О ВДАВЛИВАНИИ ЖЕСТКОГО ШТАМПА В АНИЗОТРОПНУЮ ПЛАСТИЧЕСКУЮ СРЕДУ

В. В. Дудукаленко

(Воронеж)

Впервые условие пластичности анизотропного материала было предложено Мизесом [1]. Позднее Хилл [2] рассмотрел ряд задач теории анизотропных идеально пластических тел. Упомянем также работу [3].

Ниже рассматривается задача о вдавливании жесткого штампа в анизотропную пластическую среду в случае плоской деформации. Используется условие пластичности, предложенное в работе [4].

Приведем исходные соотношения. Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

Условие пластичности

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}{}^2 = 4k^2(\theta) \qquad \left(\theta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}\right) \tag{2}$$

Закон пластического течения имеет вид

$$\frac{\varepsilon_x}{k(\sigma_x - \sigma_y) + k'\tau_{xy}} = \frac{\varepsilon_y}{k(\sigma_y - \sigma_x) - k'\tau_{xy}} = \frac{\varepsilon_{xy}}{4k\tau_{xy} - 2k'(\sigma_x - \sigma_y)}$$

где $k' = dk / d\theta$. Используя замену переменных

$$\sigma_x = \sigma - k\cos 2\theta, \quad \sigma_y = \sigma + k\cos 2\theta, \quad \tau_{xy} = k\sin 2\theta \tag{4}$$

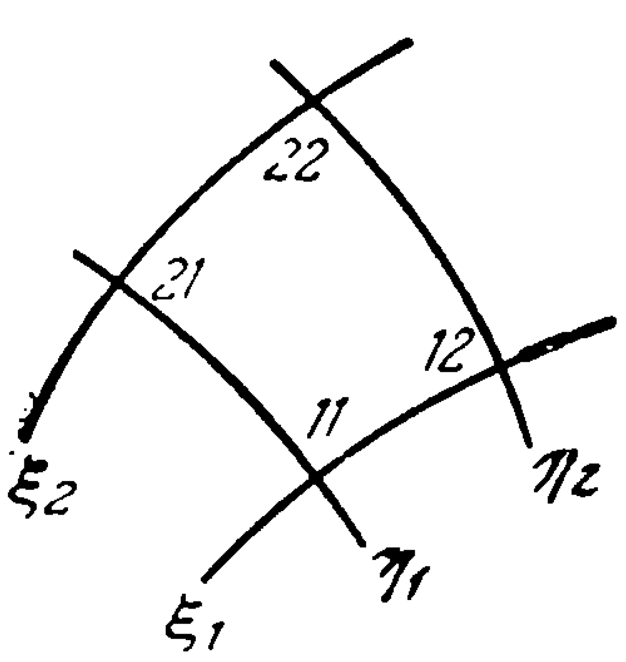
легко убедиться, что система уравнений (1), (2) принадлежит к гиперболическому типу. Уравнения характеристик запишутся в виде [4]

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{k'\cos 2\theta - 2k\sin 2\theta \pm \sqrt{k'^2 + 4k^2}}{k'\sin 2\theta + 2k\cos 2\theta} \tag{5}$$

вдоль которых имеют место интегралы

$$\sigma \pm \int \sqrt{k'^2 + 4k^2}\, d\theta = \text{const} \tag{6}$$

Уравнения для компонент скоростей деформации (3) принадлежат к гиперболическому типу, характеристики их определяются уравнениями (5). Вдоль характеристик имеют место соотношения Гейрингер, утверждающие отсутствие удлинений вдоль характеристик



Фиг. 1

$$du - v\,d\alpha = 0, \qquad dv + u\,d\alpha = 0 \tag{7}$$

где α — угол наклона характеристик к оси x, определяемый из выражения (5).

Из интегралов (6) следует справедливость соотношений, устанавливающих свойства сетки линий скольжения

$$\sigma_{12} - \sigma_{11} = \sigma_{22} - \sigma_{21}$$

$$\Phi(\theta_{12}) - \Phi(\theta_{11}) = \Phi(\theta_{22}) - \Phi(\theta_{21}) \tag{8}$$

Семейства линий скольжения ξ и η даны на фиг. 1.

Как следствие получим, что если некоторый отрезок линии скольжения ξ прямой, то вдоль него величины σ, θ и η постоянные. Если оба семейства линий скольжения прямые, то в этой области напряжения распределены равномерно.

Если некоторый отрезок линии скольжения семейства ξ прямой, то все соответствующие отрезки линий η, отсекаемые линиями ξ, прямые. Отмеченные свойства являются следствием аналога первой теоремы Генки для рассматриваемого вида анизотропии.

Рассмотрим задачу о вдавливании штампа, сохраняя постановку Хилла [2]. Решение будем искать для тел произвольного вида анизотропии, предполагая однородность материала. Решение комбинируется из полей равномерного напряженного состояния, сопряженных полем центрированного веера характеристик (фиг. 2).

Пусть на контуре заданы нормальная и касательная составляющие напряжения σ_n и τ_n. Замечая, что

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \qquad \tau_n = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

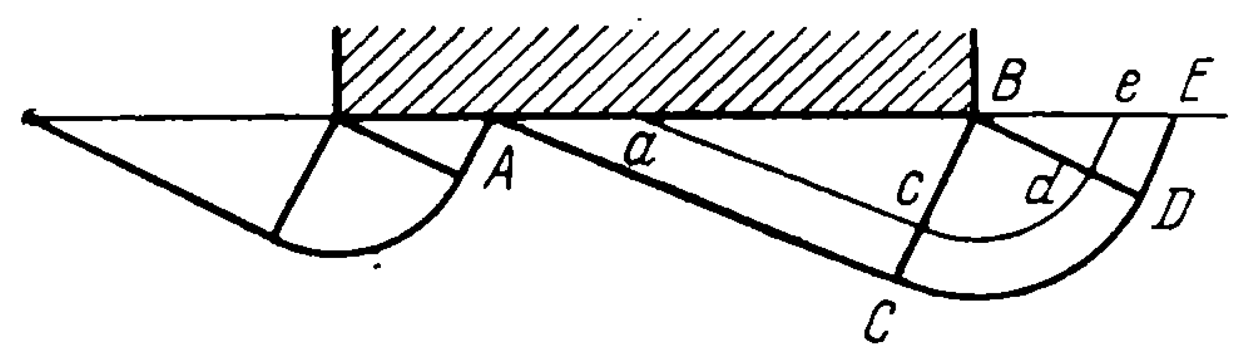
и используя соотношения (4), будем иметь

$$\sigma_n = \sigma - k \cos 2(\theta + \varphi), \quad \tau_n = k \sin 2(\theta + \varphi) \tag{9}$$

где φ — угол наклона нормали контура к оси x.

Полагая, что трение на поверхности контакта отсутствует и что остальная поверхность свободна от нагрузок, из соотношений (9) определим напряженные состояния в треугольных областях ABC и BDE (фиг. 2). В треугольнике ABC будет иметь место $\theta = -{}^1/_2\pi$ и угол наклона линий скольжения ac определится из соотношений (5). Треугольник BDE будет испытывать простое сжатие, параллельное оси x, из соотношений (9) получим, что $\theta = 0$ и $\sigma = -k(\theta)$. Углы треугольника определятся из уравнений характеристик (5). Гидростатическое давление σ в треугольнике ABC легко определится из соотношения (6) вдоль характеристики ac

$$\sigma - \int_0^{{}^1/_2\pi} \sqrt{k'^2 + 4k^2}\, d\theta = -k(0)$$



Фиг. 2

Компоненты напряжений в треугольнике ABC находятся из соотношений (4)

$$\sigma_x = -k(0) + \int_0^{-{}^1/_2\pi} \sqrt{k'^2 + 4k^2}\, d\theta + k(-{}^1/_2\pi)$$

$$p = \sigma_y = -k(0) - k(-{}^1/_2\pi) + \int_0^{{}^1/_2\pi} \sqrt{k'^2 + 4k^2}\, p\theta$$

Последняя формула определяет предельное давление p штампа на поверхность анизотропной идеально пластической среды. Из полученных соотношений следует, что предельная нагрузка зависит от вида функции $k(\theta)$ в пределах изменения $-{}^1/_2\pi \leqslant \theta \leqslant 0$. В случае изотропного материала автоматически получается формула Прандтля.

Рассмотрим распределение скоростей перемещений. Треугольник ABC скользит как твердое тело вдоль AC со скоростью $V / \sin \alpha_1$, где V — скорость вдавливания штампа, α_1 — угол BAC. В центрированном поле BCD вдоль характеристик cd скорость равна $V / \sin \alpha_1$, в перпендикулярном направлении она равна нулю. Треугольник BDE движется в направлении линии de со скоростью $V / \sin \alpha_1$.

Аналогично можно рассмотреть распределение напряжений и скоростей в области слева от точки A. Очевидно, что в случае изотропного материала распределение скоростей перемещений будет совпадать с решением Хилла [2].

Поступила 13 IV 1960

Воронежский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Mises R. Mechanik der plastischen Formanderung von Kristalen. ZAMM, 1928, Bd. 8.
2. Hill R. Mathematical Theory of Plasticity. Oxford, 1950 (русский перевод: Хилл Р. Математическая теория пластичности. Гостехтеоретиздат, М., 1956).
3. Hy L. W. Modified Tresca's yield conditions and associated flow rules for anisotropic materials and applications. J. Franklin Inst., 1958, 265, № 3.
4. Ивлев Д. Д. К теории идеальной пластической анизотропии. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 6.