

ВОЛОЧЕНИЕ ТОНКОЙ ТРУБЫ ЧЕРЕЗ КОНИЧЕСКУЮ МАТРИЦУ

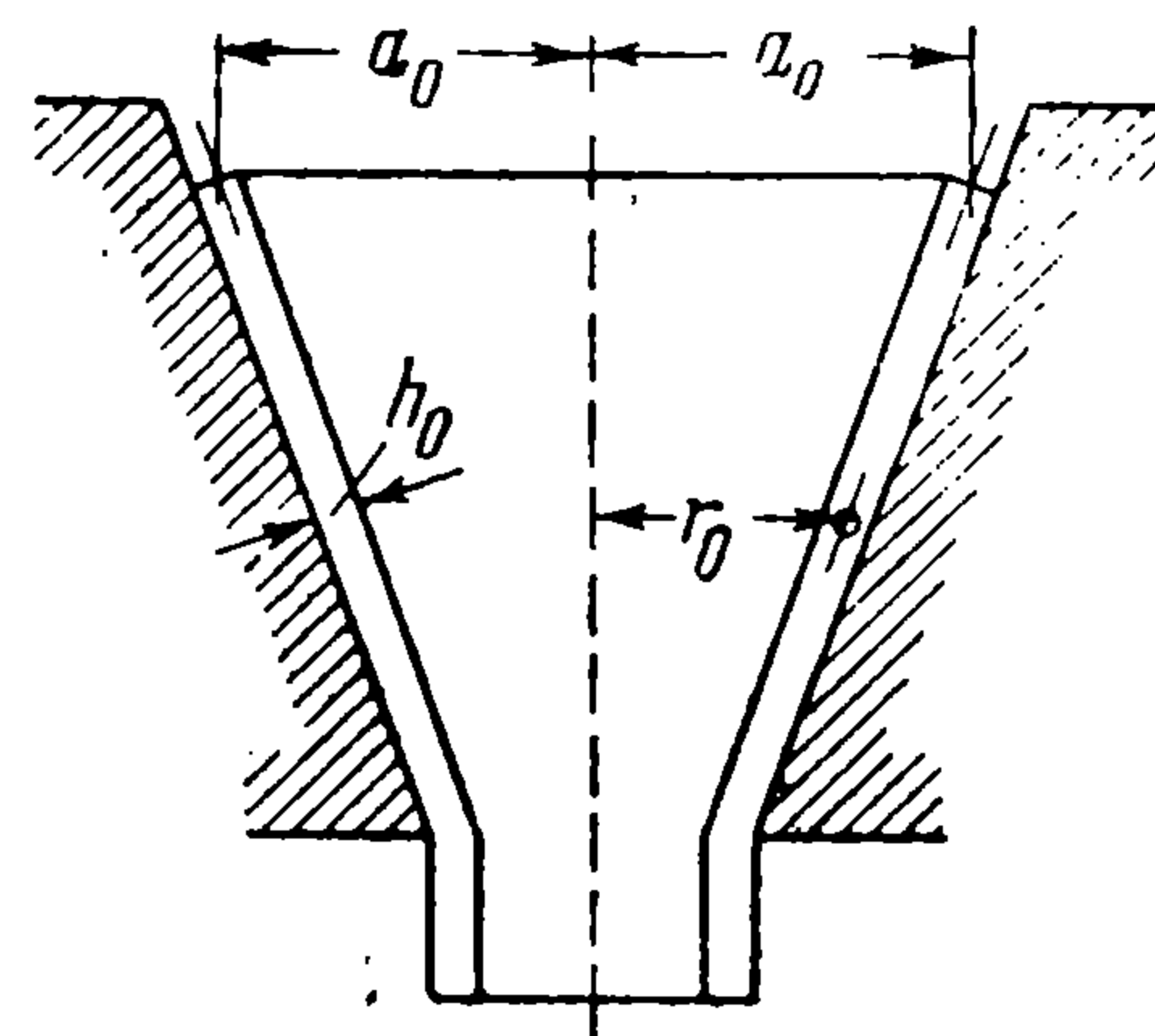
В. В. Соколовский

(Москва)

Настоящая работа посвящена задаче о волочении тонкой трубы через коническую матрицу без трения в предположении, что концевое сечение трубы свободно от напряжений. Она родственна задаче о глубокой вытяжке, поставленной и решенной Р. Хиллом [1] при условии пластичности Х. Треска.

Рассмотрим сначала задачу о волочении тонкой трубы, применяя обычное условие пластичности, а также соответствующие зависимости между компонентами напряжения и компонентами скорости деформации.

Начальное расстояние какой-нибудь частицы трубы от оси симметрии, когда радиус концевое сечения равен  $a_0$ , будем обозначать через  $r_0$  (фиг. 1), а расстояние той же частицы трубы, когда радиус концевое сечения равен  $a$ , — через  $r$  (фиг. 2).



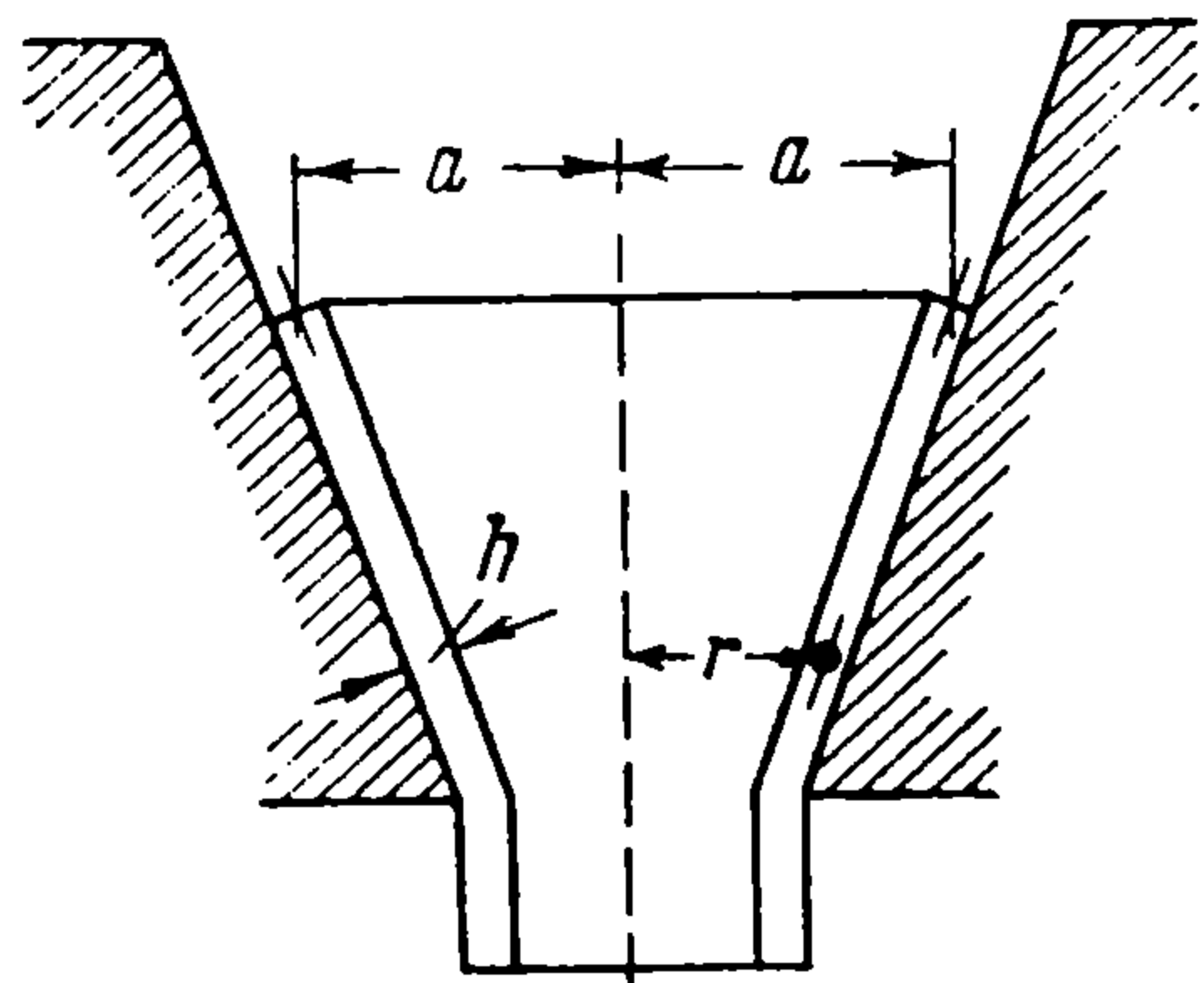
Фиг. 1

Радиальную скорость  $v$  удобно измерять по отношению к радиусу  $a$ , как к шкале времени, а начальный радиус  $a_0$  можно считать равным единице.

Поля напряжений и скоростей деформаций в конической трубе будем определять компонентами напряжения  $\sigma_1, \sigma_2$  и компонентами скорости деформации  $\epsilon_1, \epsilon_2$  в меридиональном и окружном направлениях, имея в виду, что

$$\epsilon_1 = \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \epsilon_2 = \frac{v}{r}$$

Дифференциальное уравнение равновесия конической трубы толщины  $h$  имеет обычный вид



Фиг. 2

$$\frac{\partial(h\sigma_1)}{\partial r} + \frac{h(\sigma_1 - \sigma_2)}{r} = 0 \quad (1)$$

условие пластичности будет

$$\Phi^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_s^2 \quad (2)$$

Между компонентами напряжения и компонентами скорости деформации имеют место зависимости

$$\frac{\epsilon_1}{\partial\Phi/\partial\sigma_1} = \frac{\epsilon_2}{\partial\Phi/\partial\sigma_2}, \quad \text{или} \quad \frac{\epsilon_1}{2\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\epsilon_2}{2\sigma_2 - \sigma_1}$$

которые дают

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_2 - \sigma_1} \frac{v}{r} \quad (3)$$

Обычное условие несжимаемости материала напишется следующим образом

$$\frac{1}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial a} + v \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (4)$$

Приведенная система состоит из четырех уравнений и содержит четыре искомые функции  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $v, h$ . Она принадлежит к гиперболическому типу и обладает двумя семействами  $r_0$  и  $a$  действительных характеристик.

Семейство  $r_0$  определяется дифференциальными уравнениями

$$\frac{dv}{v} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_2 - \sigma_1} \frac{dr}{r}, \quad \frac{dH}{H} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{dr}{r} - \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} \quad (5)$$

а семейство  $a$  дается дифференциальными уравнениями

$$dr = v da, \quad \frac{dH}{H} = - \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_2 - \sigma_1} \frac{dr}{r} \quad (H = rh) \quad (6)$$

Очевидно, что начальные условия напишутся так

$$r = r_0, \quad h = h_0 \quad \text{при} \quad a = 1$$

а граничные условия будут

$$\sigma_1 = 0, \quad v = 1 \quad \text{при} \quad r_0 = 1$$

Выразим компоненты напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  через новое переменное  $\varphi$  при помощи соотношений

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \cos\left(\varphi \mp \frac{\pi}{6}\right)$$

так что  $\sigma_1 = 0$  соответствует  $\varphi = 2\pi/3$ .

Ясно, что дифференциальные уравнения (5) могут быть переписаны в виде

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\sin(\varphi + \pi/6) dr}{\sin(\varphi - \pi/6) r}, \quad \frac{dH}{H} = \frac{\cos(\varphi + \pi/6) dr}{\cos(\varphi - \pi/6) r} + \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) d\varphi \quad (7)$$

а дифференциальные уравнения (6) должны быть преобразованы так:

$$dr = v da, \quad \frac{dH}{H} = \frac{\sin(\varphi + \pi/6) dr}{\sin(\varphi - \pi/6) r} \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) вместе с начальными и граничными условиями устанавливают, что при  $a = 1$  имеют место соотношения

$$r^2 = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \varphi} \exp\left[-\sqrt{3}\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right)\right]$$

$$v^2 = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \varphi} \exp\left[+\sqrt{3}\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right)\right]$$

а также, что при  $r_0 = 1$  существует зависимость

$$h = \frac{h_0}{\sqrt{a}}$$

Результаты численного решения дифференциальных уравнений (7) и (8) методом конечных разностей представлены на фиг. 3 и 4. Графики зависимостей  $\sigma_1 = \sigma$  и  $h$  от  $r$  для значений  $a$ , убывающих от 1.0 до 0.5 через 0.1, изображены сплошными кривыми, а графики зависимостей  $\sigma$  и  $h$  от  $r$  для значений  $r_0$  от 0.5 до 1.0 также через 0.1 показаны пунктирными кривыми.

Разберем теперь задачу о волочении тонкой трубы, но используя линеаризованное условие пластичности, а также соответствующие зависимости между компонентами напряжения и компонентами скорости деформации, предложенные В. Прагером [2]. Дифференциальное уравнение равновесия конической трубы толщины  $h$  по-прежнему имеет вид

$$\frac{\partial(h\sigma_1)}{\partial r} + \frac{h(\sigma_1 - \sigma_2)}{r} = 0 \quad (9)$$

а условие пластичности будет

$$\Phi = \mu\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_s \quad (1/2 \leq \mu \leq 1) \quad (10)$$

Между компонентами напряжения и компонентами скорости деформации имеют место простые зависимости

$$\frac{\varepsilon_1}{\partial\Phi/\partial\sigma_1} = \frac{\varepsilon_2}{\partial\Phi/\partial\sigma_2}, \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2 = 0$$

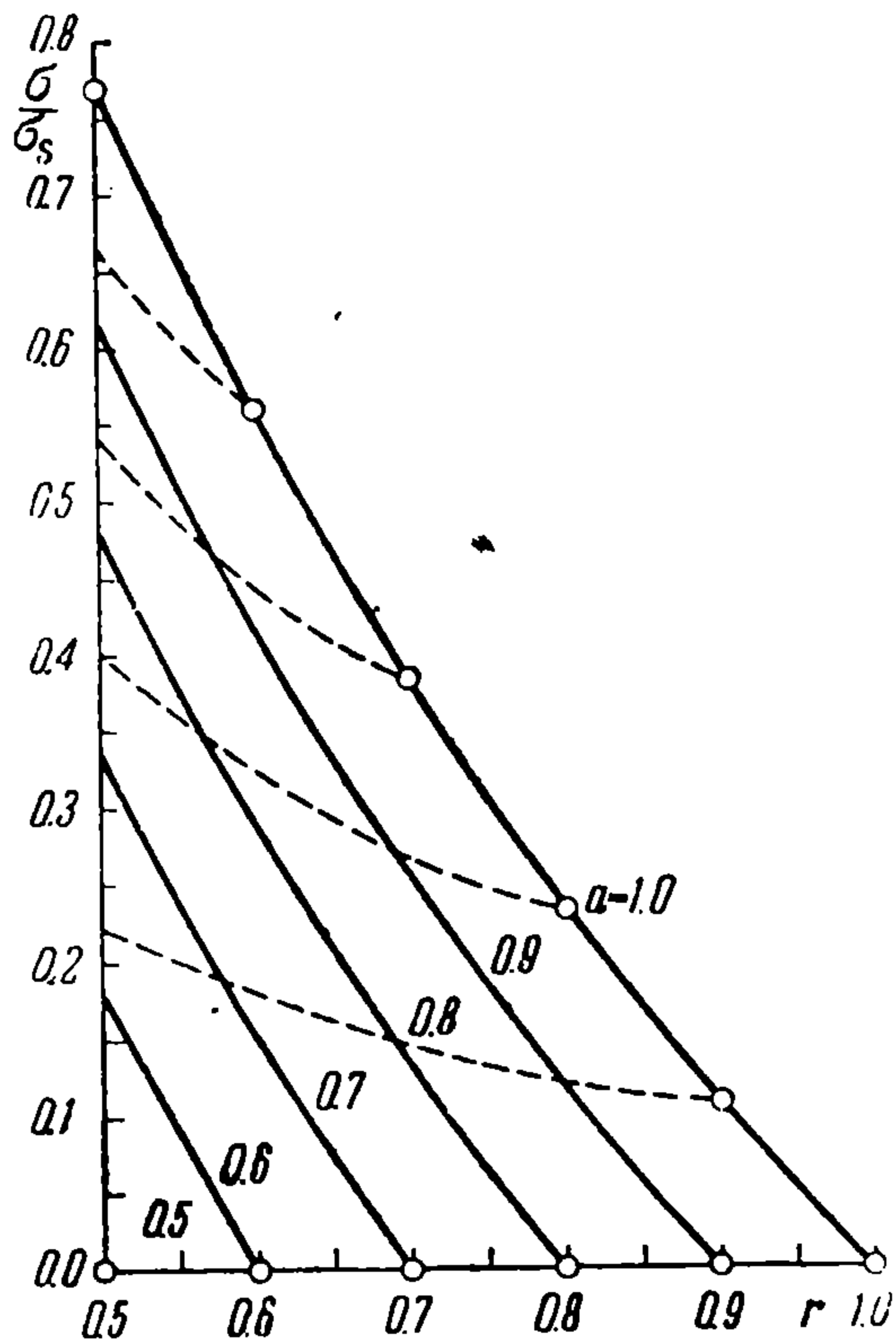
которые дают

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \mu \frac{v}{r} = 0 \quad (11)$$

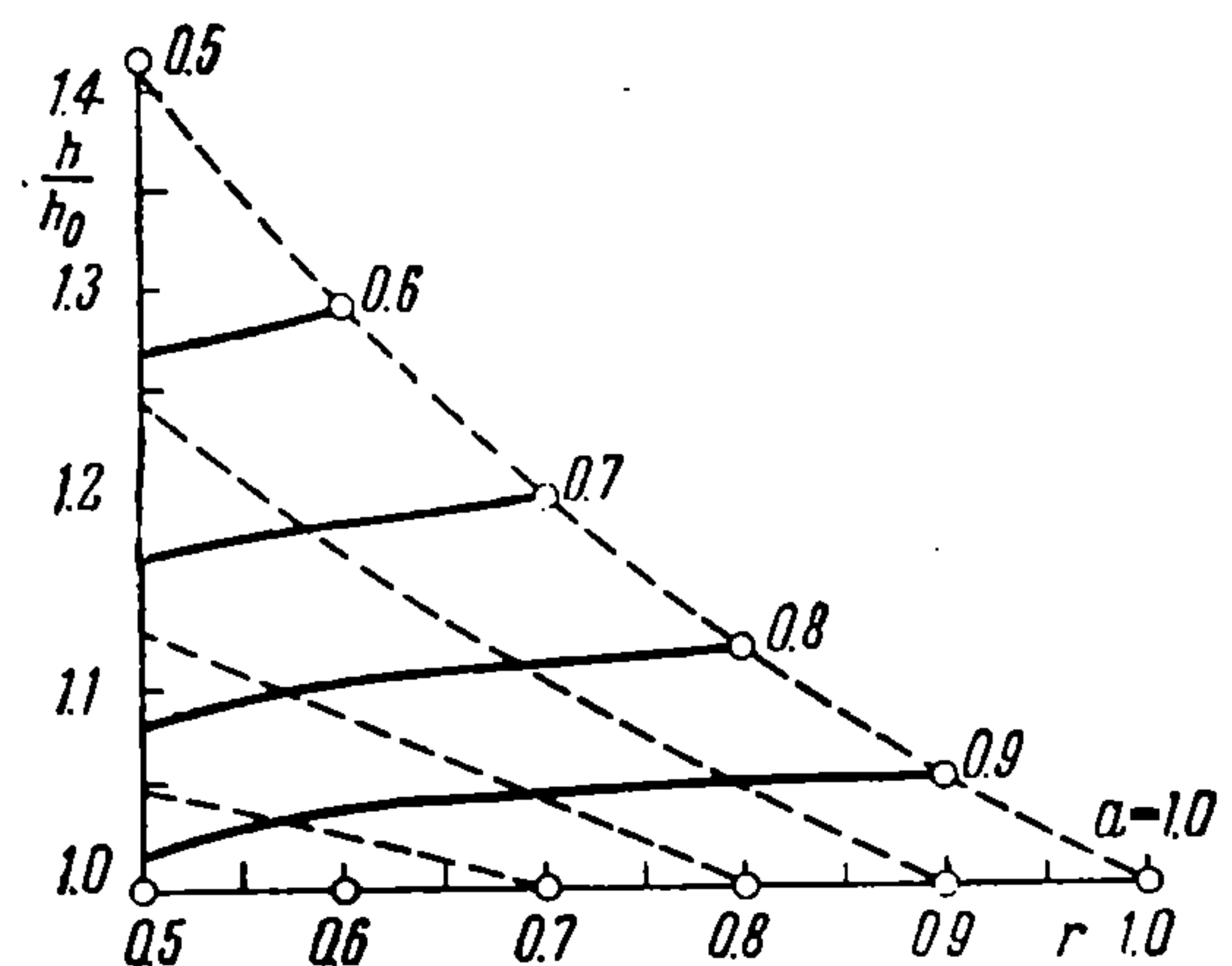
Обычное условие несжимаемости материала выражается теперь так:

$$\frac{1}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial a} + v \frac{\partial h}{\partial r} \right) + (1 - \mu) \frac{v}{r} = 0 \quad (12)$$

Полученная система состоит из четырех уравнений и содержит четыре искомые функции  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $v$ ,  $h$ . Она также относится к гиперболическому типу и имеет два семейства  $r_0$  и  $a$  действительных характеристик.



Фиг. 3



Фиг. 4

Семейство  $r_0$  определяется дифференциальными уравнениями

$$\frac{dv}{v} = -\mu \frac{dr}{r}, \quad \frac{dH}{H} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{dr}{r} - \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} \quad (13)$$

а семейство  $a$  дается дифференциальными уравнениями

$$dr = v da, \quad \frac{dH}{H} = \mu \frac{dr}{r} \quad (14)$$

Эти уравнения вместе с начальными и граничными условиями позволяют получить решение в замкнутой форме.

Если постоянный параметр  $\mu \neq 1$ , то удобно применять величины

$$\rho^m = r^{1+\mu}, \quad \rho_0^m = r_0^{1+\mu}, \quad \alpha^m = 1 - a^{1+\mu}$$

$$m = \frac{1 + \mu}{1 - \mu}$$

имея в виду, что параметр  $m$  лежит в интервале от 3 до  $\infty$ . Переменные  $r$ ,  $r_0$  и  $a$  связаны между собой следующими соотношениями

$$\rho_0^m - \rho^m = \alpha^m \quad \text{или} \quad r_0^{1+\mu} - r^{1+\mu} = 1 - a^{1+\mu}$$

Компонента напряжения  $\sigma_1 = \sigma$  определяется так:

$$(1 - \mu) \frac{\sigma}{\sigma_s} = \frac{1}{\rho_0} - 1 + \frac{\alpha^m}{\rho_0} \int_1^{\rho_0} \frac{d\xi}{\alpha^m - \xi^m} \quad (15)$$

а радиальная скорость  $v$  и толщина  $h$  будут

$$v = \left(\frac{a}{r}\right)^\mu, \quad h = h_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1-\mu} \quad (16)$$

Интеграл, входящий в предыдущее выражение для значений

$$\mu = \frac{m - 1}{m + 1}$$

соответствующих целым значениям  $m$ , может быть выражен в элементарных функциях. Так, например, при  $\mu = 1/2$  или  $m = 3$  очевидно, что

$$\frac{\sigma}{2\sigma_s} = \frac{1}{\rho_0} - 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{3}\rho_0} \left[ \arctg \frac{\sqrt{3}\xi}{\xi + 2\alpha} + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{\xi^2 + \xi\alpha + \alpha^2}}{\xi - \alpha} \right]_1^{\rho_0}$$

Если же постоянный параметр  $\mu = 1$ , то решение той же задачи особенно просто. Переменные  $r$ ,  $r_0$  и  $a$  связаны между собой таким соотношением

$$r_0^2 - r^2 = 1 - a^2$$

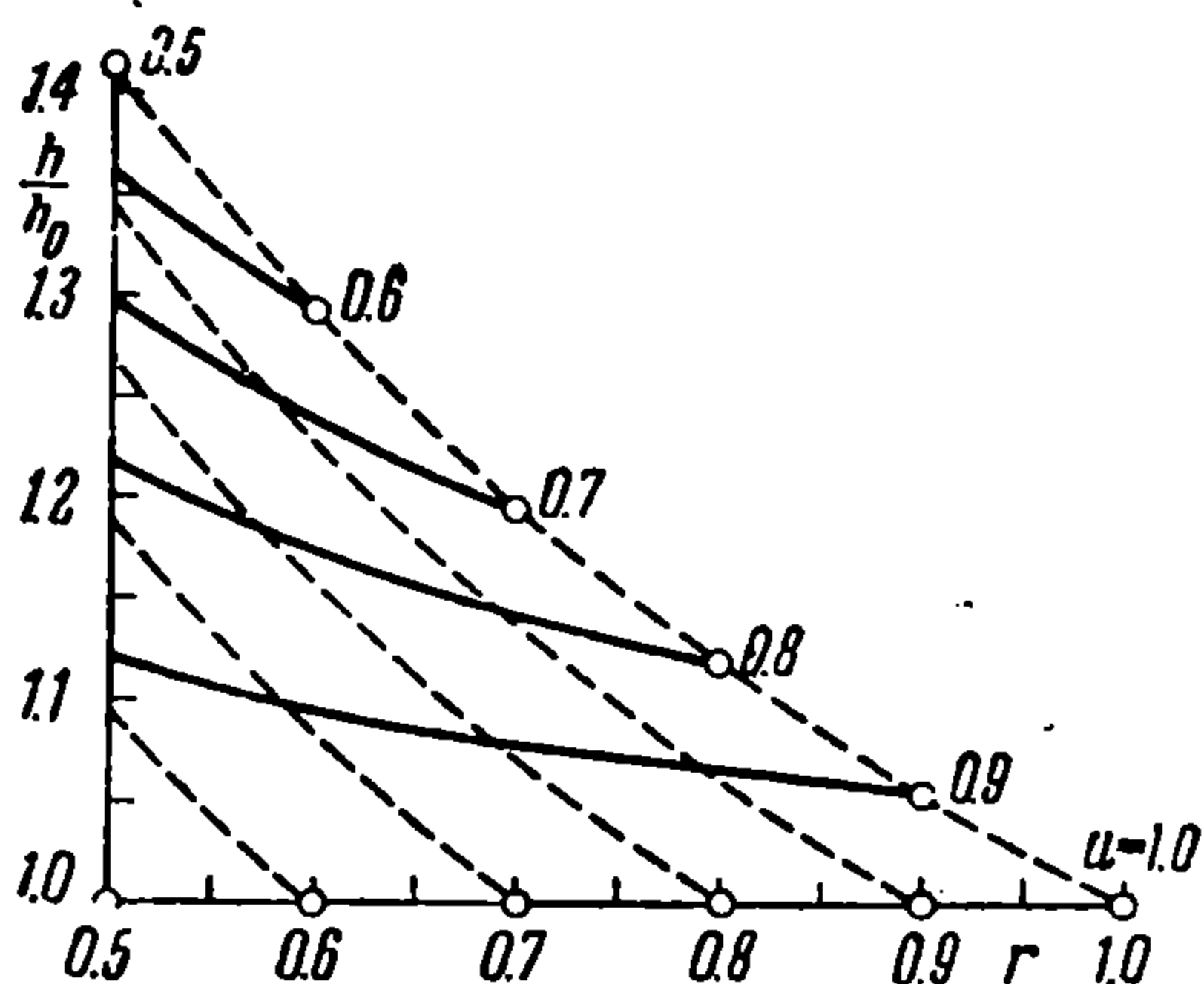
Компонента напряжения  $\sigma_1 = \sigma$  дается так

$$\frac{\sigma}{\sigma_s} = \ln \frac{a}{r}$$

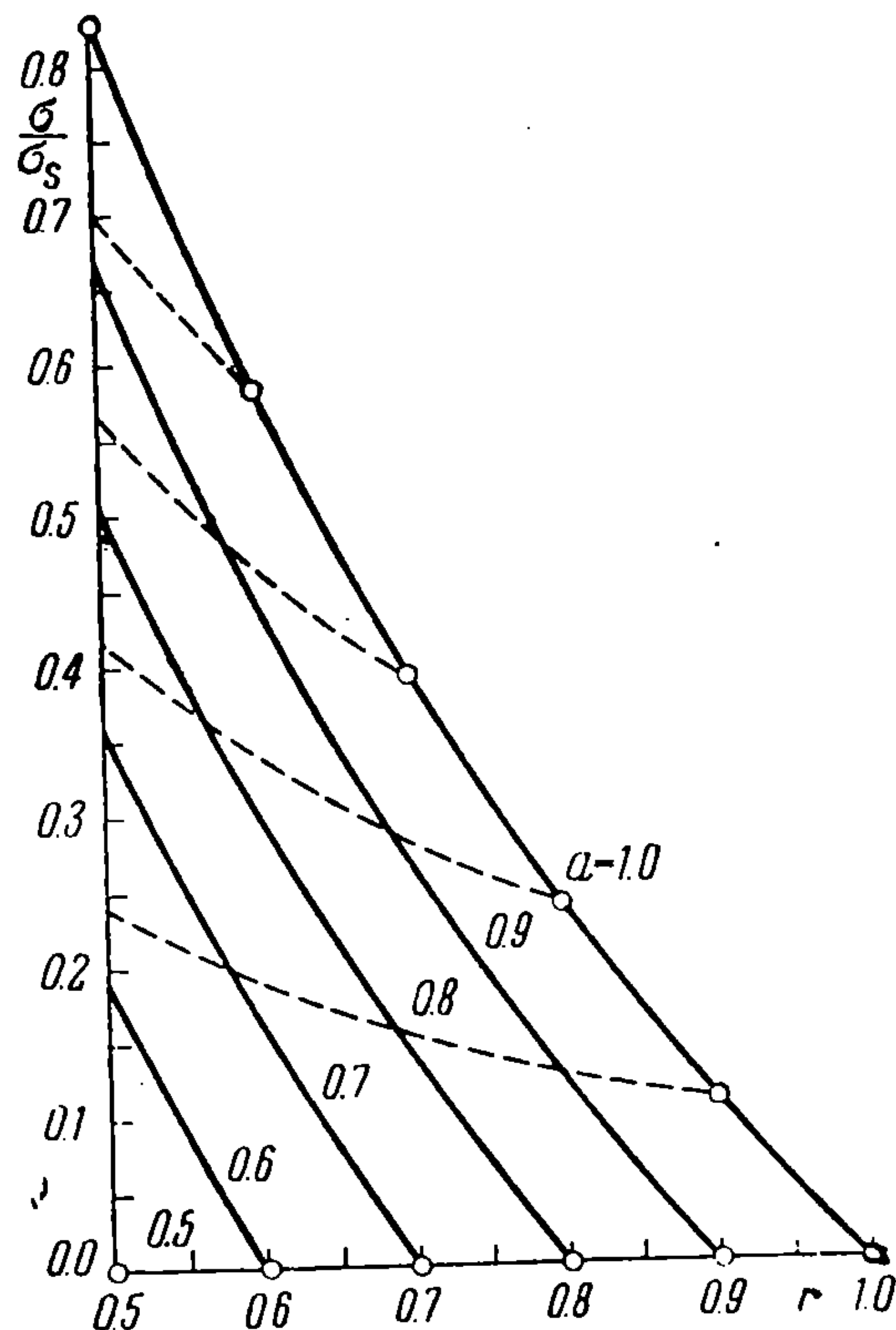
а радиальная скорость  $v$  и толщина  $h$  будут

$$v = \frac{a}{r}, \quad h = h_0$$

Результаты численного решения на основании (15) и (16) при  $\mu = 1/2$  нанесены на фиг. 5 и 6. Графики зависимостей  $\sigma_1 = \sigma$  и  $h$  от  $r$  для значений  $a$ , убывающих от 1.0 до 0.5 через 0.1, изображены сплошными кривыми, а графики зависимостей  $\sigma$  и  $h$  от  $r$  для значений  $r_0$  от 0.5 до 1.0 также через 0.1 показаны пунктирными кривыми. Сравнение величин  $\sigma$  и  $h$ , полученных путем численного решения дифференциальных уравнений (7) и (8) методом конечных разностей с теми же величинами  $\sigma$  и  $h$ , найденными из (15) и (16), показывает значительное их расхождение.



Фиг. 6



Фиг. 5

Поступила 2 VII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. Гостехиздат, 1956.  
2. Прагер В. Теория идеально пластических тел. ИИЛ, 1956.