шемся движении интегрированием уравнений (3.1), будем иметь

$$\Lambda_0 = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} T_0 dt = \frac{\omega}{4\pi}\int_0^{2\pi/\omega} [M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + I\dot{\varphi}^2]\, dt =$$

$$= \frac{F_2}{2M\omega^2}\left(1 + \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_2\frac{Mr^2}{I}\right)\cos\alpha + C_1 \tag{3.2}$$

Здесь $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ — по-прежнему относительный сдвиг фаз вращения вибраторов и C_1 — не зависящая от угла α величина.

Приравнивая нулю производную $d\Lambda_0 / d\alpha$, приходим к уравнению $\sin\alpha = 0$, имеющему два существенно различных корня $(\alpha)_1 = 0$ и $(\alpha)_0 = \pi$.

Очевидно, что в случае вращения вибраторов в одинаковых направлениях ($\sigma_1\sigma_2 = 1$) первому корню отвечает минимум функции $\Lambda_0(\alpha)$ при условии, что соблюдается неравенство

$$Mr^2 / I > 2 \tag{3.3}$$

Второму корню при этом отвечает максимум функции $\Lambda_0(\alpha)$. При несоблюдении условия (3.3) справедливо противоположное заключение.

В случае вращения вибраторов в противоположных направлениях ($\sigma_1\sigma_2 = -1$) значению $\alpha = (\alpha)_1 = 0$ всегда отвечает максимум, а значению $\alpha = (\alpha)_2 = \pi$ — минимум функции $\Lambda_0(\alpha)$.

В соответствии с интегральным признаком, при $\sigma_1\sigma_2 = 1$ и выполнении условия (3.3) должно быть устойчиво только синфазное, а при невыполнении условия (3.3) — только противофазное вращение вибраторов; в случае $\sigma_1\sigma_2 = -1$ устойчивым должно быть только противофазное вращение. Нетрудно убедиться, что и в данном случае налицо полное совпадение результатов, полученных с помощью интегрального признака и найденных методами Пуанкаре и Ляпунова [2,3].

Поступила 6.VI. 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Блехман И. И. Самосинхронизация вибраторов некоторых вибрационных машин. Инженерный сб., 1953, т. XVI.
2. Блехман И. И. О самосинхронизации механических вибраторов. Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1958, № 6.
3. Блехман И. И. Теория самосинхронизации механических вибраторов и ее приложения. Тр. II Всесоюзного совещания по основным проблемам теории машин и механизмов, Динамика машин. Машгиз, 1960.

О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК, НАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ

Б. Н. Бублик, В. И. Меркулов (Киев)

Рассматривается динамическая устойчивость тонкой упругой оболочки, внутренняя полость которой частично или полностью наполнена идеальной несжимаемой жидкостью. Используется работа Н. Н. Моисеева [1], в которой рассматривались собственные колебания упругой балки с жидкостью, а также работы [2,3], в которых изложены вопросы динамической и статической устойчивости упругих систем без жидкости.

1. Указанная задача сводится к решению вариационного уравнения

$$\delta\int_{t_0}^{t} (T'' - A'' - U'')\, dt = 0 \tag{1.1}$$

где T'' и U'' — кинетическая и потенциальная энергии «возмущений» системы

$$T'' = \frac{1}{2}\left\{\iint_{\Sigma} m_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] d\sigma + \rho\iint_{\Sigma+S} \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma\right\} \tag{1.2}$$

$$U'' = \frac{1}{2}\iint_{\Sigma} [T_1\varepsilon_1 + T_2\varepsilon_2 + 2S\omega - M_1\varkappa_1 - M_2\varkappa_2 - 2H\tau]\, d\sigma + \iint_{S}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 d\sigma \tag{1.3}$$

Количество A'' представляет собой работу некоторой приведенной нагрузки, возникающей в результате возмущения системы, на перемещениях возмущения. Определение приведенной нагрузки осуществляется как и в работе [2]. В случае, когда при определении этих нагрузок инерционными членами можно пренебречь, а также когда начальное (исследуемое на устойчивость) состояние оболочки близко к безмоментному, они будут:

$$F_\beta = \frac{1}{PQ}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}(\varepsilon_1 P T_2^0) - T_1^0 \frac{\partial}{\partial\beta}(\varepsilon_1 P) + \frac{\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon_2 P S^\circ) + S^\circ \frac{\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon_2 Q) - q_\beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\right]$$

$$F_n = T_1^\circ \varkappa_1 + T_2^\circ \varkappa_2 \tag{1.4}$$

$$F_\alpha = \frac{1}{PQ}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon_2 Q T_1^\circ) - T_2^\circ \frac{\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon_2 Q) + \frac{\partial}{\partial\beta}(\varepsilon_1 Q S^\circ) + S^\circ \frac{\partial}{\partial\beta}(\varepsilon_1 p) - q_\alpha(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\right]$$

Тогда

$$A'' = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}[F_\alpha u + F_\beta v + F_n w]\, d\sigma \tag{1.5}$$

Здесь и в дальнейшем Σ — срединная поверхность; α, β — криволинейные ортогональные координаты срединной поверхности оболочки; n — нормаль к срединной поверхности; P и Q — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности; u, v, w — перемещения возмущения оболочки по осям α, β и n соответственно; m_0 и ρ — массовые плотности единицы поверхности оболочки и единицы объема жидкости; ε_1, ε_2, ω, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и τ — относительные деформации оболочки, выражающиеся через u, v и w по известным формулам линейной теории оболочек; T_1, T_2, S, M_1, M_2 и H — внутренние усилия и моменты оболочки, определяющиеся через относительные деформации законом Гука; T_1°, T_2°, S° — усилия невозмущенной оболочки, которыми характеризуется начальное безмоментное состояние оболочки; q_α, q, q_n — внешние поверхностные нагрузки, действующие на оболочку, которые могут зависеть от времени; a — ускорение поступательного движения системы; S — свободная поверхность жидкости в состоянии покоя; V — объем, занятый жидкостью; φ — потенциал скорости жидкости в этой области; $\Sigma^{(1)}$— смоченная поверхность оболочки; Σ_1 — та часть границы объема V, на которой производная $\partial\varphi/\partial h$ известна, Σ_2— та часть границы V, на которой функция φ известна, G — функция Грина задачи Неймана — Дирихле для уравнения Лапласа в области V.

Потенциал φ может быть выражен через функцию G так:

$$\varphi = \iint\limits_{\Sigma_1} G\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma - \iint\limits_{\Sigma_2}\frac{\partial G}{\partial n}\varphi\, d\sigma \tag{1.6}$$

Решение уравнения (1.1) приводится к решению четырех дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) + \frac{1-\nu^2}{Eh}\left[F_\alpha - m_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = 0\\
L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) + \frac{1-\nu^2}{Eh}\left[F_\beta - m_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] = 0\\
L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) + \frac{1-\nu^2}{Eh}\left[F_n - m_0\frac{\partial^2 w}{\partial t} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right] = 0\\
\Delta\varphi = 0
\end{gathered} \tag{1.7}$$

при граничных условиях, соответствующих закреплению краев оболочки, а также при условиях для потенциала скорости жидкости на границе области V. Закрепления краев оболочки могут быть различными и поэтому соответствующие им граничные условия здесь не выписываются. Условия для φ будут

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + a\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{на свободной поверхности } z = 0 \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{на смоченной срединной поверхности оболочки} \tag{1.9}$$

Входящие в уравнение (1.7) операторы $L_{11}, \ldots, L_{33}$ представляют собой левые части уравнений теории оболочки [4,5].

2. Нетрудно ввести в рассмотрение операторы L, M, E и N, а также вектор $X(u, v, w, \varphi)$ такие, что уравнения (1.7) могут быть представлены в виде:

$$LX + MX + E\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + N\frac{\partial X}{\partial t} = 0 \tag{2.1}$$

Операторы L, M, E, N удовлетворяют условиям существования и единственности обобщенного решения по теореме 3 работы Вишика [6].

3. В качестве приложения построенной выше теории рассмотрим вопрос о динамической устойчивости круговой цилиндрической оболочки, наполненной жидкостью, с шарнирно опертыми краями.

Введем цилиндрическую систему координат r, z, θ, ориентированную обычным образом. Пусть рассматриваемый цилиндр радиуса R помещен между плоскостями $z = 0$ и $z = l$. Внутренняя полость цилиндра частично наполнена жидкостью плотности ρ до уровня $z = l_1$. Криволинейные координаты α и β выберем так, что $\beta = \theta_1$, $\alpha = z / R$, где θ — угловая координата цилиндрической системы координат.

Пусть рассматриваемая цилиндрическая оболочка находится под действием распределенной радиальной нагрузки $q_n(\alpha, t)$. Это может быть, например, гидростатическая нагрузка. Кроме того, оболочка подвергается действию продольной распределенной нагрузки $q_\alpha(\alpha, t)$ и сжимающей продольной силы $F(t)$.

Для рассматриваемого случая коэффициенты первой квадратичной формы будут равны $P = Q = R$, а кривизны $K_1 = 0$, $K_2 = 1/R$.

Будем считать, что начальное состояние безмоментное и характеризуется внутренними нормальными усилиями T_1°, T_2°.

Интегрируя уравнения безмоментной цилиндрической оболочки, получим:

$$T_1^\circ = R\int_0^\alpha q_\alpha(\alpha, t)\, d\alpha + \frac{1}{2\pi R}F(t), \qquad T_2^\circ = Rq_n(\alpha, t) \tag{3.1}$$

Относительные деформации цилиндрической оболочки будут такими:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w\right), \qquad \varkappa_1 = \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \qquad \varkappa_2 = -\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + w\right) \tag{3.2}$$

Составляющие приведенной нагрузки определяются из формул (1.4)

$$F_\alpha = \frac{1}{R^2}(T_1^\circ - T_2^\circ)\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w\right) - \frac{1}{R^2}\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 T_1^\circ}{\partial \alpha^2}$$

$$F_\beta = \frac{1}{R^2}(T_2^\circ - T_1^\circ)\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\, \partial \beta}, \qquad F_n = -\frac{1}{R^2}\left\{T_1^\circ\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + T_2^\circ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + w\right)\right\} \tag{3.3}$$

Обратимся теперь к определению потенциала скорости движения жидкости φ. Смягчая краевые условия на сечении $z = 0$ и пренебрегая волновым движением на свободной поверхности, будем считать, что в сечениях $z = 0$ и $z = l_1$ нам известно добавочное давление p, которое вызвано возмущением рассматриваемой системы.

Очевидно, что такое предположение оправдывается в случае длинных цилиндров, так как при этом энергия волнового движения мала по сравнению с общей энергией системы и, кроме того, длинные цилиндры теряют устойчивость по неосесимметричной деформации, когда

$$\iint_\Sigma w\, d\sigma = 0$$

и, значит, отсутствует вытеснение жидкости, т. е. $p = 0$. Следовательно, на сечениях $z = 0$ и $z = l_1$ известна функция φ; эти сечения возьмем за область Σ_2. На боковой поверхности производная известна $\partial\varphi / \partial n = \partial w / dt$, поэтому в качестве Σ_1 возьмем смоченную поверхность оболочки.

Чтобы определить φ по уравнению (1.6), выпишем функцию Грина G в цилиндре $0 \leqslant \alpha \leqslant l_1 / R$, $r \leqslant R$, при условии, что $\partial G / \partial r = 0$, когда $r = R$ и $G = 0$, когда $\alpha = 0$ или $\alpha = l_1 / R$

$$G = \frac{8}{l_1}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}{}' \sin(\mu_p\alpha)\sin(\mu_p\alpha')\, g_{pq}(r, r')\cos(\beta - \beta')\, q \tag{3.4}$$

где

$$\mu_p = \frac{p\pi R}{l_1}, \qquad g_{pq}(r, r') = \frac{I_q(\mu_p r'/R)}{I_q'(\mu_p)}\left[I_q'(\mu_p)\,K_q\left(\mu_p \frac{r}{R}\right) - I_q\left(\mu_p \frac{r}{R}\right)K_q'(\mu_p)\right]$$

Штрих над суммой означает, что нужно брать половину нулевого члена.

Исключая теперь φ из третьего уравнения системы (1.7), получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + \frac{1-\nu^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \nu\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{1-\nu}{Eh}\left[F_\alpha - m_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = 0 \\
\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{1-\nu}{Eh}\left[F_\beta - m_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] = 0
\end{gathered} \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered}
\nu\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial v}{\partial\beta} + c^2\nabla^2\nabla^2 w + \frac{1-\nu^2}{Eh}R^4\left\{\frac{1}{R^2}\left[T_1^\circ\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + T_2^\circ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + w\right)\right] + \right. \\
\left. + m_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta\iint\limits_{\Sigma_1} G\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,d\sigma\right\} = 0
\end{gathered} \tag{3.6}$$

В теории оболочек [2] обычно пренебрегают тангенциальными составляющими сил инерции $m_0\partial^2 u/\partial t^2$, $m_0\partial^2 v/\partial t^2$ и приведенной нагрузки F_α и F_β по сравнению с нормальными составляющими $m_0\partial^2 w/\partial t^2$ и F_n.

Если воспользоваться этим упрощением, а также ввести новую неизвестную функцию $\Phi(\alpha, \beta, t)$, связанную со старыми неизвестными соотношениями

$$u = c^2\left(\frac{\partial^5\Phi}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^5\Phi}{\partial\alpha\,\partial\beta^4}\right) + \frac{\partial^3\Phi}{\partial\alpha^2\partial\beta} - \nu\frac{\partial^3\Phi}{\partial\alpha^3}$$

$$v = 2c^2\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\beta}\nabla^2\Phi - (2+\nu)\frac{\partial^3\Phi}{\partial\alpha^2\partial\beta} + \frac{\partial^3\Phi}{\partial\beta^3}, \qquad w = \nabla^2\nabla^2\Phi$$

то первые два уравнения будут выполнены тождественно, а третье уравнение будет служить для определения Φ

$$\begin{gathered}
(\nabla^2 + 1)^2\,\nabla^2\nabla^2\Phi - (1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\nabla^2\Phi + \frac{1-\nu^2}{c^2}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4} + \\
+ \frac{m_0 R^4}{D}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2\nabla^2\Phi + \frac{R^4}{D}\left\{\left[T_1^\circ\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + T_2^\circ\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right)\right]\nabla^2\nabla^2\Phi + \right. \\
\left. + \rho\iint\limits_{\Sigma_1} G\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2\nabla^2\Phi\,d\sigma\right\} = 0 \qquad \left(D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\right)
\end{gathered} \tag{3.7}$$

Чтобы удовлетворить краевым условиям

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} = 0, \quad v = 0, \quad T_1 = 0 \quad \text{при } \alpha = 0 \text{ и } \alpha = \frac{l}{R} \tag{3.8}$$

потребуем от функции Φ таких краевых условий:

$$\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} = \frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4} = \frac{\partial^6\Phi}{\partial\alpha^6} = 0 \quad \text{при } \alpha = 0 \text{ и } \alpha = \frac{l}{R} \tag{3.9}$$

Удовлетворяя этим условиям, будем искать решение интегродифференциального уравнения (3.7) по методу Галеркина в виде ряда

$$\Phi(\alpha, \beta, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f_{mn}(t)\sin\lambda_m\alpha\cos n\beta \qquad \left(\lambda_m = \frac{m\pi R}{l}\right) \tag{3.10}$$

После подстановки (3.10) в уравнение (3.7) получим:

$$\begin{gathered}
\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[(\lambda_m^2 + n^2 + 1)^2(\lambda_m^2 + n^2)^2 + (1-\nu)\,\lambda_m^2(\lambda_m^2 - n^2)(\lambda_m^2 + n^2) + \right.\right. \\
\left. + \frac{1-\nu}{c^2}\lambda_m^2\right] f_{mn}\sin\lambda_m\alpha\cos n\beta + \frac{m_0 R^4}{D}(\lambda_m^2 + n^2)\,f_{mn}^{4}\sin\lambda_m\alpha\cos n\beta - \\
- \frac{R^4}{D}\left[T_1^\circ\lambda_m^2 + T_2^\circ(n^2 - 1)\right](\lambda_m^2 + n^2)^2 f_{mn}\sin\lambda_m\alpha\cos n\beta + \\
\left. + \rho\frac{R^4}{D}\iint\limits_{\Sigma_1} G(\lambda_m^2 + n^2)\,f_{mn}''\sin\lambda_m\alpha'\cos n\beta'\,d\sigma'\right\} = 0
\end{gathered} \tag{3.11}$$

Рассмотрим более подробно последний член этого уравнения.

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{8\rho R^4}{l_1 D}\iint\limits_{0\,0}^{2\pi l_1/R} R^2 g_{qp}(R_1R)(\lambda_m^2+n^2)^2 f_{mn}'' \sin\mu_p\alpha \sin\mu_p\alpha' \times$$
$$\times \cos q(\beta-\beta')\cos n\beta' d\alpha' d\beta =$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\frac{8\pi\rho R^6}{l_1 D} g_{ph}(R_1R)(\lambda_m^2+n^2) f_{mn}''\cos n\beta \sin \mu_p\alpha \int_0^{l/R}\sin\lambda_p\alpha' \sin\lambda_m\alpha' d\alpha' =$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}{}'(-1)^{p+1}\frac{8\pi\rho R^6}{l_1 D} g_{ph}(R_1R)(\lambda_m^2+n^2)^2 \sin\frac{m\pi l_1}{l}\,\frac{\lambda_m}{\mu_p-\lambda_m^2}\times$$
$$\times f_{mn}''\sin\mu_p\alpha\cos n\beta \tag{3.12}$$

Подставив это выражение в уравнение (3.11) и приравняв коэффициенты при $\cos n\beta$ нулю, получим систему уравнений

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big\{\Big[(\lambda_m^2+n^2+1)^2(\lambda_m^2+n^2)^2+(1-\nu)\lambda_m^2(\lambda_m^4-n^4)+\frac{1-\nu^2}{c^2}\lambda_m^4\Big]f_{mn}\sin\lambda_m\alpha -$$
$$-\frac{R^2}{D}[T_1{}^\circ\lambda_m^2+T_2{}^\circ(n^2-1)](\lambda_m^2+n^2)^2 f_{mn}\sin\lambda_m\alpha+\frac{m_0R^4}{D}(\lambda_m^2+n^2)f_{mn}\sin\lambda_m\alpha +$$
$$+\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{8\pi\rho R^6}{D}g_{pn}(R,R)\frac{(\lambda_m^2+n^2)^2\mu_p}{\lambda_m^2-\mu_p^2}\sin\frac{m\pi l_1}{l}f_{mn}''\sin\mu_p\alpha\Big\}=0 \tag{3.13}$$
$$(n=1,\,2,\,3,\,\ldots)$$

Умножая последнее уравнение на $\sin\lambda_i\alpha$ и интегрируя в пределах от 0 до $\alpha = l/R$, для определения $f_{mn}(t)$ получим следующую бесконечную связанную систему уравнений:

$$I_{in}{}^\circ\frac{d^2 f_{in}}{dt^2}+\sum_{m=0}^{\infty}I_{mni}\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2}+J_{in}^{(1)}f_{in}-\sum_{m=0}^{\infty}J_{mni}^{(2)}f_{mn}=0 \qquad (n,\ i=1,2,\ldots) \tag{3.14}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$J_{in}^{(1)}=\frac{l}{2R}\Big[(\lambda_i^2+n^2+1)^2(\lambda_i^2+n^2)+(1-\nu)\,\lambda_i^2(\lambda_i^4-n^4)+\frac{1-\nu^2}{c^2}\lambda_i^4\Big]$$
$$J_{mni}^{(1)}=\frac{R}{D}\lambda_{im}^2(\lambda_m^2+n^2)^2\int_0^{l/R}T_1{}^\circ(\alpha,t)\sin\lambda_m\alpha\sin\lambda_i\alpha d\alpha +$$
$$+\frac{R^6}{D}(n^2-1)(\lambda_m^2+n^2)\int_1^{l/R}T_2{}^\circ(\alpha,t)\sin\lambda_m\alpha\sin d_i\alpha d\alpha$$
$$I_{mni}=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^{p+i}\frac{8\pi\rho R^6}{l_1 D}g_{pn}(R_1R)\frac{(\lambda_m^2+n^2)\mu_p\lambda_i}{(\lambda_m^2+\mu_p^2)(\mu_p^2-\lambda_i^2)}\sin\frac{m\pi l_1}{l}\sin\frac{p\pi l}{l_1}$$
$$I_{in}^0=\frac{lm_0R^3}{2D}(\lambda_i^2+n^2)^2$$

Из применимости метода Галеркина к решению рассматриваемой задачи следует сходимость системы уравнений (3.14). Из этого видно, что для определения приближенного решения этой бесконечной системы можно брать усеченную конечную систему уравнений (3.14) $(n,\ i=1,\ldots,N)$.

В результате получим систему уравнений типа Хилла, исследование которой позволит ответить на вопрос о собственных частотах и критических силах для системы оболочка + жидкость, а также получить область динамической устойчивости в пространстве параметров системы n/R, l_1/R, l/R, $m_0\rho$ при различных внешних нагрузках.

4. Рассмотрим более детально случай, когда жидкость заполняет всю полость цилиндрической оболочки. Это соответствует случаю $l = l_1$. При этом в бесконечной сумме представления I_{mni} останется слагаемое $p = 1$ и, кроме того, $I_{mni} = 0$ для

всех номеров $m \neq i$. Для $m = i$ получим

$$I_{ini} = I_{ni} = \frac{2R^4 \rho l}{D} g_{in}(R, R)(\lambda_i^2 + h^2) \tag{4.1}$$

Далее, внутренние усилия $T_1^0(\alpha, t)$ и $T_2^0(\alpha, t)$ заменим средними значениями:

$$T_1^{\circ *}(t) = \frac{R}{l} \int_0^{l/R} T_1^\circ(\alpha, t)\, d\alpha, \qquad T_2^{\circ *} = \frac{R}{l} \int_0^{l/R} T_2^0(\alpha, t)\, d\alpha \tag{4.2}$$

Тогда коэффициенты $J_{mni}^{(2)}$ обратятся в нуль для всех номеров $m \neq i$. А при $m = i$ они будут равны

$$J_{in}^{(2)} = J_{ini}^{(2)} = \frac{R}{2Dl} \lambda_i^2 (\lambda_i^2 + n^2) T_1^{\circ *}(t) + \frac{R}{2Dl}(h^2 - 1)(\lambda_i^2 + h^2) T_2^{\circ *}(t) \tag{4.3}$$

Эти упрощения приводят к тому, что бесконечно связанная система (3.14) распадается на систему обыкновенных уравнений Хилла:

$$(I_{in}^\circ + I_{in}) \frac{d^2 f_{in}}{dt^2} + [J_{in}^{(1)} - J_{in}^{(2)}(t)] f_{in}(t) = 0 \qquad (i, n = 1, 2, \ldots) \tag{4.4}$$

Эту систему удобно переписать следующим образом

$$\frac{d^2 f_{in}}{dt^2} + \omega_{in}^2 \left(1 - \frac{T_1^{\circ *}(t)}{T_1^*} - \frac{T^{\circ *}(t)}{T_2^*}\right) f_{in}(t) = 0 \qquad (n, i = 1, 2, \ldots) \tag{4.5}$$

Входящие сюда величины

$$\omega_{in}^2 = \frac{[(i\pi R/l)^2 + n^2 + 1]^2 D}{R^4 [m_0 + 4\pi\rho R g_{in}(R,R)]} +$$
$$+ \frac{D(1-\nu)(i\pi R/l)^2[(i\pi R/l)^4 - n^4] + (i\pi R/l)^4(1-\nu^2)/l^2}{R^4[m_0 + 4\pi R\rho g_{in}(R,R)][(i\pi R/l)^2 + n^2]^2} \tag{4.6}$$

имеют смысл собственных частот оболочки; при этом количество $4\pi\rho R g_{in}(R,R)$ представляет присоединенную массу, вызванную наличием жидкости в оболочке. Величина

$$T_1^* = \frac{\omega_{in}^2 [m_0 + 4\pi R\rho g_{in}(R, R)]}{(inR/l)^2}, \qquad T_2^* = \frac{\omega_{in}^2}{n^2 - 1}[m_0 + 4\pi\rho R g_{in}](R, R)]$$

представляет собой критические продольные и нормальные нагрузки; физический смысл их таков, что если внутренние усилия $T_1^{\circ *}$ или $T_2^{\circ *}$ превысят эти значения, то решение уравнений (4.5) будет экспоненциально расти, что соответствует потере устойчивости оболочки.

Анализ динамической устойчивости оболочки можно проделать, имея диаграмму устойчивости уравнения Хилла (4.5). В этом случае для каждых значений параметров оболочки можно указать, будет ли она устойчива под действием данных сил.

Следует сказать, что наличие жидких масс приводит к значительному уменьшению собственных частот для первых гармоник формы изгиба. Так, для некоторых примеров они уменьшаются в несколько сот раз.

Существенным является также и то, что критические усилия потери статической устойчивости не зависят от наличия жидкости. Так же как и для случая колебания балки с жидкостью [1], нельзя указать эквивалентную оболочку, хотя для каждой формы изгиба можно указать эквивалентную массу оболочки.

Авторы выражают признательность Н. Н. Моисееву за постановку задачи и ценные советы, которыми они неоднократно пользовались.

Поступила 25 XI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н. К теории колебаний упругих тел, имеющих жидкие полости. Прикл. матем. и механ., 1959, т. XXIII, вып. 5.
2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. ГИТТЛ, 1956.
3. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, 1947.
4. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.
5. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. ГИТТЛ, 1953.
6. Вишик М. И. Смешанные краевые задачи для систем уравнений, содержащих вторую производную по времени и приближенный метод их решения. ДАН, 19, т. 100, № 3.