К ЗАДАЧЕ О ДИФРАКЦИИ ЗВУКА ОТ КРУГЛОГО ОТВЕРСТИЯ

Н. А. Ростовцев

(Комсомольск-на-Амуре)

Задача, названная в заголовке, рассматривается здесь в частном случае осевой симметрии. В отличие от известных методов решения, основанных на применении разложений по сфероидальным волновым функциям (см. библиографию в книгах [1,2]), здесь дается иной подход, состоящий в том, что дифракционный потенциал представляется некоторым однократным интегралом. Граничные условия приводят к интегральному уравнению Фредхольма второго рода для вспомогательной функции, входящей под интеграл. Хотя это уравнение и не решается в конечной форме, тем не менее здесь нетрудно получить приближенное решение методом малого параметра, которым в данной задаче является безразмерная величина ka (где $k=2\pi/\lambda$ — волновое число, a — радиус отверстия). Этот подход представляет модификацию способа комплексных потенциалов, разработанного автором для одного узкого класса задач о Ньютоновом потенциале для полупространства [3].

1. Введем систему цилиндрических координат r, θ, z; за плоскость $z=0$ примем плоскость жесткого экрана, в котором имеется отверстие $r \leqslant a$. Источники колебаний будут находиться в полупространстве $z<0$. Волновой потенциал $\varphi(r, z)$, соответствующий данному распределению источников при отсутствии отверстия, предполагается известным. Фазовый множитель берется в виде $e^{-i\omega t}$, поэтому решения на бесконечности в обеих половинах пространства должны убывать как $R^{-1}e^{ikR}$, $R=\sqrt{r^2+z^2}$ (условие излучения). Обозначим через $\psi(r, z)$ и $\chi(r, z)$ дифракционные потенциалы в полупространствах $z<0$ и $z>0$. Непрерывность скорости на отверстии обеспечивается, если положить $\psi(r, z) = -\chi(r, -z)$. Остальные граничные условия будут

$$2[\chi] = \varphi(r, 0) = 2f(r) \quad \text{на отверстии}, \qquad \left[\frac{\partial \chi}{\partial z}\right] = 0 \quad \text{вне отверстия} \tag{1.1}$$

Решения будем искать суперпозицией элементарных решений вида

$$[r^2+(z+iv)^2]^{-1/2}\exp\{ik[r^2+(z+iv)^2]^{-1/2}\}$$

имеющих особенности в чисто мнимых точках z-оси, $z=0$, $z=-iv$. Квадратный корень из комплексного числа берется под условием, чтобы действительная часть была положительна. Поэтому, если $w=u+iv$ — комплексное число, то $(r^2+w^2)^{1/2}$ вычисляется в плоскости, разрезанной вдоль мнимой оси от $+ir$ до $+i\infty$ и от $-ir$ до $-i\infty$. Нужное нам частное решение берем под видом

$$\theta(r, z; s) = \frac{-1}{2}\int_{-s}^{+s}\frac{\exp[ik\sqrt{r^2+(z+iv)^2}]}{\sqrt{r^2+(r+iv)^2}}\,dv = \frac{i}{2}\int_{z-is}^{z+is}\frac{\exp[ik\sqrt{r^2+w^2}]}{\sqrt{r^2+w^2}}\,dw \tag{1.2}$$

Оно представляет потенциал от источников, равномерно распределенных в области $z=-iv$, $-s<v<s$. Имеем $\theta(r, z; 0)=0$ и формулы для производных:

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{i}{2}\left\{\frac{\exp[ik\sqrt{r^2+(z+is)^2}]}{\sqrt{r^2+(z+is)^2}} - \frac{\exp[ik\sqrt{r^2+(z-is)^2}]}{\sqrt{r^2+(z-is)^2}}\right\} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial s} = \frac{-1}{2}\left\{\frac{\exp[ik\sqrt{r^2+(z+is)^2}]}{\sqrt{r^2+(z+is)^2}} + \frac{\exp[ik\sqrt{r^2+(z-is)^2}]}{\sqrt{r^2+(z-is)^2}}\right\} \tag{1.4}$$

Введем теперь $g(s)$ — комплекснозначную функцию вещественного аргумента s, $0\leqslant s<\infty$, у которой реальная и мнимая части кусочно-монотонны, и $g(\infty)=0$. Дифракционный потенциал в области $z>0$ строим в виде интеграла Стильтьеса

$$\chi(r, z) = \int_0^\infty \theta(r, z; s)\,dg(s) \tag{1.5}$$

Полагаем, что интеграл сходится и допускает дифференцирование по параметрам. Это будет оправдано в процессе фактического построения решения. Интегрируя по частям, приводим $\chi(r, z)$ к виду

$$\chi(r, z) = \frac{1}{2}\int_0^\infty\left\{\frac{\exp[ik\sqrt{r^2+(r+is)^2}]}{\sqrt{r^2+(z+is)^2}} + \frac{\exp[ik\sqrt{r^2+(z-is)^2}]}{\sqrt{r^2+(z-is)^2}}\right\}g(s)\,ds \tag{1.6}$$

Дифференцируя (1.5), получаем

$$\frac{\partial\chi}{\partial r}=\frac{i}{2}\int_0^\infty\left\{\frac{\exp\left[ik\sqrt{r^2+(z-is)^2}\right]}{\sqrt{r^2+(z+is)^2}}-\frac{\exp\left[ik\sqrt{r^2+(z+is)^2}\right]}{\sqrt{r^2+(z-is)^2}}\right\}dg(s) \tag{1.7}$$

Полагая $z=+0$, находим граничные значения:

$$[\chi]=\int_0^r\frac{\exp\left[ik\sqrt{r^2-s^2}\right]}{\sqrt{r^2-s^2}}g(s)\,ds+i\int_r^\infty\frac{\operatorname{sh}k\sqrt{s^2-r^2}}{\sqrt{s^2-r^2}}g(s)\,ds \tag{1.8}$$

$$\left[\frac{\partial\chi}{\partial z}\right]=\int_r^\infty\frac{\operatorname{ch}k\sqrt{s^2-r^2}}{\sqrt{s^2-r^2}}\,dg(s) \tag{1.9}$$

Ясно, что если наложить на $g(s)$ условие $g(s)=0$ при $s>a$, то будет выполнено второе граничное условие, и вместе с тем оказываются оправданными сделанные выше предположения о сходимости интеграла и дифференцируемости по параметрам. Кроме того, поскольку интегрирование фактически выполняется по конечному промежутку $0\leqslant s\leqslant a$, можно видеть, что решение (1.6) удовлетворяет условию излучения. Первое же граничное условие приводит к интегральному уравнению

$$\int_0^r\frac{\cos k\sqrt{r^2-s^2}}{\sqrt{r^2-s^2}}g(s)\,ds+i\int_0^a\frac{\sin k\sqrt{r^2-s^2}}{\sqrt{r^2-s^2}}g(s)\,ds=f(r) \tag{1.10}$$

Это уравнение может быть приведено к уравнению Фредхольма второго рода, если умножить обе его части на $(r\operatorname{ch}k\sqrt{u^2-r^2})/\sqrt{u^2-r^2}$, проинтегрировать по r от $r=0$ до $r=u$, и затем продифференцировать по u. Получится

$$g(u)+\frac{2i}{\pi}\int_0^a K(u,s)\,g(s)\,ds=\frac{2}{\pi}\int_0^a\frac{r\operatorname{ch}k\sqrt{u^2-r^2}}{\sqrt{u^2-r^2}}f(r)\,dr \tag{1.11}$$

где

$$K(u,s)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\operatorname{sh}k(u+s)}{u+s}+\frac{\operatorname{sh}k(u-s)}{u-s}\right\} \tag{1.12}$$

Однако первоначальная форма (1.10) более удобна для целей практического вычисления начальных членов разложения по степеням малого параметра k (или ka).

2. В случае плоской волны имеем

$$\varphi(r,z)=e^{ikr}+e^{-ikz}=2\cos kz,\qquad f(r)=\tfrac{1}{2}\varphi(r,0)=1$$

Подстановка

$$g(s)=g_0(s)+kg_1(s)+k^2g_2(s)+\ldots \tag{2.1}$$

в (2.9) приводит к рекуррентной системе, в которой $g_{n+1}(s)$ находится через предшествующие $g_k(s)$, $(k=0,1,\ldots n)$ как решение уравнения Абеля с ядром $(r^2-s^2)^{-1/2}$ и полиномиальной правой частью. Вычисления развиваются элементарно. Первые члены разложения таковы:

$$g(s)=\frac{2}{\pi}-i\frac{4}{\pi^2}k+\left(\frac{2}{\pi}s^2-\frac{16}{\pi^3}\right)\frac{k^2}{2!}-i\left\{\frac{4}{\pi}s^2-\frac{16}{3\pi^2}\left(\frac{18}{\pi^2}-1\right)\right\}\frac{k^3}{3!}+$$
$$+\left\{\frac{2}{\pi}s^4-\frac{32}{\pi^2}s^2+\frac{64}{3\pi^3}\left(\frac{12}{\pi^2}-1\right)\right\}\frac{k^4}{4!}+\ldots \tag{2.2}$$

Здесь принято, для простоты, $a=1$. В случае сравнительно больших значений ka, от 0.5 и выше, более удобно пользоваться уравнением (1.11). Его ядро (1.12) хорошо аппроксимируется многочленами. Для целей численного анализа здесь лучше всего подходит разложение $\operatorname{sh}kx$ по многочленам Чебышева $T_n(x)$.

Поступила 22 VI 1960.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стретт М. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. ОНТИ, 1935.
2. Скучик Е. Основы акустики, т. 1. ИИЛ, 1958.
3. Ростовцев Н. А. Комплексные потенциалы в задаче о штампе, круглом в плане. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 1.