных систем. ПММ, 1951, т. XV, вып. 5.
12. Добронравов В. В. О некоторых вопросах механики неголономных систем. ПММ, 1952, т. XVI, вып. 6.
13. Неймарк Ю. И. и Фуфаев Н. А. Замечания к статье В. В. Добронравова. ПММ, 1953, т. XVI, вып. 2.
14. Hamel G. Theoretische Mechanik, Berlin, 1949.
15. Неймарк Ю. И. О перестановочных соотношениях в механике. Тр. ГИФТИ и радиофизического факультета ГГУ, т. XXXV, серия физическая, 1957, Москва—Горький.
16. Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. Гостехиздат, М.— Л., 1947.
17. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. ОНТИ, М.— Л., 1947.
18. Чаплыгин С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. Тр. отд. физ. наук Общ-ва любителей естествознания, 1897, т. IX.
19. Beltrami E. Sulle equarzioni dinamiche di Lagrange. Rend. Ist. lombardo, 1895, ser. 11, vol. XXVIII, Milano.
20. Appell P. Traité de Mécanique Rationelle. II, Paris, 1911.
21. Johnsen L. Dynamique générale des systémes non-holonomes. Oslo, 1941.
22. Hamel G. Das Hamiltonsche Prinzip bei nichtholonomen Systemen. Math. Ann., 1935, bd. 111, Heft 1, Berlin.
23. Киргетов В. И. О перестановочных соотношениях в механике. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.