О ТЕНЗОРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

М. Э. Эглит
(Москва)

При изучении конечных деформаций в упруго-пластических телах представляется существенным выбор тензора, характеризующего полные деформации, а также определение отдельно тензоров упругих и пластических деформаций.

Независимо от того, каким тензором будут описываться полные деформации, подчиним тензоры упругих и пластических деформаций следующим условиям:

1°. Они должны быть введены аналогично тензору полных деформаций.

Действительно, тензор пластических деформаций является тензором полных деформаций для процессов, заканчивающихся полной разгрузкой. В то же время всякое деформированное состояние можно считать упругим, если относить его не к истинному начальному состоянию, а к состоянию, соответствующему полной разгрузке из данного.

2°. Тензоры упругих и пластических деформаций должны быть введены независимо один от другого. Пусть, например, деформации характеризуются тензором ε:

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij}\hat{\mathfrak{s}}^i\hat{\mathfrak{s}}^j$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \mathring{g}_{ij}) = \frac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i - \nabla_i w^\alpha \nabla_j w_\alpha) \tag{1}$$

причем $\hat{\mathfrak{s}}^i$ — векторы вмороженного в среду базиса лагранжевой системы координат ξ^i, $\hat{g}_{ij}$ — компоненты метрического тензора G в конечном (деформированном) состоянии среды, $\mathring{\mathfrak{s}}^i$, $\mathring{g}_{ij}$ — те же величины в начальном состоянии; w_i, w^i — компоненты вектора перемещения $\overline{\mathbf{w}} = w^i\,\hat{\mathfrak{s}}_i = w_i\hat{\mathfrak{s}}^i$.

Рассмотрим наряду с начальным состоянием (°) и конечным соостоянием (^) состояние (*), получающееся из (^) процессом полной разгрузки. Компоненты метрического тензора G в состоянии (*) обозначим $\overset{*}{g}_{ij}$, а векторы базиса лагранжевой системы координат $\overset{*}{\mathfrak{s}}_i$.

Тензоры упругих ε^e и пластических ε^p деформаций естественно ввести следующими формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon^e &= (\varepsilon_{ij})^e\,\hat{\mathfrak{s}}^i\hat{\mathfrak{s}}^j, \qquad (\varepsilon_{ij})^e = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \overset{*}{g}_{ij}), \\ \varepsilon^p &= (\varepsilon_{ij})^p\,\overset{*}{\mathfrak{s}}^i\overset{*}{\mathfrak{s}}^j, \qquad (\varepsilon_{ij})^p = \frac{1}{2}(\overset{*}{g}_{ij} - \mathring{g}_{ij}) \end{aligned} \tag{2}$$

При этом для ковариантных компонент тензоров ε^e, ε^p и ε, взятых соответственно в базисах $\hat{\mathfrak{s}}^i$, $\overset{*}{\mathfrak{s}}^i$ и $\hat{\mathfrak{s}}^i$, имеет место равенство:

$$(\varepsilon_{ij})^e + (\varepsilon_{ij})^p = \varepsilon_{ij} \tag{3}$$

Это равенство не зависит от выбора лагранжевой системы координат ξ^i и преобразуется при переходе от системы ξ^i к другой лагранжевой системе η^i по тензорному закону. Однако оно не может быть записано как тензорное соотношение между ε, ε^e и ε^p и не выполняется для контравариантных и смешанных компонент этих тензоров, а также для компонент, вычисленных в некоторой эйлеровой системе отсчета. Например, для смешанных компонент $(\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot j})^e$, $(\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot j})^p$ и $\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot j}$ имеем:

$$[\delta_{i\cdot}^{\cdot\alpha} - 2(\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot\alpha})^p][\delta_{\alpha\cdot}^{\cdot j} - 2(\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\cdot j})^e] = \delta_{i\cdot}^{\cdot j} - 2\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot j} \tag{4}$$

т. е.

$$\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot j} = (\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot j})^e + (\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot j})^p - 2(\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot\alpha})^p(\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\cdot j})^e \tag{5}$$

Таким образом, если характеризовать деформации величинами $\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot j}$, $(\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot j})^e$, $(\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot j})^p$, то для конечных деформаций упругие деформации не равны разности полных и пластических. Этот эффект существен и тогда, когда упругие деформации малы, если только пластические деформации конечны.

В качестве характеристики деформации можно использовать различные функции с нзора ε. Если полные деформации описываются тензором $\mathbf{T} = f(\varepsilon)$, то по условиям 1° и 2° следует принять:

$$\mathbf{T}^e = f(\varepsilon^e), \qquad \mathbf{T}^p = f(\varepsilon^p)$$

Можно, например, использовать тензоры «относительных удлинений» $\mathbf{E}$ и «истинных деформаций» $\mathbf{H}$, определяемые формулами

$$\mathbf{E} = \mathbf{G} - \sqrt{\mathbf{G} - 2\varepsilon} = E_{ij}\hat{\mathrm{э}}^i\hat{\mathrm{э}}^j, \qquad \mathbf{H} = -\frac{1}{2}\ln(\mathbf{G} - 2\varepsilon) = h_{ij}\hat{\mathrm{э}}^i\hat{\mathrm{э}}^j \tag{6}$$

Главные значения этих тензоров особенно просто связаны с начальной l_i° и конечной l_i длиной отрезка, расположенного вдоль i-той главной оси тензора деформации

$$E_i = \frac{l_i - l_i^\circ}{l_i}, \qquad h_i = \ln\frac{l_i}{l_i^\circ}$$

Величины E_i и h_i часто применяются в экспериментальных работах. При этом упругие и пластические деформации следует определить формулами

$$\mathbf{E}^e = \mathbf{G} - \sqrt{\mathbf{G} - 2\varepsilon^e}, \quad \mathbf{E}^p = \mathbf{G} - \sqrt{\mathbf{G} - 2\varepsilon^p}, \quad E_i^e = \frac{l_i - l_i^p}{l_i}, \quad E_i^p = \frac{l_i^p - l_i^\circ}{l_i^p} \tag{7}$$

и также (8)

$$\mathbf{H}^e = -\frac{1}{2}\ln(\mathbf{G} - 2\varepsilon^e), \quad \mathbf{H}^p = -\frac{1}{2}\ln(\mathbf{G} - 2\varepsilon^p), \quad h_i^e = \ln\frac{l_i}{l_i^p}, \quad h_i^p = \ln\frac{l_i^p}{l_i^\circ}$$

Тензоры $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ являются нелинейными функциями тензора деформаций ε. В различных задачах может оказаться удобным использовать и другие функции от ε, например, Θ:

$$\Theta = \varepsilon(\mathbf{G} - 2\varepsilon)^{-1} = \frac{1}{2}[(\mathbf{G} - 2\varepsilon)^{-1} - \mathbf{G}] \tag{9}$$

Контравариантные компоненты тензора Θ в базисе $\hat{\mathrm{э}}_i$ просто выражаются через контравариантные компоненты метрического тензора $\mathbf{G}$ в базисах $\hat{\mathrm{э}}_i$ и $\mathring{\mathrm{э}}_i$:

$$\Theta = \theta^{ij}\hat{\mathrm{э}}_i\hat{\mathrm{э}}_j, \qquad \theta^{ij} = \frac{1}{2}(\mathring{g}^{ij} - \hat{g}^{ij})$$

Полагаем

$$\Theta^e = \varepsilon^e(\mathbf{G} - 2\varepsilon^e)^{-1} = (\theta^{ij})^e\hat{\mathrm{э}}_i\hat{\mathrm{э}}_j, \qquad (\theta^{ij})^e = \frac{1}{2}(\overset{*}{g}{}^{ij} - \hat{g}^{ij})$$

$$\Theta^p = \varepsilon^p(\mathbf{G} - 2\varepsilon^p)^{-1} = (\theta^{ij})^p\overset{*}{\mathrm{э}}_i\overset{*}{\mathrm{э}}_j, \qquad (\theta^{ij})^p = \frac{1}{2}(\mathring{g}^{ij} - \overset{*}{g}{}^{ij})$$

Таким образом будем иметь

$$\theta^{ij} = (\theta^{ij})^e + (\theta^{ij})^p \tag{10}$$

Для соответствующих ковариантных и смешанных компонент аналогичные равенства не выполняются. Из (4) и (8) видно, что если главные оси тензоров упругой и пластической деформаций совпадают, т. е. матрицы

$$\|\delta_{i\cdot}^{\cdot j} - 2(\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot j})^e\|, \qquad \|\delta_{i\cdot}^{\cdot j} - 2(\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot j})^p\|$$

перестановочны, то верно равенство

$$(h_{i\cdot}^{\cdot j})^e + (h_{i\cdot}^{\cdot j})^p = h_{i\cdot}^{\cdot j} \tag{11}$$

связывающее смешанные компоненты тензоров:

$$\mathbf{H} = h_{i\cdot}^{\cdot j}\hat{\mathrm{э}}^i\hat{\mathrm{э}}_j, \qquad \mathbf{H}^e = (h_{i\cdot}^{\cdot j})^e\hat{\mathrm{э}}^i\hat{\mathrm{э}}_j, \qquad \mathbf{H}^p = (h_{i\cdot}^{\cdot j})^p\,\overset{*}{\mathrm{э}}{}^i\overset{*}{\mathrm{э}}_j$$

Это будет всегда, когда в процессе деформирования главные оси деформации в частице не поворачиваются. Следовательно, при описании простых нагружений и некоторых видов сложных нагружений можно, используя тензор $\mathbf{H}$, считать, что сумма упругой и пластической деформации равна полной деформации. Но обобщать это на случай произвольных деформаций нельзя. Соотношения же (3) и (10) верны всегда.

Использование величин ε_{ij} и θ^{ij} удобно и в другом отношении. Именно, тензоры деформации нужно выбирать так, чтобы законы связи напряжений и деформаций имели наиболее удобный вид. Свойства этих связей во многом определяются термодинамикой, в частности, большое значение имеет выражение для элементарной работы внутренних сил. Известно, что элементарная работа внутренних сил, рассчитанная на единицу массы, равна

$$dA^{(i)} = -\frac{1}{\rho} p^{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta} \tag{12}$$

Здесь ρ — плотность среды, $\mathbf{P} = p^{\alpha\beta}\hat{\mathfrak{s}}_\alpha\hat{\mathfrak{s}}_\beta = p_{\alpha\beta}\hat{\mathfrak{s}}^\alpha\hat{\mathfrak{s}}^\beta$ — тензор напряжений, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — ковариантные компоненты тензора ε в базисе $\hat{\mathfrak{s}}^\alpha$.

Так же просто выражается работа $dA^{(i)}$ через введенные величины $\theta^{\alpha\beta}$; имеем

$$dA^{(i)} = -\frac{1}{\rho} p_{\alpha\beta} d\theta^{\alpha\beta} \tag{13}$$

Действительно,

$$p^{ij}d\varepsilon_{ij} = p_{\alpha\beta}\hat{g}^{\alpha i}\hat{g}^{\beta j}d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}p_{\alpha\beta}\hat{g}^{\alpha i}\hat{g}^{\beta j}d\hat{g}_{ij} = -\frac{1}{2}p_{\alpha\beta}d\hat{g}^{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}d\theta^{\alpha\beta}$$

Если среда такова, что главные оси тензора напряжений совпадают с главными осями тензора деформаций (как, например, в изотропном упругом теле), то

$$dA^{(i)} = -\frac{1}{\rho} p^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\, dh^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} \tag{14}$$

В противном случае это неверно, и можно показать, что тогда вообще не существует тензора $\mathbf{L} = l_{i\cdot}^{\cdot j}\hat{\mathfrak{s}}^i\hat{\mathfrak{s}}_j = f(\varepsilon)$ такого, чтобы выполнялось равенство

$$dA^{(i)} = -\frac{1}{\rho} p^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\, dl^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$$

Представление работы внутренних сил в форме (12), (13) или (14) приводит к тому, что соответствующие компоненты тензора $(1/\rho)\,\mathbf{P}$ обладают потенциалом, являясь производными от свободной энергии по упругим деформациям.

Итак, из всех рассмотренных выше характеристик деформации величины $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\theta^{\alpha\beta}$ и в ограниченной степени $h_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}$ обладают двумя удобными свойствами:

1. Законы упругости для любой упруго-пластической среды представляются в этих переменных в наиболее симметричном виде:

$$\text{либо } \frac{1}{\rho}p^{\alpha\beta} = \frac{\partial F}{\partial(\varepsilon_{\alpha\beta})^e}, \quad \text{либо } \frac{1}{\rho}p_{\alpha\beta} = \frac{\partial F}{\partial(\theta^{\alpha\beta})^e}, \quad \text{либо } \frac{1}{\rho}p^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} = \frac{\partial F}{\partial(h_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta})^e} \tag{15}$$

(Последнее соотношение в том случае, если верно (14).)

2. Упругие деформации равны разности полных и пластических и поэтому удобно изображаются на диаграммах «напряжение — полная деформация». Действительно, линии разгрузки на этих диаграммах дают график законов (15), сдвинутый относительно начала координат на величину пластических деформаций.

В некоторых случаях, однако, величины $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\theta^{\alpha\beta}$ не являются наиболее удобными характеристиками деформаций.

Пусть, например, исследуется вопрос о влиянии пластического деформирования на упругие свойства среды. Покажем на простом примере, что правильный выбор характеристики деформации имеет существенное значение.

Рассмотрим простое растяжение цилиндрического образца с начальной длиной l°. Пусть l — его конечная длина, l^* — соответствующая остаточная длина, а деформация образца характеризуется относительным удлинением $\mathring{E} = (l - l^\circ)/l^\circ$. Тогда (по условиям 1° и 2°)

$$\mathring{E}^p = \frac{l^* - l^\circ}{l^\circ}, \qquad \mathring{E}^e = \frac{l - l^*}{l^*}$$

Рассмотрим одновременно еще три характеристики упругой деформации:

$$\widetilde{E}^e = \mathring{E} - \mathring{E}^p = \mathring{E}^e\frac{l^*}{l^\circ}$$

$$(\varepsilon_{11})^e = \frac{1}{2}\left[(1+\mathring{E}^e)^2 - 1\right](1+\mathring{E}^p)^2$$

$$(\theta^{11})^e = \frac{1}{2}\left[1 - (1+\mathring{E}^e)^{-2}\right](1+\mathring{E}^p)^{-2}$$

Две последние формулы дают выражение $(\varepsilon_{11})^e$ и $(\theta^{11})^e$ через относительные удлинения при условии, что оси лагранжевой системы координат ξ^i совпадают по направлению с главными осями деформации, а ось ξ^1 — с осью образца.

Предположим, что упругие относительные удлинения удовлетворяют одному и тому же линейному закону Гука независимо от величины пластических деформаций, т. е. что $\mathring{E}^e = k\sigma$.

Тогда при использовании величин $\widetilde{E}^e$, $(\varepsilon_{11})^e$, $(\theta^{11})^e$ законы упругости для этой среды имеют вид

$$\widetilde{E}^e = k\frac{l^*}{l^\circ}\sigma = k(1+\mathring{E}^p)\sigma$$

$$(\varepsilon_{11})^e = \frac{1}{2}[(1+k\sigma)^2-1](1+\mathring{E}^p)^2$$

$$(\theta^{11})^e = \frac{1}{2}[1-(1+k\sigma)^{-2}](1+\mathring{E}^p)^{-2}$$

т. е. явно содержат характеристики пластической деформации.

Таким образом, вопрос о зависимости упругих законов от пластического деформирования связан не только с физическими процессами, происходящими в среде, но и с выбором характеристик деформации.

Введем следующее определение.

Упруго-пластическая среда является средой, упругие свойства которой не меняются при пластическом деформировании, если ее свободная энергия F может быть представлена в виде:

$$F(\overset{\circ}{g}_{ij}, (\varepsilon_{ij})^e, (\varepsilon_{ij})^p, \chi_s, T) = F_1(\overset{*}{g}_{ij}, (\varepsilon_{ij})^e, T) + F_2(\overset{\circ}{g}_{ij}, (\varepsilon_{ij})^p, \chi_s, T) \qquad (16)$$

$$\overset{*}{g}_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + 2(\varepsilon_{ij})^p, \qquad (\varepsilon_{ij})^e = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \overset{*}{g}_{ij})$$

Здесь $\overset{*}{g}_{ij}$ — компоненты метрического тензора G в состоянии (*), которое играет роль начального состояния при повторном нагружении; параметры χ_s представляют собой характеристики пластического состояния; они зависят от пути пластического деформирования.

Для такого тела законы упругости, записанные в обычной форме

$$\frac{1}{\rho}p^{\alpha\beta} = \frac{\partial F_1}{\partial(\varepsilon_{\alpha\beta})^e}$$

содержат характеристики пластической деформации и изменяются при пластическом деформировании.

Однако инварианты тензора $(1/\rho)$ **P** зависят в этом случае только от инвариантов тензора упругих деформаций ε^e и температуры T, а законы упругости, записанные в смешанных компонентах соответствующих тензоров, не зависят от пластических деформаций:

$$F_1 = F_1((\overset{*}{\varepsilon}{}_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta})^e, T), \qquad \frac{1}{\rho}\overset{*}{p}{}_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot} = \frac{\partial F_1}{\partial(\overset{*}{\varepsilon}{}_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta})^e} \qquad (17)$$

$(\overset{*}{\varepsilon}{}_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta})^e$ и $\overset{*}{p}{}_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}$ связаны с $(\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta})^e$ и $p_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}$ формулами

$$(\overset{*}{\varepsilon}{}_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta})^e = (\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma})^e[\delta_{\gamma\cdot}^{\cdot\beta} + 2(\varepsilon_{\gamma\cdot}^{\cdot\beta})^e], \qquad \overset{*}{p}{}_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot} = p_{\cdot\gamma}^{\alpha\cdot}[\delta_{\cdot\beta}^{\gamma\cdot} - 2(\varepsilon_{\cdot\beta}^{\gamma\cdot})^e]$$

Итак, влияние пластичности на упругие свойства тела удобнее проследить, если строить линии разгрузки на плоскости переменных $(1/\rho)\,p_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}$, $(\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta})^e$. Так как

$$(\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta})^e \neq \varepsilon_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta} - (\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta})^p$$

то линии разгрузки на диаграммах $(1/\rho)\,p_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}$, $\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}$ изменяют свой вид при пластическом деформировании для тел с упругим законом (17).

В заключение выражаю глубокую благодарность Л. И. Седову за многочисленные обсуждения рассмотренных здесь вопросов.

Поступила 7 VI 1960