Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Е. А. Барбашин

(Свердловск)

Указываются способы выбора параметров на входе линейной системы обеспечивающие переход системы в заданное начальное состояние с последующим приближенным осуществлением заданного процесса.

§ 1. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$L(x) = x^{(n)} + a_1(t)\,x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\,x = c_1u_1(t) + \ldots + c_mu_m(t) \qquad (1.1)$$

где $a_1(t),\ldots, a_n(t)$ — непрерывные функции времени при $t\geqslant 0$, $u_1(t),\ldots, u_m(t)$ — заданная система линейно независимых функций; $c_1,\ldots, c_m$ — постоянные параметры, которые в определенных пределах можно выбирать.

Пусть при $t=0$ задана система чисел $x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}$ и пусть при $0\leqslant t\leqslant T$, $0< T\leqslant\infty$, задана функция $f(t)$. Поставим две задачи.

1) Найти систему параметров c_i такую, чтобы решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$x(0) = x_0, \qquad x'(0) = x_0', \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)} \qquad (1.2)$$

удовлетворяло бы при $t = t_0 > 0$ условиям

$$x(t_0) = f(t_0), \qquad x'(t_0) = f'(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = f^{(n-1)}(t_0) \qquad (1.3)$$

2) Найти систему параметров c_i такую, чтобы решение $x(t)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.3), аппроксимировало бы на множестве $t_0\leqslant t\leqslant T$ заданную функцию $f(t)$.

Если решать обе задачи вместе, то это будет означать, что ищутся кусочно постоянные функции $c_i(t)$, меняющие свое значение при $t = t_0$ и обеспечивающие переход за время t_0 системы в заданное состояние с последующим приближенным осуществлением заданного процесса $f(t)$. За промежуток времени $0\leqslant t\leqslant t_0$ будет происходить переходный процесс, начиная с момента t_0 новый набор параметров c_i должен максимально точно приблизить решение $x(t)$ уравнения (1.1) к заданной функции $f(t)$.

При решении первой задачи будем стремиться искать наименьшее t_0, при котором поставленная краевая задача имеет решение. При решении первой и второй задачи будем помнить также, что в реальных условиях парметры c_i нельзя выбирать произвольно, так как они ограничены конструктивными особенностями изучаемой системы. Эти обстоятельства ставят первую задачу в разряд задач оптимального регулирования по быстродействию. Н. Н. Красовский [1] первый обратил внимание на возможность применения к указанному кругу задач L-проблемы М. Крейна, которая используется в данной работе. Заметим еще, что поиск оптимального управления в форме тригонометрического многочлена был проведен Н. Н. Красовским в работе [2].

Вторая задача есть задача теории приближений, ей посвящены, в частности, работы Р. Куликовского [3, 4]. В данной статье, в отличие от указанных работ, избран другой способ решения этой задачи. Следуя идее работ [5, 6], можно избегнуть вычислительных трудностей, заменяя задачу наилучшего приближения функции $f(t)$ задачей отыскания таких параметров c_i, при которых функция $f(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) с минимальной ошибкой.

Пусть $w_1(t, \tau), \ldots, w_n(t, \tau)$ — линейно независимая система решений уравнений (1.1), удовлетворяющих условиям

$$\left.\frac{d^k w_i(t, \tau)}{dt^k}\right|_{t=\tau} = \delta_{i,\,k+1} \qquad (\delta_{i,\,k+1} \text{ — символ Кронекера}) \tag{1.4}$$

Решение уравнения (1 1), удовлетворяющее условиям (1.2), может быть представлено в форме [7]

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} w_k(t, 0)\, x_0^{(k-1)} + \sum_{i=1}^{m} c_i \int_0^t w_n(t, \tau)\, u_i(\tau)\, d\tau \tag{1.5}$$

Пусть

$$y_i(t) = \int_0^t w_n(t, \tau)\, u_i(\tau)\, d\tau \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.6}$$

нетрудно подобрать функции $u_i(\tau)$ таким образом, чтобы система $m + n$ функций $w_1(t, 0), \ldots, w_n(t, 0), y_1(t), \ldots, y_m(t)$ была линейно независимой.

Для обоснования постановки задачи отвлечемся от основной цели исследований и попробуем подобрать параметры c_i и начальные данные $x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}$ таким образом, чтобы решение уравнения (1.1)

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} w_k(t, 0)\, x_0^{(k-1)} + \sum_{i=1}^{m} c_i y_i(t) = \sum_{i=1}^{m+n} b_i z_i(t) \tag{1.7}$$

Здесь

$$a_i = x_0^{(i-1)}, \quad z_i(t) = w_i(t, 0) \quad \text{при } 1 \leqslant i \leqslant n$$

$$a_i = c_{i-n}, \quad z_i(t) = y_{i-n}(t) \quad \text{при } n < i \leqslant m$$

было бы наилучшим приближением заданной функции $f(t)$ на отрезке $[0, T]$.

Если ищется наилучшее приближение в пространстве L_2, т. е. требуется, чтобы величина

$$H^2 = \int_0^T (x(t) - f(t))^2\, dt$$

была наименьшей, то из теории среднеквадратичных приближений [4,8] следует, что начальные данные и параметры можно найти из системы

$$\sum_{k=1}^{m+n} (z_i, z_k)\, b_k = (z_i, f) \qquad (i = 1, \ldots, m + n) \tag{1.8}$$

Здесь

$$(z_i, z_k) = \int_0^T z_i(t)\, z_k(t)\, dt, \qquad (z_i, f) = \int_0^T z_i(t)\, f(t)\, dt$$

При указанном выборе b_k будем иметь

$$H^2 = \frac{\Gamma(z_1, \ldots, z_{n+m}, f)}{\Gamma(z_1, \ldots, z_{n+m})}$$

где в числителе и знаменателе стоят определители Грамма соответствующих систем функций.

Задача значительно усложняется, если искать наилучшее приближение в пространстве C, т. е. требовать минимальность величины

$$h = \max |x(t) - f(t)| \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

Теория равномерных или чебышевских приближений не дает способов, эквивалентных по простоте выше описанному способу отыскания b_k.

Обозначим через $x_1(t)$ решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям

$$x_0^{(k)}(t_0) = f^{(k)}(t_0) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Очевидно имеем

$$|x(t) - f(t)| \leqslant |x(t) - x_1(t)| + |x_1(t) - f(t)|$$

Так как

$$x(t) - x_1(t) = \sum_{k=1}^{n} w_k(t, t_0)\,(x^{(k-1)}(t_0) - f^{(k-1)}(t_0))$$

то решение задачи можно провести двумя этапами. На первом этапе постараемся уничтожить различие между истинным и желаемым начальными состояниями системы (т. е. осуществляем переходный процесс). На втором этапе, выбирая новые значения параметров, попытаемся уменьшить различие между протекаемым $x(t)$ и желательным $f(t)$ процессами. Указанные этапы как раз и соответствуют поставленным выше первой и второй задачам.

Отметим еще, что управление $c_1u_1(t) + \ldots + c_mu_m(t)$, которое мы ищем, может быть и не представленным как явная функция t. В самом деле, очевидно функция $c_1u_1 + \ldots + c_mu_m(t)$ удовлетворяет некоторому линейному уравнению $L_1(u) = 0$ порядка m. Задачу отыскания параметров c_i можно трактовать в этом случае как задачу отыскания оптимальных начальных данных для решения указанного уравнения.

§ 2. Приступим к решению первой задачи, не накладывая пока ограничения на c_i. Проведя в (1.1) замену переменной $z = x - f(t)$, получим уравнение (2.1)

$$L(z) = z^{(n)} + a_1(t)z^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)z = c_1u_1(t) + \ldots + c_mu_m(t) - L(f(t))$$

Учитывая начальные условия (1.2) и формулы (1.5), (1.6), решение уравнения (2.1) можно записать следующим образом:

$$z(t) = \sum_{i=1}^{m} c_iy_i(t) - r(t) \qquad \left(r(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} w_k(t, 0)\,x_0^{(k-1)}\right) \tag{2.2}$$

Это решение при $t = 0$ удовлетворяет условиям

$$^{(k)}(0) = x_0^{(k)} - f^{(k)}(0) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{2.3}$$

Продифференцировав (2.2) $n-1$ раз, получим

$$z^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{m} c_iy_i^{(k)}(t) - r^{(k)}(t) \qquad (k = 0, 1; \ldots, (n-1)) \tag{2.4}$$

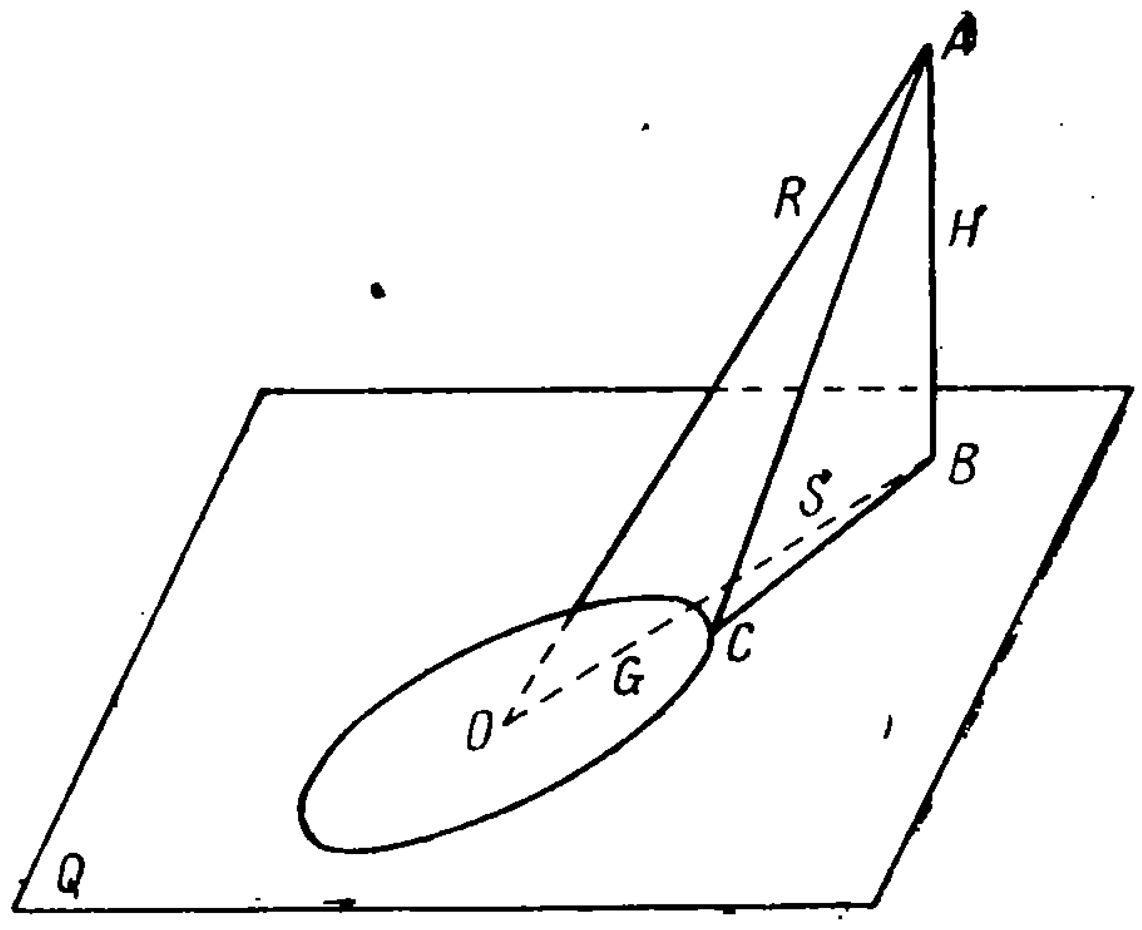
Задача состоит в подборе таких значений параметров c_i, чтобы при $t = t_0 > 0$ имела решение система

$$\sum_{i=1}^{m} c_iy_i^{(k)}(t_0) = r^{(k)}(t_0) \qquad (k = 0, 1, \ldots, (n-1)) \tag{2.5}$$

Так как система (2.5) может оказаться несовместной, то будем искать ее решение по методу наименьших квадратов [9] (стр. 449), т. е. будем искать такую систему параметров c_i, чтобы квадратичная форма этих параметров

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i y_i^{(k)} - r^{(k)} \right)^2 \tag{2.6}$$

(здесь и в дальнейшем аргумент t_0 опускаем) имела наименьшее значение.



Рассмотрим теперь векторы

$$Y_i (y_i, y_i', \ldots, y_i^{(n-1)}) \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Так как это n-мерные векторы, то среди них будут p линейно независимых векторов (причем $p \leqslant n$, $p \leqslant m$), пусть это будут $Y_1, \ldots, Y_p$. Обозначим через Q гиперплоскость, порожденную данными векторами, очевидно все остальные векторы Y_i лежат в этой гиперплоскости и квадратичная форма F дает квадрат расстояния от точки A, радиус-вектор которой равен $R(r, r', \ldots, r^{(n-1)})$, до точки B, имеющей радиус-вектор $S = c_1 Y_1 + \ldots + c_m Y_m$, лежащий в плоскости Q (см. фиг. 1). Но в таком случае F будет иметь наименьшее значение, если вектор S будет служить проекцией вектора R или, что то же самое, точка B будет являться проекцией точки A. Так как система векторов $Y_1, \ldots, Y_p$ служит базисом подпространства Q, то имеет место представление

$$S = c_1 Y_1 + \ldots + c_p Y_p$$

Здесь параметры c_i при $1 \leqslant i \leqslant p$ согласно [10] (стр. 204) определяются из системы

$$(Y_i, Y_1) c_1 + \ldots + (Y_i Y_p) c_p = (Y_i, R) \qquad (i = 1, \ldots, p) \tag{2.7}$$

Здесь (Y_i, Y_k) — скалярное произведение векторов $Y_i Y_k$. Таким образом, c_i при $i > p$ не входят в решение и могут быть положены равными нулю.

Минимальное значение H^2 квадратичной формы F равно в данном случае

$$H^2 = \frac{\Gamma(Y_1, \ldots, Y_p, R)}{\Gamma(Y_1, \ldots, Y_p)} \tag{2.8}$$

где в числителе и знаменателе стоят определители Грамма соответствующих систем векторов. Наконец, имеет место важное соотношение

$$S = \sum_{i=1}^{p} c_i Y_i = -\frac{1}{\Gamma(Y_1, \ldots, Y_p)} \begin{vmatrix} (Y_1, Y_1) \ldots (Y_1, Y_p) & Y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ (Y_p, Y_1) \ldots (Y_p, Y_p) & Y_p \\ (R, Y_1) \ldots (R, Y_p) & 0 \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

Из формулы (2.8) следует, что $H^2 = 0$ если $p = n$ и, следовательно $m \geqslant n$. В этом случае число линейно независимых векторов Y_i является максимальным и они порождают все n-мерное пространство, в котором лежит вектор R.

Назовем систему функций $u_i(t)$ существенно линейно независимой на некотором множестве, если множество нулей функции

$$c_1u_1(t) + \ldots + c_mu_m(t) \quad \text{при} \quad c_1^2 + \ldots + c_m^2 \neq 0$$

нигде не плотно на этом множестве.

Для дальнейшего докажем следующую лемму.

Лемма. Если система функций $u_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m;\ m \geqslant n)$ существенно линейно независима на отрезке $[0, T]$, то множество точек t_0, для которых ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} y_1 & y_1' & \ldots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \ldots & y_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_m & y_m' & \ldots & y_m^{(n-1)} \end{Vmatrix} \tag{2.10}$$

меньше n является замкнутым нигде не плотным множеством.

В самом деле, допустим на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ ранг матрицы (2.10) меньше n, составим дифференциальное уравнение

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \ldots & y_1^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n-1} & y_{n-1}' & \ldots & y_{n-1}^{(n-1)} \\ y & y' & \ldots & y^{(n-1)} \end{vmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k(t)\, y^{(k)} = 0 \tag{2.11}$$

Очевидно на указанном отрезке все m функций $y_i(t)$ удовлетворяют этому дифференциальному уравнениюо $(n-1)$-го порядка с непрерывными коэффициентами $b_k(t)$. Но так как $m \geqslant n$, то функции $y_i(t)$ должны быть линейно зависимыми, что означает наличие постоянных α_i таких, что

$$\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_m^2 \neq 0, \qquad \alpha_1 y_1(t) + \ldots + \alpha_m y_m(t) \equiv 0$$

на данном отрезке. Так как $L(y_i(t)) = u_i(t)$ (L — оператор, определенный уравнением (1.1)), то имеем $\alpha_1u_1(t) + \ldots + \alpha_mu_m(t) = 0$ всюду на $[t_1, t_2]$.

Замкнутость изучаемого множества следует из того факта, что дополнительное множество точек, в которых ранг матрицы (2.10) равен n, есть очевидно открытое множество.

Назовем точки t_0, для которых ранг матрицы (2.10) меньше n, критическими точками; в этих точках увеличением числа функций $u_i(t)$ до n (и выше) нельзя ликвидировать ошибку H даже при отсутствии ограничений на параметры c_i; заметим, что в конкретных примерах критические точки расположены не очень часто. Из простых соображений, например, следует, что если функции $u_i(t)$ и коэффициенты уравнения (1.1) являются аналитическими, то критические точки являются изолированными. В некритических точках при $m = n$, выбирая параметры c_i согласно уравнениям (2.7), получим точное решение первой задачи.

§ 3. Рассмотрим теперь первую задачу при ограничениях на параметры c_i. Будем считать, что параметры c_i связаны неравенством

$$\rho(c_1, \ldots, c_m) \leqslant M \tag{3.1}$$

Точки гиперплоскости Q с радиусом-вектором вида $S = c_1Y_1 + \ldots + c_mY_m$, где c_i связаны условием (3.1), заполняют некоторую область G. Могут иметь место два случая. В первом случае минимум квадратичной формы F достигается для вектора S с концом B внутри области G. В этом случае система (2.7) дает исчерпывающее решение задачи.

Во втором случае минимум формы F достигается на границе (фиг. 1) области G; очевидно он равен квадрату расстояния от точки A до ближайшей к ней точки C, лежащей на границе области G. Так как $AC^2 = CB^2 + AB^2$ и составляющая AB не зависит от величины и формы области G, то точка C является также наименее удаленной точкой области G от точки B. Таким образом, погрешность AC, с которой решается задача, имеет как бы две составляющие CB и AB: выбирая некритическое значение t_0 и принимая $m = n$, можно уничтожить AB, таким образом остается отыскать пути уменьшения составляющей CB.

Последняя задача представляет собой задачу на условный экстремум; однако при $m \geqslant n$ для некритического значения t_0 можно не рассматривать непосредственно экстремум формы F, так как в этом случае система (2.5) совместна; здесь можно воспользоваться методом М. Крейна [11].

Пусть будет $m \geqslant n$ и t_0 — некритическое. Рассмотрим векторное пространство R_n, порожденное m-мерными векторами $Y^k(y_1^{(k)}, \ldots, y_m^{(k)})$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Так как t_0 некритическое, то векторы Y^k линейно независимы и размерность пространства R_n будет равна точно n. Наряду с пространством R_n рассмотрим пространство E_m векторов $C(c_1, \ldots, c_m)$. Пусть в этом пространстве задана норма $\rho(C) = \rho(c_1, \ldots, c_m)$, т. е. функция, удовлетворяющая условиям

$$\rho(C) > 0, \quad \text{если } C \neq 0; \quad \rho(\alpha C) = \alpha\rho(C), \quad \rho(C_1 + C_2) \leqslant \rho(C_1) + \rho(C_2) \qquad (3.2)$$

Пространство E_m можно рассматривать [12] (стр. 113) как пространство линейных функционалов φ, действующих в R_n по правилу

$$\varphi(X) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i = (C, X) \qquad (X \subset R_n)$$

Следовательно, в R_n, как в подпространстве R_m сопряженного с E_m пространства, определяется норма $\|X\|$ по правилу

$$\|X\| = \max(C, X) \qquad \text{при условии } \rho(C) = 1$$

Систему (2.5) можно теперь представить в следующем виде:

$$(C, Y^k) = r^{(k)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \qquad (3.3)$$

Определим функцию $\lambda(t_0, m)$ условиями

$$\frac{1}{\lambda(t_0, m)} = \min\left\|\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k Y^k\right\| \qquad \text{при } \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k r^{(k)} = 1 \qquad (3.4)$$

Из основного результата работы [11] следует, что система (3.3) тогда и только тогда имеет решение $C(c_1, \ldots, c_m)$, удовлетворяющее условию $\rho(c_1, \ldots, c_m) \leqslant M$, когда $\lambda(t_0, m) \leqslant M$. Из этой же работы [11] (стр. 177) следует также, что вектор $\gamma_0 Y^0 + \gamma_1 Y^1 + \ldots + \gamma_{n-1} Y^{n-1}$ тогда и только тогда будет минимизирующим вектором задачи (3.4), когда вектор $C(c_1, \ldots, c_m)$ удовлетворяет системе (3.3), а также условиям

$$\left|\sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k y_i^{(k)}\right| = \lambda(t_0, m)\left\|\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k Y^k\right\|, \qquad \lambda(t_0, m) = \rho(c_1, \ldots, c_m) \quad (3.5)$$

Из этих результатов прежде всего следует, что функция $\lambda(t_0, m)$ является непрерывной функцией t_0 на множестве некритических точек

Однако в отличие от исследования Ф. М. Кирилловой [13], уже нельзя утверждать, что $\lambda(t_0, m)$ является монотонной функцией.

Покажем, что функция $\lambda(t_0, m)$ является невозрастающей функцией m. В самом деле, пусть минимизирующие элементы задачи (3.4) будут

$$\gamma_0^{\circ}Y^0(m_0)+\gamma_1^{\circ}Y^1(m_0)+\ldots+\overset{\circ}{\gamma}_{n-1}Y^{n-1}(m_0)\ \text{при}\ \ m=m_0$$

и $$\gamma_0'Y^0(m_1)+\gamma_1'Y^1(m_1)+\ldots+\gamma_{n-1}'Y^{n-1}(m_1)\ \ \text{при}\ \ m=m_1>m_0 \qquad (3.6)$$

Очевидно имеем

$$\|\gamma_0'Y^0(m_0)+\gamma_1'Y^1(m_0)+\ldots+\gamma_{n-1}'Y^{n-1}(m_0)\|\geqslant$$
$$\geqslant\|\gamma_0^{\circ}Y^0(m_0)+\gamma_1^{\circ}Y^1(m_0)+\ldots+\overset{\circ}{\gamma}_{n-1}Y^{n-1}(m_0)\| \qquad (3.7)$$

Но так как вектор $\gamma_0'Y^0(m_0)+\gamma_1'Y^1(m_1)+\ldots+\gamma_{n-1}'Y^{n-1}(m_0)$ является проекцией вектора $\gamma_0'Y^0(m_0)+\gamma_1'Y^1(m_1)+\ldots+\gamma_{n-1}'Y^{n-1}(m_1)$, то имеем

$$\|\gamma_0'Y^0(m_1)+\gamma_1'Y^1(m_1)+\ldots+\gamma_{n-1}'Y^{n-1}(m_1)\|\geqslant$$
$$\geqslant\|\gamma_0^{\circ}Y^0(m_0)+\gamma_1^{\circ}Y^1(m_0)+\ldots+\overset{\circ}{\gamma}_{n-1}Y^{n-1}(m_0)\| \qquad (3.8)$$

Из соотношений (3.4), неравенств (3.7) и (3.8) выводим

$$\lambda(t_0, m_0)\geqslant\lambda(t_0, m_1)$$

что и доказывает наше утверждение.

Если число t_0 является критическим, то векторы Y^k, $k=0, 1, \ldots, (n-1)$ будут линейно зависимы; из (3.4) в этом случае будет следовать, что $\lambda(t_0, m)=\infty$. Таким образом, функция $\lambda(t, m)$ на множестве точек, где $\lambda(t, m)\leqslant M$, будет непрерывной функцией t. Отсюда следует, что уравнение $\lambda(t, m)=M$ имеет наименьший корень t_0, не являющийся критическим; число t_0 и дает нам оптимальное некритическое время переходного процесса. Заметим, что $t_0\neq 0$, так как число 0 всегда является критическим значением. Из уравнения $\lambda(t, m)=M$ можно также определить минимальное число m параметров управления c_i, при котором осуществимо решение нашей задачи.

§ 4. Рассмотрим примеры конкретных метрик в пространстве E_m. Рассмотрим сначала евклидову метрику, т. е. положим

$$\rho(c_1, \ldots, c_m)=\sqrt{c_1^2+\ldots+c_m^2}$$

В сопряженном пространстве R_m норма вектора $X(x_1, \ldots, x_m)$ определится аналогичной формулой $\|X\|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_m^2}$.

Согласно (3.4) найдем сначала $\lambda(t_0, m)$ из соотношения

$$\frac{1}{\lambda(t_0, m)}=\min\Big[\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_k y_i^{(k)}(t_0)\Big)^2\Big]^{1/2} \quad \text{при} \quad \sum_{k=0}^{n-1}\gamma_k r^{(k)}(t_0)=1 \qquad (4.1)$$

Затем из уравнения $\lambda(t_0, m)=M$ следует найти наименьшее t_0, удовлетворяющее ему, и найти соответствующие значения γ_k, $k=0,1,\ldots,(n-1)$ осуществляющие минимум (4.1). Так как в рассматриваемом случае

$$\lambda(t_0, m)=\sqrt{c_1^2+\ldots+c_m^2}$$

то из (3.4) следует, что

$$\Big|\sum_{i=1}^{m}c_i\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_k y_i^{(k)}\Big|=\Big(\sum_{i=1}^{m}c_i^2\Big)\Big[\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_k y_i^{(k)}\Big)^2\Big]^{1/2}$$

но последнее равенство может иметь место, если числа c_i пропорциональны числам $\gamma_0 y_i^0 + \ldots + \gamma_{n-1} y_i^{(n-1)}$. Окончательно получим

$$c_i = \lambda^2 (t_0, m) (\gamma_0 y_i^{(0)} + \gamma_1 y_2^{(1)} + \ldots + \gamma_{n-1} y_i^{(n-1)}) \tag{4.2}$$

Рассмотрим теперь случай, когда норма $\rho(c_1, \ldots, c_m)$ определяется формулой

$$\rho(c_1, \ldots, c_m) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |c_i|$$

В этом случае в R_m индуцируется норма $X(x_1, \ldots, x_m)$ по правилу

$$\|X\| = |x_1| + \ldots + |x_m|$$

Функцию $\lambda(t_0, m)$ и минимизирующий вектор $\gamma_0 Y^0 + \gamma_1 Y^1 + \ldots + \gamma_{n-1} Y^{n-1}$ найдем в этом случае из соотношений

$$\frac{1}{\lambda(t_0, m)} = \min \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k y_i^{(k)} \right|, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k r^{(k)} = 1$$

Из (3.4) следует, что минимизирующий вектор должен удовлетворять условию

$$\left| \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k y_i^{(k)} \right| = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |c_i| \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k y_i^{(k)} \right|$$

Откуда следует, что

$$c_i = \lambda(t_0, m) \operatorname{sign} \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k y_i^{(k)} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

Рассмотрим пример. Пусть дано уравнение

$$\ddot{x} = c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_3 \sin 2t + c_4 \cos 2t \tag{4.3}$$

Требуется перевести точку $x = 0$, $x' = 0$ на прямую $x = 1$ в точку $x = 1$, $x' = 0$ при ограничении $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \leqslant 1$.

Это значит, что в данной задаче $f(t) = 1$, $M = 1$. Очевидно имеем

$$w_1(t, \tau) = 1, \qquad w_1'(t, \tau) = 0, \qquad w_0(t, \tau) = t - \tau, \qquad w_2'(t, \tau) = 1$$

Имеем также

$$y_1 = -\sin t, \qquad y_2 = -1 - \cos t, \qquad y_3 = -\frac{1}{4} \sin 2t, \qquad y_4 = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)$$

$$y_1' = -\cos t, \qquad y_2' = \sin t, \qquad y_3' = -\frac{1}{2} \cos 2t, \qquad y_4' = \frac{1}{2} \sin 2t$$

Легко видеть, что критические значения t соответствуют точкам $t = 2k\pi$.

Система (2.5) имеет в нашем случае следующий вид:

$$-c_1 \sin t + c_2 (1 - \cos t) - \frac{1}{4} c_3 \sin 2t + \frac{1}{4} c_4 (1 - \cos 2t) = 1$$

$$-c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{2} c_3 \cos 2t + \frac{1}{2} c_4 \sin 2t = 0$$

Так как $\rho(c_1, \ldots, c_4) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2}$, то $\lambda(t, 4) = \lambda(t)$ определится и соотношения

$$\frac{1}{\lambda^2(t)} = \min \Big\{ (\gamma_1 \sin t + \gamma_2 \cos t)^2 + (\gamma_1 (1 - \cos t) + \gamma_2 \sin t)^2 + $$
$$+ \left(\frac{1}{4} \gamma_1 \sin 2t + \frac{1}{2} \gamma_2 \cos 2t\right)^2 + \left[\frac{1}{4} \gamma_1 (1 - \cos 2t) + \frac{1}{2} \gamma_2 \sin 2t\right]^2 \Big\}$$

при условии $\gamma_1 = 1$. Нетрудно подсчитать, что $\gamma_2 = -{}^1/_{10} (8 \sin t + \sin 2t)$ и

$$\frac{1}{\lambda^2(t)} = 2 - 2\cos t + {}^1/_8 (1 - \cos 2t) - {}^1/_{80} (8 \sin t + \sin 2t)^2 = \Phi(t)$$

Чтобы достижимость имела место, необходимо выполнение условия $\lambda^2(t) \leqslant 1$, или $\Phi(t) \geqslant 1$, это условие выполняется, например, при $t = {}^1/_2 \pi$. Наименьшее время переходного процесса найдется из уравнения $\Phi(t) = 1$, которое сейчас решать не будем. Зная γ_1, γ_2 и $\lambda(t)$, легко находим c_i по формуле (4.2).

§ 5. Приступим к решению второй задачи. Принимая во внимание преобразование $z = x - f(t)$, проведенное в § 2, и уравнение (2.1), сформулируем вторую задачу следующим образом: найти такие параметры c_i, чтобы решение $z(t)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям $z^{(k)}(t_0) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, апроксимировало $z = 0$.

Как проводить апроксимацию в пространстве L_2, т. е. исходя из оценки среднеквадратичного отклонения, указано в § 1. Теперь, следуя идее работ [5,6], займемся отысканием путей подбора параметров c_i, обеспечивающих убывание максимума отклонения $z(t)$ от нуля. Из (2.1) аналогично (1.5) получим

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} w_n(t, \tau)\Big(\sum_{i=1}^{m} c_i u_i(t) - \varphi(\tau)\Big)\, d\tau \qquad (L(f(\tau)) = \varphi(\tau)) \tag{5.1}$$

Используя неравенство Буняковского — Шварца, получим при $t_0 \leqslant t \leqslant T$

$$|z(t)| \leqslant N\Big(\int_{t_0}^{T} \Big(\sum_{i=1}^{m} c_i u_i(\tau) - \varphi(\tau)\Big)^2 d\tau\Big)^{1/2} \tag{5.2}$$

Здесь

$$N = \max\Big(\int_{t_0}^{t} w_n^2(t, \tau)\, d\tau\Big)^{1/2} \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant T)$$

В случае же, когда уравнение (1.1) есть уравнение с постоянными коэффициентами, согласно [6]

$$N = \Big(\int_{t_0}^{T} w_n^2(T, \tau)\, d\tau\Big)^{1/2}$$

Подберем параметры c_i так, чтобы интеграл

$$H^2 = \int_{t_0}^{T} \Big(\sum_{i=1}^{m} c_i u_i(\tau) - \varphi(\tau)\Big)^2 d\tau$$

имел при данном m наименьшее значение, другими словами, мы должны найти наилучшее среднеквадратичное приближение функции $\varphi(t)$. Мы уже решали подобную задачу в § 1 и знаем, что параметры c_i должны быть найдены из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} (u_i, u_k)\, c_k = (u_i, \varphi) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{5.3}$$

Если система функций $u_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, полная, то, беря m достаточно большим, можно сделать H^2 меньше любого заданного числа.

Заметим теперь, что предложенный метод апроксимации будет наиболее эффективным на больших промежутках времени, если величина N из (5.2) ограничена как функция T. Данное обстоятельство имеет место, если, например, $w_n(t, \tau)$ удовлетворяет условию

$$|w_n(t, \tau)| \leqslant Be^{-\alpha(t-\tau)} \qquad (\alpha > 0,\ B > 0)$$

которое выполняется, в частности, в случае, когда нулевое решение уравнения $L(z) = 0$ устойчиво по показательному закону ([14], стр. 310).

Рассмотрим теперь случай, когда коэффициенты c_i ограничены неравенством

$$\rho(c_1, \ldots, c_m) \leqslant M \tag{5.4}$$

Таким образом, возникает проблема отыскания наилучшего среднеквадратичного приближения функции $\varphi(t)$ при ограничениях на коэффициенты многочлена $c_1 u_1(t) + \ldots + c_m u_m(t)$. Если коэффициенты c_i, найденные из системы (5.3), не удовлетворяют условию (5.4), то наиболее естественный путь отыскания нужной системы коэффициентов состоит в решении задачи на условный экстремум. В этом случае метод Лагранжа приводит к системе

$$\sum_{k=1}^{m} (u_i, u_k) = (u_i, \varphi) + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial\rho}{\partial c_i} \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{5.5}$$

Если функция $\rho(c_1, \ldots, c_m)$ удовлетворяет условиям (3.2), то снова как и в § 3, можно применить к задаче методику, связанную с L-проблемой М. Крейна.

В самом деле, обозначим через U_i вектор с проекциями (u_i, u_k), $= 1, \ldots, m$. Согласно [11] система (5.3) имеет тогда и только тогда решение $c_1, \ldots, c_m$, удовлетворяющее неравенству (5.4), когда функция $\lambda(m)$, определяемая условиями

$$\frac{1}{\lambda(m)} = \min\left\|\sum_{k=1}^{m} \gamma_k U_k\right\|, \qquad \sum_{k=1}^{m} \gamma_k (u_k, \varphi) = 1 \tag{5.6}$$

удовлетворяет неравенству $\lambda(m) \leqslant M$.

Здесь норма $\|U\|$ определяется в пространстве, порожденном векторами U_i, как в пространстве, сопряженном пространству E_m векторов $C(c_1, \ldots, c_m)$ с нормой $\rho(c_1, \ldots, c_m)$.

Заметим теперь, что если функции $u_i(t)$ образуют ортонормированную систему на отрезке $[t_0, T]$, т. е. удовлетворяют условиям $(u_i, u_k) = 0$ при $i \neq k$, $(u_i, u_i) = 1$, то рассматриваемая задача решается просто. В самом деле, в этом случае система (5.3) дает $c_k = (u_k, \varphi)$ $(k = 1, \ldots, m)$.

Для любой другой системы коэффициентов b_k имеем

$$H^2 = \int_{t_0}^{T} \Big(\sum_{i=1}^{m} b_i u_i(t) - \varphi(t)\Big)^2 dt = \sum_{i=1}^{m} (b_i - c_i)^2 + \int_{t_0}^{T} \varphi^2(t)\,dt - \sum_{i=1}^{m} c_i^2$$

Пусть b_k удовлетворяют неравенству (5.4), разность

$$\int_{t_0}^{T} \varphi^2(t)\,dt - \sum_{i=1}^{m} c_i^2$$

не зависит от формы области (5.4), ее можно уменьшить только увеличением m. При данном m уменьшить H^2 можно только за счет уменьшения величины $h^2 = (b_1 - c_1)^2 + \ldots + (b_m - c_m)^2$, которая равна в пространстве параметров расстоянию от точки $C(c_1, \ldots, c_m)$ до точки $B(b_1, \ldots, b_m)$, лежащей в области (5.4).

Но это значит, что h^2 будет наименьшим, когда в качестве точки $B(b_1, \ldots, b_m)$ будет взята ближайшая к точке C точка области (5.4) Этим замечанием автор обязан С. Б. Стечкину.)

Если, например, $\rho(c_1, \ldots, c_m) = \sqrt{c_1^2 + \ldots + c_m^2}$, то из указанных соображений найдем

$$b_i = M \frac{c_i}{\sqrt{c_1^2 + \ldots + c_m^2}}, \quad \text{если } c_1^2 + \ldots + c_m^2 > M^2$$

$$b_i = c_i, \quad \text{если } c_1^2 + \ldots + c_m^2 \leqslant M^2$$

если же $\rho(c_1, \ldots, c_m) = \max |c_i|$ при $1 \leqslant i \leqslant m$, то

$$b_i = M \operatorname{sign} c_i \quad \text{при } \rho(c_1, \ldots, c_m) > M, \qquad b_i = c_i \quad \text{при } \rho(c_1, \ldots, c_m) \leqslant M$$

Развивая эти соображения, можно получить новый способ решения задачи в общем случае неортонормированной системы. Известно [8] (стр. 320), что любую линейно независимую систему функций можно ортонормировать. Допустим процесс ортогонализации дал систему функций $\{v_i(t)\}$. Тогда многочлен $c_1 u_1(t) + \ldots + c_m u_m(t)$ превратится в многочлен $b_1 v_1(t) + \ldots + b_m v_m(t)$, причем коэффициенты c_i будут линейными функциями коэффициентов b_i. Условие (5.4) переходит, таким образом, в условие, ограничивающее коэффициенты b_i, при этом область G, заданная неравенством (5.4), линейно преобразуется в новую область G_1 в пространстве коэффициентов b_i. Задача сводится, очевидно, теперь к отысканию в область G_1 точки, наиболее близкой к точке с координатами-коэффициентами Фурье.

В заключение заметим, что высказанные здесь соображения применимы к любой задаче, где необходимо найти наилучшее среднеквадратичное приближение при ограничениях на коэффициенты многочлена. Таким образом, возвращаясь к задаче, решенной в § 1, можно усложнить ее и искать решение уравнения (1.1) в качестве среднеквадратичного приближения функции $f(t)$ при ограничениях на начальные данные и параметры c_i.

Поступила 15 VI 1960

Уральский филиал АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. Автоматика и телемеханика, 1957, т. XVIII, № 11.
2. Красовский Н. Н. О приближенном вычислении оптимального управления прямым методом. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 2.
3. Kulikowski R. Obliczanie liniowych ukladów impulsowych. Arch. elecktrotechniki, 1954, t. III, z. 2.
4. Kulikowski R. Optymalne schematy zastepezc i modele liniowych ukladów dynamicznych. Arch. elektrotechniki, 1955, t. IV, z. 1.
5. Барбашин Е. А. Об оценке среднеквадратичного значения отклонения от заданной траектории. Автоматика и телемеханика, 1960, т. XXI, № 7.
6. Барбашин Е. А. Об оценке максимума отклонения от заданной траектории. Автоматика и телемеханика, 1960, т. XXI, № 10.
7. Колдингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. ИЛ, 1958.
8. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 1. Физматгиз, 1959.
9. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. ГИТТЛ, 1949.
10. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. ГИТТЛ, 1953.
11. Ахиезер Я., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. Статья «L-проблема в абстрактном нормированном пространстве». ГОНТИ, Харьков, 1938.
12. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
13. Кириллова Ф. М. О корректности постановки одной задачи оптимального регулирования. Изв. ВУЗов, Математика, 1958, № 4 (5).
14. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. ГИТТЛ, 1952.
15. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. Теория оптимальных процессов. Изв. АН СССР. Сер. матем., 24, 1960.