Если бы только условие пластичности Мизеса являлось инвариантной физической характеристикой, то вопрос автоматически был бы решен в его пользу, однако со времен Треска известно, что это не так. Более того, любое условие пластичности сформулировано в инвариантах и является инвариантной характеристикой.

В рамках рассмотренных энергетических критериев не существует ни одного случая, когда условие пластичности Мизеса можно было бы предпочесть остальным.

Поступила 2 VII 1960 Воронежский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гостехтеоретиздат, М., 1950.
2. Хилл Р. Математическая теория пластичности. Гостехтеоретиздат, М., 1956.
3. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. ИИЛ, М., 1955.
3. Качанов Л. М. Основы теории пластичности, Гостехтеоретиздат, М., 1957.
5. Прагер В. Теория пластичности (обзор, помещенный в книге Прагер В. и Ходж Ф. Г. Теория идеально пластического тела). ИИЛ, М., 1956.
6. Ханди Б. Плоская задача теории пластичности. Машиностроение. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1955, № 3.
7. Ивлев Д. Д. К построению теории идеальной пластичности. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 6.
8. Ивлев Д. Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 1.
9. Ивлев Д. Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях. ДАН, 1959, т. 124, № 3.
10. Шестериков С. А. К построению теории идеально пластического тела. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 3.
11. Hencky H. Zur Theorie plajtischer Deformationen und der hierdurch im Material hervarqerufeneu Nachsparnungen. Z. angew. Math. und Mech, 1924, Bd. 4, H. 4.

О ПРИМЕНЕНИИ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ К ПЛОСКОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В. Л. Добровольский

(Москва)

Выводятся условия вещественности функции напряжений, пригодные для решения обратных задач. В качестве примера приводится несколько таких решений. Выводятся условия бигармоничности функции напряжений в пластической области.

1°. Рассматривается однородный изотропный материал, находящийся в пластическом состоянии. Компоненты напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

и условию текучести Губера — Мизеса (или Сен-Венана — Треска)

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2 \tag{1.2}$$

Здесь k — предел текучести при сдвиге [1].

Введем функцию напряжений F

$$\sigma_x = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{k}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{1.3}$$

Уравнение (1.1) удовлетворяется тождественно, и для отыскания функции F остается уравнение (1.2), которое в комплексных переменных ($z = x + iy$) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z}^2} = 1 \tag{1.4}$$

Чтобы решение имело физический смысл, функция напряжений должна быть вещественной, т. е. должно выполняться

$$F(z, \bar{z}) = \overline{F(z, \bar{z})} \tag{1.5}$$

Теперь уравнение (1.4) можно записать таким образом

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \exp[i\Theta] \tag{1.6}$$

Здесь $\Theta = \Theta(z, \bar{z})$ — вещественная функция. Интегрирование уравнения (1.6) дает

$$F(z, \bar{z}) = \int_{z_0}^{z} d\eta \int_{\eta_0}^{\eta} \exp[i\Theta(\xi, \bar{z})]\, d\xi + \overline{z\varphi(z)} + \overline{\chi(z)} \tag{1.7}$$

Теорема 1. Для того чтобы функция $F(z, \bar{z})$, определяемая соотношением (1.7), была вещественной, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{\partial^2 e^{i\Theta}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial^2 e^{-i\Theta}}{\partial z^2} \tag{1.8}$$

Доказательство. Производя над $F(z, \bar{z})$ и $\overline{F(z, \bar{z})}$ операцию

$$\frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} \tag{1.9}$$

и учитывая (1.5), получаем необходимость условия (1.8). Для доказательства достаточности условие (1.8) можно представить в виде:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = \frac{\partial^4 \bar{F}}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2}$$

Оператор (1.9) является бигармоническим. Следовательно, F может отличаться от $\bar{F}$ лишь на бигармоническое слагаемое. Но в выражении (1.7) имеется произвольное бигармоническое слагаемое, которое можно выбрать так, чтобы $F = \bar{F}$. Теорема доказана.

Условие (1.8) для практических целей удобно представить в декартовых координатах

$$\cos\Theta\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right) + \sin\Theta\left(-2\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y} - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2\right) = 0 \tag{1.10}$$

или в полярных (r, φ)

$$\cos(\Theta + 2\varphi)\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\varphi^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r}\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right) +$$
$$+ \sin(\Theta + 2\varphi)\left(\frac{2}{r^2}\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\right)^2 - \frac{2}{r}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r\,\partial\varphi} - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)^2\right) = 0 \tag{1.11}$$

Если ввести обозначение $\exp[i\Theta] = u + iv$, то уравнение (1.8) можно записать в таком виде:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{2v}{\sqrt{1 - v^2}}\left(v\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{1 - v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{1.12}$$

Теорема 2. Частное решение $\Theta = \Theta(z, \bar{z})$ уравнения (1.8), не содержащее произвольных параметров, определяет компоненты напряжения с точностью до постоянного гидростатического давления.

Доказательство. Теорема 1 и выражение (1.7) показывают, что решение $\Theta = \Theta(z, \bar{z})$, о котором говорится в теореме, определяет вещественную функцию напряжений $F(z, \bar{z})$ с точностью до слагаемого $pz\bar{z}$ ($p = \text{const}$), которое и соответствует постоянному гидростатическому давлению.

Особый интерес представляют функции напряжений, которые в пластической области удовлетворяют бигармоническому уравнению.

Теорема 3. Для того чтобы функция напряжений F была бигармонической в пластической области, необходимо и достаточно, чтобы функции $\Theta = \Theta(z, \bar{z})$ удовлетворяла системе уравнений

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{\partial\Theta}{\partial y} = 0, \qquad \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y} = 0 \tag{1.13}$$

Доказательство. Требование бигармоничности функции F, заданной выражением (1.7), дает с учетом (1.6)

$$\frac{\partial^4 F}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 e^{i\Theta}}{\partial \bar{z}^2} = 0 \tag{1.14}$$

Последнее условие в декартовых координатах приводит к (1.13) и тем будет доказана необходимость этого условия.

Проводя обратные рассуждения, от системы (1.13) приходим к равенству (1.14). Таким образом будет доказана достаточность и условия (1.13).

Отметим, что решения системы (1.13) автоматически являются решениями уравнений (1.8) или (1.10). Это совершенно очевидно.

Класс решений системы (1.13), вероятно, весьма узок, но он не пустой. В качестве примера можно привести следующие решения:

1. Случай $\Theta = \text{const}$. Это соответствует однородному полю напряжений.
2. Случай $\Theta = -2 \operatorname{arc\,tg} (y/x) + \text{const}$. Бигармоничность этого решения была использована Л. А. Галиным в работе [2].

Замечание 1. Уравнения (1.10) и (1.12) обладают следующими особенностями. Если $\Theta = \Theta(x, y)$— решение уравнения (1.10), то $\Psi_1 = -\Theta(-x, y)$ и $\Psi_2 = -\Theta(x, -y)$, а следовательно, и $\Psi_3 = \Theta(-x, -y)$ также являются его решениями. Если $w = u + iv$ есть решение уравнения (1.12), то и $w_1 = -u - iv$ также удовлетворяет уравнению (1.12)

Замечание 2. Если известно какое-либо решение уравнения (1.8), то не обязательно по формуле (1.7) находить функцию напряжений, а затем компоненты напряжения. Проще воспользоваться уравнениями равновесия (1.1) и тем фактом, что Θ однозначно определяет разность нормальных и касательную компоненту напряжения.

2°. Найдем несколько частных решений уравнений равновесия в пластической области, решая для этой цели уравнение (1.10) и (1.11).

1. Ищем решение в виде $\Theta = \Theta(y)$. Уравнение (1.10) перепишется таким образом

$$\frac{d^2\Theta}{dy^2} - \operatorname{tg}\Theta\left(\frac{d\Theta}{dy}\right)^2 = 0$$

Решая это уравнение, находим $\Theta = \arcsin(Ay + B)$. Ему соответствует распределение напряжений в полосе, сжатой между шероховатыми плитами [1,3]

$$\sigma_x = p - Ax - 2\sqrt{1 - (Ay + B)^2}, \quad \sigma_y = p - Ax, \quad \tau_{xy} = Ay + B \tag{2.1}$$

Напряжения даны отнесенными к величине k. Если же решение уравнения (1.10) ищется в виде $\Theta = \Theta(\alpha x + \beta y)$, то оно приводится к предыдущему поворотом системы координат.

2. Ищем решение в виде $\Theta = -2\varphi + R(r)$ Уравнение (1.12) преобразуется в уравнение

$$\frac{d^2R}{dr^2} - \operatorname{tg} R\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \frac{3}{r}\frac{dR}{dr} = 0$$

Решая его, находим

$$R = \arcsin\left(a - \frac{b}{r^2}\right), \quad \text{или} \quad \Theta = -2\varphi + \arcsin\left(a - \frac{b}{r^2}\right) \tag{2.2}$$

Ему соответствуют следующие компоненты напряжения

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r \\ \sigma_\varphi\end{matrix}\right\} = -2a\varphi + \sqrt{1 - a^2}\ln\left[\sqrt{1 - a^2}\sqrt{(1 - a^2)r^4 + 2abr^2 - b^2} + \right.$$

$$\left. + (1 - a^2)r^2 + ab\right] + a\arcsin\left(a - \frac{b}{r^2}\right) \mp \frac{1}{r^2}\sqrt{(1 - a^2)r^4 + 2abr^2 - b^2} + p \tag{2.3}$$

$$\tau_{r\varphi} = a - \frac{b}{r^2}$$

Компоненты смещения, найденные по упрощенной теории Генки — Мизеса [1], не зависящие от угла φ, имеют вид

$$u_r = \frac{c}{r^2}, \qquad u_\varphi = dr - \frac{c}{br}\sqrt{(1-a^2)r^4 + 2abr^2 - b^2} \tag{2.4}$$

Здесь $b \neq 0$. Если же $b = 0$, то

$$u_r = \frac{c}{r^2}, \qquad u_\varphi = dr - \frac{ac}{\sqrt{1-a^2}}\frac{1}{r} \tag{2.5}$$

Решение (2.3)—(2.4) интересно тем, что из всех известных замкнутых решений оно имеет наиболее общий вид. Придавая конкретные значения двум параметрам, входящим в него, получим ряд частных решений.

a) Для $a = 0$, $b = 0$. Осесимметричное поле напряжений [1]

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\varphi\end{matrix}\right\} = \ln r^2 \mp 1 + p, \qquad \tau_{r\varphi} = 0 \tag{2.6}$$

b) Для $a = 1$, $b = 0$. Напряженное состояние пластического клина, по щекам которого действуют равномерно распределенные нагрузки

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\varphi\end{matrix}\right\} = -2\varphi + p, \qquad \tau_{r\varphi} = 1 \tag{2.7}$$

c) Для $b = 0$. Суперпозиция двух предыдущих полей напряжений [1]

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\varphi\end{matrix}\right\} = -2a\varphi + \sqrt{1-a^2}\,(\ln r^2 \mp 1) + p, \qquad \tau_{r\varphi} = a \tag{2.8}$$

d) Для $a = 0$, $b = -c$. Наиболее общий случай осесимметричного распределения напряжений [1]

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\varphi\end{matrix}\right\} = \varepsilon\left[\ln(\sqrt{r^4-c^2} + r^2) \mp \frac{1}{r^2}\sqrt{r^4-c^2}\right] + p, \qquad \tau_{r\varphi} = \frac{c}{r^2} \qquad (\varepsilon = \mp 1) \tag{2.9}$$

e) Для $a = 1$, $b = c$. Новое решение, приведенное в нашей работе [3]

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\varphi\end{matrix}\right\} = -2\varphi + 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sqrt{2cr^2-c^2}}{c} \mp \frac{\sqrt{2cr^2-c^2}}{r^2} + p, \qquad \tau_{r\varphi} = 1 - \frac{c}{r^2} \tag{2.10}$$

Ему соответствуют смещения

$$u_r = \frac{c_1}{r^2}, \qquad u_\varphi = dr - \frac{c_1}{cr}\sqrt{2cr^2 - c^2} \tag{2.11}$$

На контурах $r = r_0$ выражения компонент напряжения и смещения имеют вид

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\varphi\end{matrix}\right\} = p_1 - 2\varphi \mp p_2, \qquad \tau_{r\varphi} = 1 - \frac{c}{r_0^2} \qquad (p_1, p_2 = \mathrm{const})$$

$$u_r = \frac{c_1}{r_0^2}, \qquad u_\varphi = dr_0 - \frac{c_1}{cr_0}\sqrt{2cr_0^2 - c^2}$$

Положив $d = 0$, при $r \to \infty$ получим

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\varphi\end{matrix}\right\} = -2\varphi + \pi + p, \qquad \tau_{r\varphi} = 1, \qquad u_r = 0, \qquad u_\varphi = -c_1\sqrt{\frac{2}{c}} \tag{2.12}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. Изд-во АН СССР, 1946.
2. Галин Л. А. Плоская упруго-пластическая задача. ПММ, 1946, т. X, вып. 3.
3. Добровольский В. Л. Задача о плоской деформации идеально пластического тела в комплексных переменных. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 2.