

## ЗАТУПЛЕННЫЕ ТЕЛА ПРОСТОЙ ФОРМЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

П. И. Чушкин

(Москва)

Ввиду математической сложности задачи о сверхзвуковом обтекании затупленных тел пока не удалось получить достаточно точных аналитических решений этой задачи, которые были бы свободны от существенных допущений. Экспериментальное исследование затупленных тел также связано (особенно при больших числах Маха) с серьезными трудностями и обычно дает результаты невысокой точности. Поэтому в последнее время для решения задачи о сверхзвуковом обтекании затупленных тел стали широко применяться численные методы, опирающиеся на использование быстродействующих электронных вычислительных машин. Одним из наиболее эффективных численных методов здесь оказался метод интегральных соотношений, предложенный А. А. Дородницыным [1] и развитый О. М. Белоцерковским [2-3] для расчета сверхзвукового обтекания плоских и осесимметричных тел сошедшей ударной волной. Этим методом можно построить поле смешанного течения в области влияния вблизи носовой части тела.

Сверхзвуковое течение за областью влияния можно рассчитать методом характеристик. В настоящей работе описывается метод характеристик, приспособленный для расчетов на электронной вычислительной машине, и приводятся некоторые результаты расчетов этим методом ряда затупленных клиньев и конусов.

В обычном методе характеристик, применяющемся в газовой динамике, основными искомыми функциями являются координаты  $x$ ,  $y$ , угол Маха  $\alpha$ , угол наклона к оси  $x$  вектора скорости  $\theta$  и энтропия  $s$ . Однако в уравнения характеристик при этом входят тригонометрические и показательные функции, что при расчетах на электронных вычислительных машинах заставляет обращаться к большому числу подпрограмм для вычисления элементарных функций и требует много машинного времени.

Элерс [4] предложил в качестве искоемых функций в методе характеристик рассматривать величины

$$\beta = \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{M^2 - 1}, \quad \zeta = \operatorname{tg} \theta, \quad s$$

Это позволяет свести коэффициенты в уравнениях характеристик к алгебраическим функциям и дает существенную экономию машинного времени. Однако этим методом в том виде, как он предложен Элерсом, пользоваться в общем случае нельзя (Элерс рассмотрел лишь простейший пример — плоское потенциальное течение в сопле). В этом методе не всегда сходятся итерации при расчете ударной волны, неудачный выбор константы в энтропии (принимается, что в набегающем потоке  $s = 0$ ) не позволяет рассчитывать течения при  $M_\infty = \infty$ , формулы Элерса не учитывают, что характеристики могут быть направлены горизонтально или вертикально. Численный метод характеристик, который излагается ниже для расчетов сверхзвуковой части течения на затупленных телах, представляет собой комбинацию двух вышеуказанных методов.

За основные функции в методе характеристик примем  $x$ ,  $y$ ,  $\beta$ ,  $\zeta$  и  $s = \ln(p/\rho^\kappa)$ , где  $\rho$  — безразмерная плотность, отнесенная к плотности набегающего потока  $\rho_\infty$ ,  $p$  — безразмерное давление, отнесенное к  $\rho_\infty a_*^2$  ( $a_*$  — критическая скорость звука),  $\kappa$  — показатель адиабаты.

Дифференциальные уравнения характеристик и соотношения на них представим для первого и второго семейств соответственно в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\beta - \zeta}{\beta\zeta + 1} \equiv m, \quad d\zeta + Kd\beta + Ldy - Pds = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta\zeta - 1}{\beta + \zeta} \equiv n, \quad d\zeta - Jd\beta - Ndx + Qds = 0 \quad (2)$$

где

$$J = K = -\frac{2\beta^2(\zeta^2 + 1)}{(\kappa + 1)(\beta^2 + 1)(\varepsilon\beta^2 + 1)}, \quad L = j \frac{\zeta(\zeta^2 + 1)}{y(\beta\zeta + 1)}$$

$$N = j \frac{\zeta(\zeta^2 + 1)}{y(\beta + \zeta)}, \quad P = Q = \frac{\beta(\zeta^2 + 1)}{\kappa(\kappa - 1)(\beta^2 + 1)}$$

причем  $j = 0$  для плоского течения,  $j = 1$  для осесимметричного течения

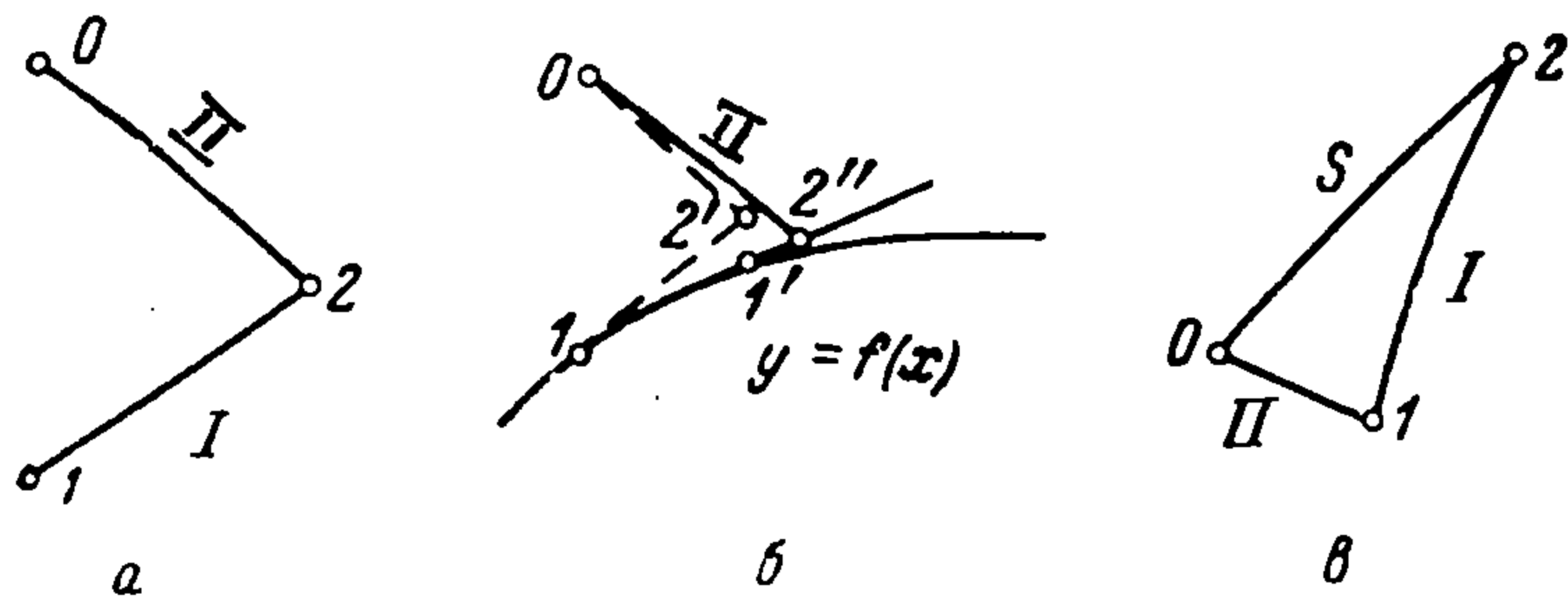
$\varepsilon = (\kappa - 1) / (\kappa + 1)$ . Система (1)–(2) записана для того случая, когда характеристики первого семейства не горизонтальны, а характеристики второго семейства не вертикальны (рассматривается верхняя полуплоскость течения).

Энтропия  $s$  зависит только от функции тока  $\psi$ , поэтому можно ввести некоторую модифицированную функцию тока  $\Psi$  по уравнению

$$d\Psi = (\kappa \varepsilon^s)^{1/(\kappa-1)} d\psi$$

Тогда, например, вдоль характеристик второго семейства будем иметь

$$\frac{d\Psi}{dx} = - \frac{y^j \sqrt{(\beta^2 + 1)(\zeta^2 + 1)}}{(\beta + \zeta)(\varepsilon\beta^2 + 1)^{1/2\varepsilon}} \equiv q \quad (3)$$



Фиг. 1

Энтропию  $s$  можно находить по  $\Psi$  с помощью связи  $s = s(\Psi)$ , которая определяется на ударной волне.

Для вычисления величин  $x$ ,  $y$ ,  $\beta$ ,  $\zeta$ ,  $\Psi$ ,  $s$  в какой-нибудь точке 2 (фиг. 1, а) пересечения характеристики первого семейства I и характеристики второго семейства II, находящейся внутри поля течения, по известным величинам в точках 0 и 1 уравнения (1)–(3) представляются в конечно-разностной форме. Запишем эти конечно-разностные уравнения в форме, аналогичной той, которая применяется в работе [5]

$$x_2 = \frac{x_1 - mn x_0 + m(y_0 - y_1)}{1 - mn}, \quad y_2 = y_0 + n(x_2 - x_0) \quad (4)$$

$$\Psi_2 = \Psi_0 + q(x_2 - x_0), \quad s_2 = s(\Psi_2)$$

$$\beta_2 = \frac{\zeta_1 + K\beta_1 - L(y_2 - y_1) + P(s_2 - s_1) - \zeta_0 + J\beta_0 - N(x_2 - x_0) + Q(s_2 - s_0)}{J + K} \quad (5)$$

$$\zeta_2 = \frac{J[\zeta_1 + K\beta_1 - L(y_2 - y_1) + P(s_2 - s_1)] + K[\zeta_0 - J\beta_0 + N(x_2 - x_0) - Q(s_2 - s_0)]}{J + K}$$

Эта система уравнений решается методом итераций, причем в первой итерации все коэффициенты определяются по значениям функций в точках 0 или 1, соответственно, а в последующих итерациях берутся средние значения коэффициентов по точкам 0 и 2 или 1 и 2. Для получения верных знаков обычно бывает достаточно трех итераций. Точка 2 (фиг. 1, б) на теле, контур которого  $y = f(x)$ , рассчитывается итерационным методом, описанным у Элерса. В этом случае в каждой итерации контур аппроксимируют касательной в точке  $1^i$  ( $x_1^i = x_2^i$ ). Сначала находят

$$x_2 = \frac{nx_0 - y_0 + f(x_2) - x_2 f'(x_2)}{n - f'(x_2)}$$

беря в правой части этого равенства значение  $x_2$  из предыдущей итерации (в первой итерации здесь берут значение  $x_1$  в предыдущей точке на контуре). Затем по найденному  $x_2$  вычисляют  $y_2 = f(x_2)$ ,  $\zeta_2 = f'(x_2)$  и по формуле (5) величину  $\beta_2$  (энтропия  $s_2$  на контуре известна). Все коэффициенты определяются так же, как при расчете точки в поле. Итерации продолжают до получения нужной точности. Для контроля точности метода характеристик находят в точке 2 величину  $\Psi$ , которую сравнивают с известным значением  $\Psi$  на контуре.

Расчет точки 2 на ударной волне  $S$  (фиг. 1, в) проводится подбором значения тангенса угла наклона волны в этой точке  $\xi_2$ . Задав некоторое значение  $\xi_2$  (близкое к значению в предыдущей точке 0 на ударной волне), определяют из соотношений на ударной волне величины

$$\rho_2 = \frac{\lambda_\infty^2 \xi_2^2}{1 - \varepsilon \lambda_\infty^2 + \xi_2^2} \quad \left( \lambda_\infty^2 = \frac{(\kappa + 1) M_\infty^2}{2 + (\kappa - 1) M_\infty^2} \right)$$

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{\lambda_\infty^2 (\xi_2^2 + \rho_2^2) - \rho_2^2 (1 + \xi_2^2)}{-\varepsilon \lambda_\infty^2 (\xi_2^2 + \rho_2^2) + \rho_2^2 (1 + \xi_2^2)}}, \quad \zeta_2 = \frac{\xi_2 (\rho_2 - 1)}{\xi_2^2 + \rho_2}$$

$$s_2 = \ln \left\{ \left[ \frac{2}{\kappa + 1} \frac{\lambda_\infty^2 \xi_2^2}{1 + \xi_2^2} - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} (1 - \varepsilon \lambda_\infty^2) \right] \rho_2^{-\kappa} \right\}$$

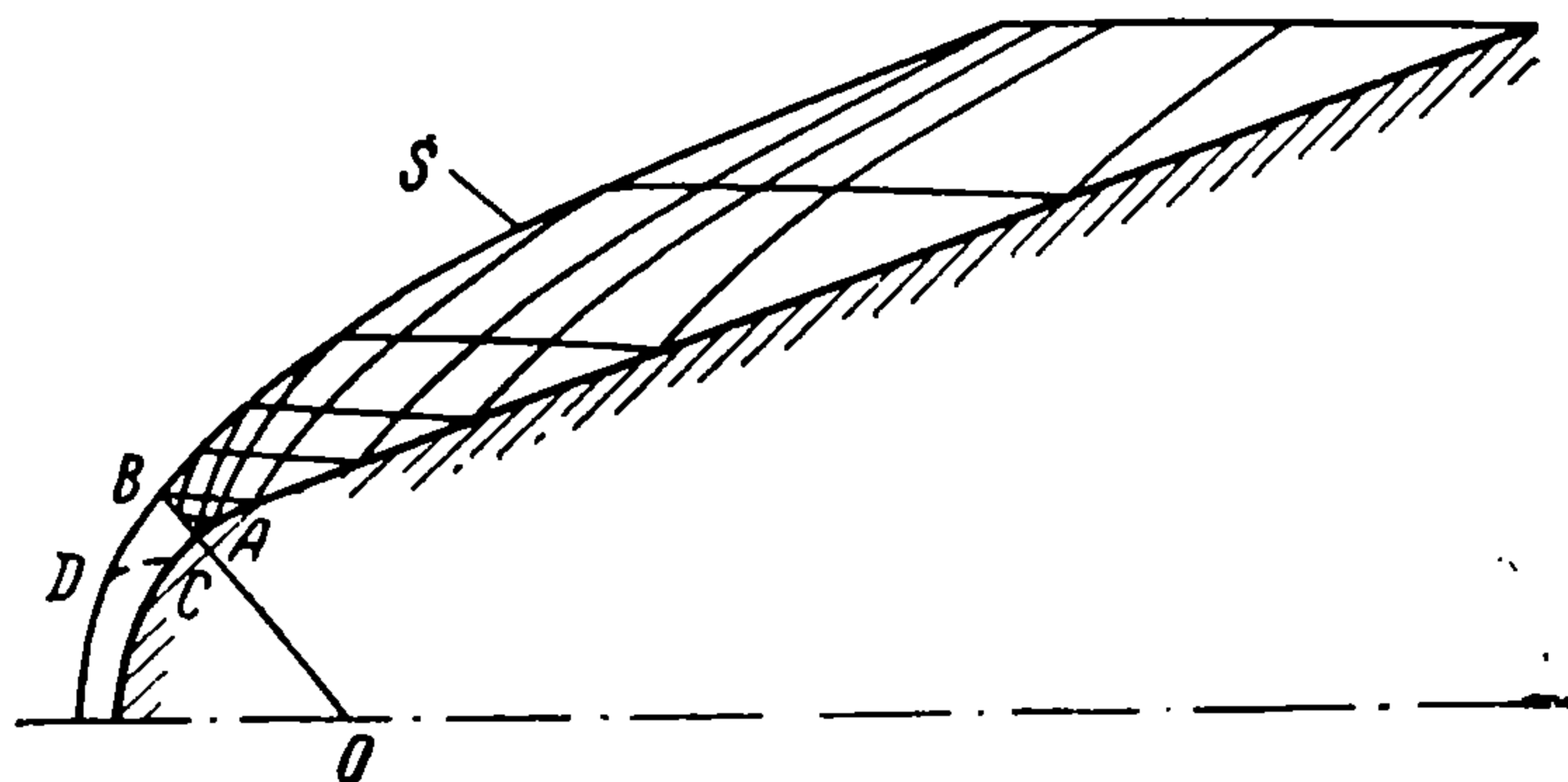
а координаты  $x_2, y_2$  находят по формулам (4), беря в них вместо  $n$  величину  $\bar{n} = \frac{1}{2} (\xi_0 + \xi_2)$  — участок ударной волны приближенно представляется параболой. Проверка правильности выбора  $\xi_2$  проводится по соотношению на характеристике первого семейства

$$\zeta_2 - \zeta_1 + K(\beta_2 - \beta_1) + L(y_2 - y_1) - P(s_2 - s_1) = 0$$

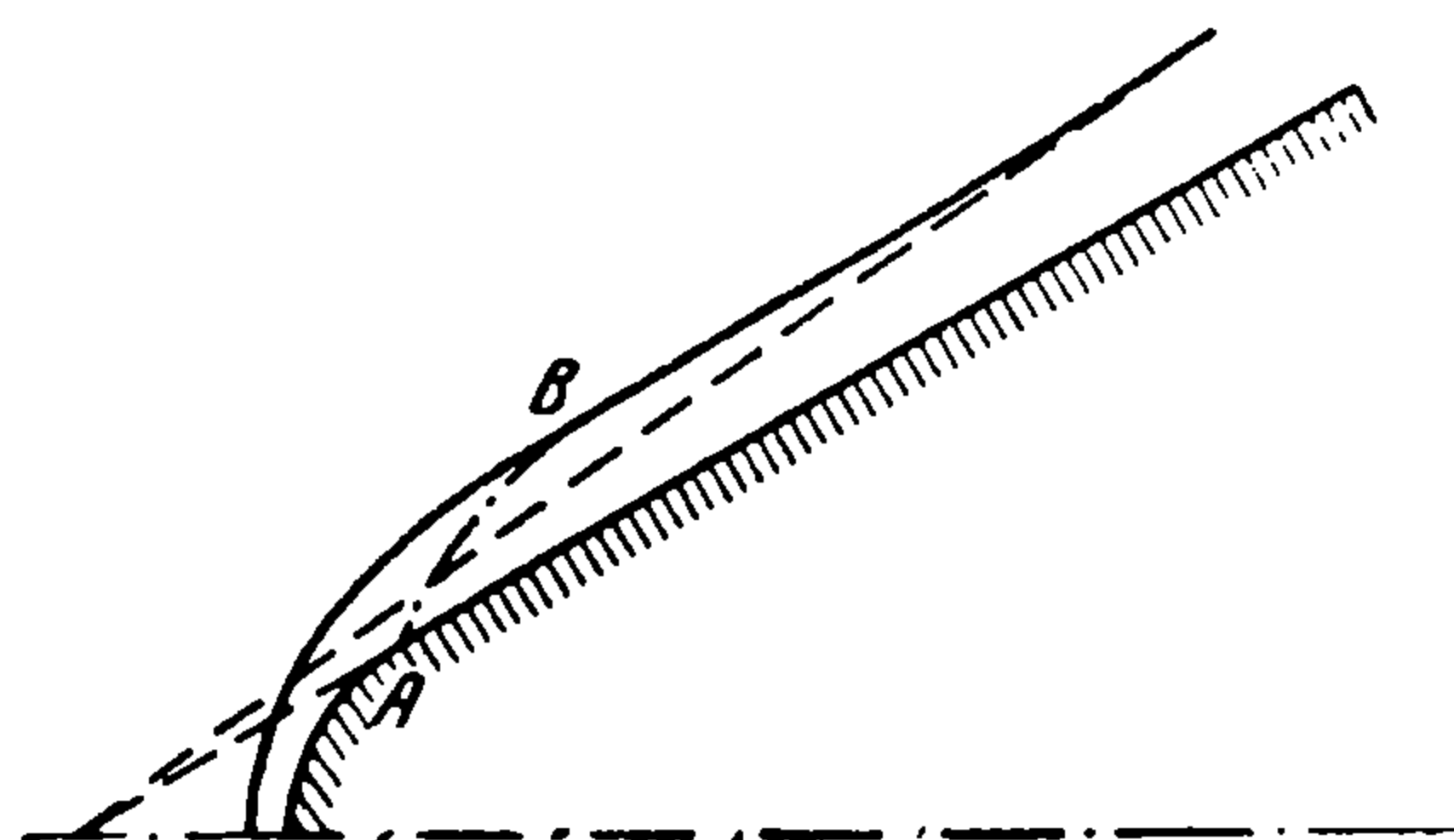
По окончательным значениям функций вычисляется величина

$$\Psi_2 = \Psi_0 + \kappa \frac{1}{\kappa-1} \frac{\lambda_\infty}{2(1+j)} \left( \exp \frac{s_0}{\kappa-1} + \exp \frac{s_2}{\kappa-1} \right) (y_2^{1+j} - y_0^{1+j})$$

Описанным выше методом характеристик были проведены расчеты сверхзвуковой части течения для серии затупленных плоских и осесимметричных тел простой формы, установленных на нулевом угле атаки. Рассчитывались затупленные клинья и конуса, а также затупленные тела, контур которых имел угловую точку. Клинья и конуса имели полууглы раствора  $\delta = 0, 20, 30, 40^\circ$  и затупления, контур которых был выполнен по окружности. Расчеты плоских тел проводились при значениях числа Маха  $M_\infty = 3, 4, 5$ , а осесимметричных тел — при  $M_\infty = 3, 4, 6, 10$  и  $\infty$ . Для этих случаев строилось все поле течения и, в частности, ударная волна и распределение давления на поверхности тела. Определялся также коэффициент волнового сопротивления  $c_x$ , отнесенный к площади поперечного сечения тела



Фиг. 2



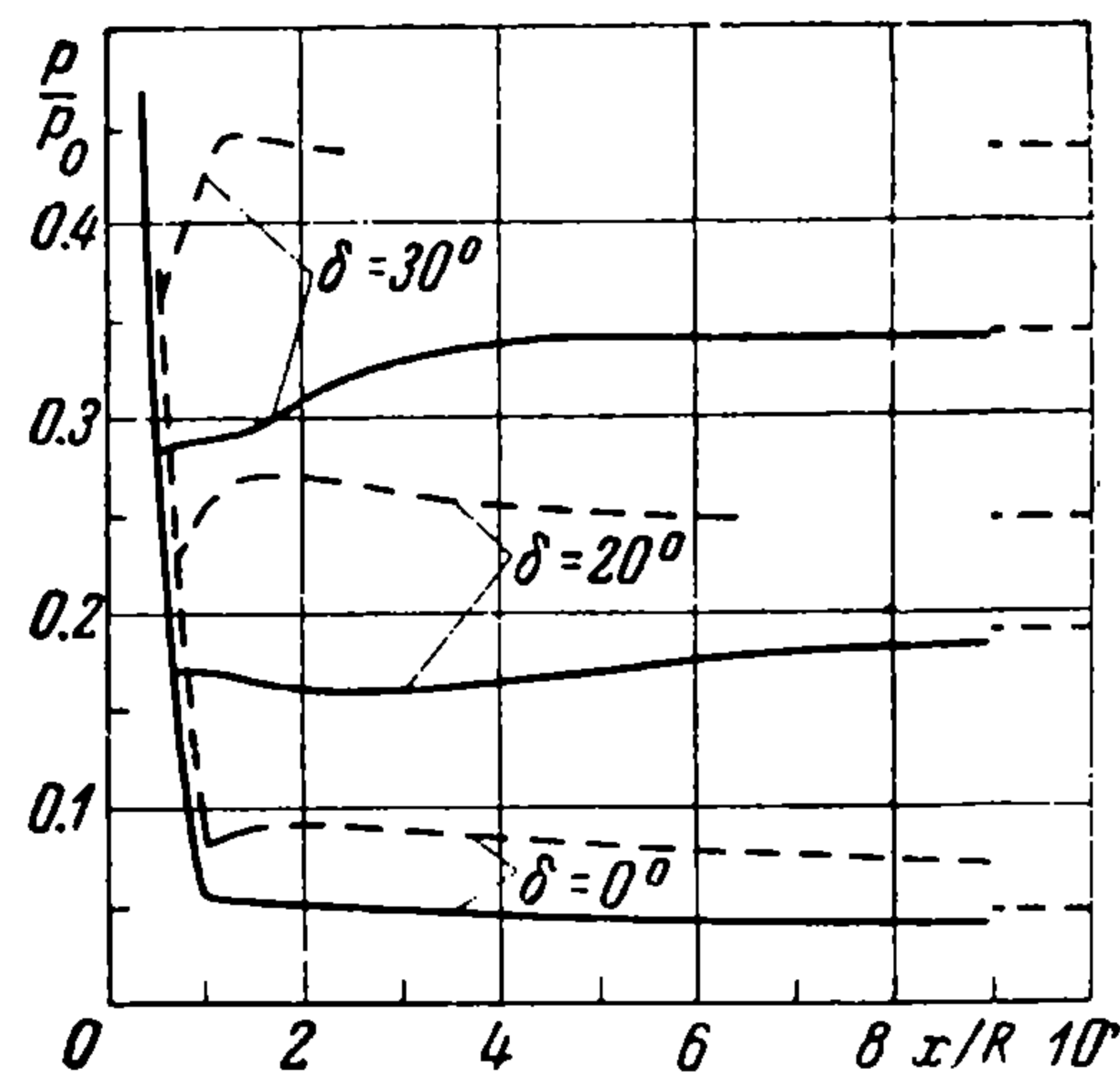
Фиг. 3

раствора  $\delta = 20^\circ$  при  $M_\infty = 6$ ; здесь изображены, в частности, ударная волна  $S$  и звуковая линия  $CD$ . Расчеты методом характеристик начинались от некоторого луча  $OB$  в сверхзвуковой области, на котором начальные данные были известны по решению методом интегральных соотношений во втором приближении. На фигуре показана лишь часть характеристической сетки — при расчетах отрезок луча  $AB$  разбивался на 48 интервалов. В некоторых случаях, когда имеет место очень резкое затормаживание потока при переходе с круговой части контура на прямолинейную, происходит пересечение двух соседних характеристик первого семейства, исходящих из этого места контура. Этот факт указывает на возникновение в поле течения нового «висячего» скачка.

При больших расстояниях вниз по потоку ударная волна для затупленного конуса переходит в конический скачок, отвечающий телу без затупления. На фиг. 3 построена отошедшая ударная волна для затупленного конуса  $\delta = 30^\circ$  при  $M_\infty = 6$ . Здесь же для сравнения пунктиром изображены соответствующий конус без затупления и образующийся перед ним конический скачок. На фиг. 3 показана также характеристика первого семейства  $AB$ , которая выходит из точки сопряжения сферического и конического участков тела

Ниже на графиках приводятся некоторые результаты расчетов. На фиг. 2 построена картина обтекания затупленного конуса с полууглом

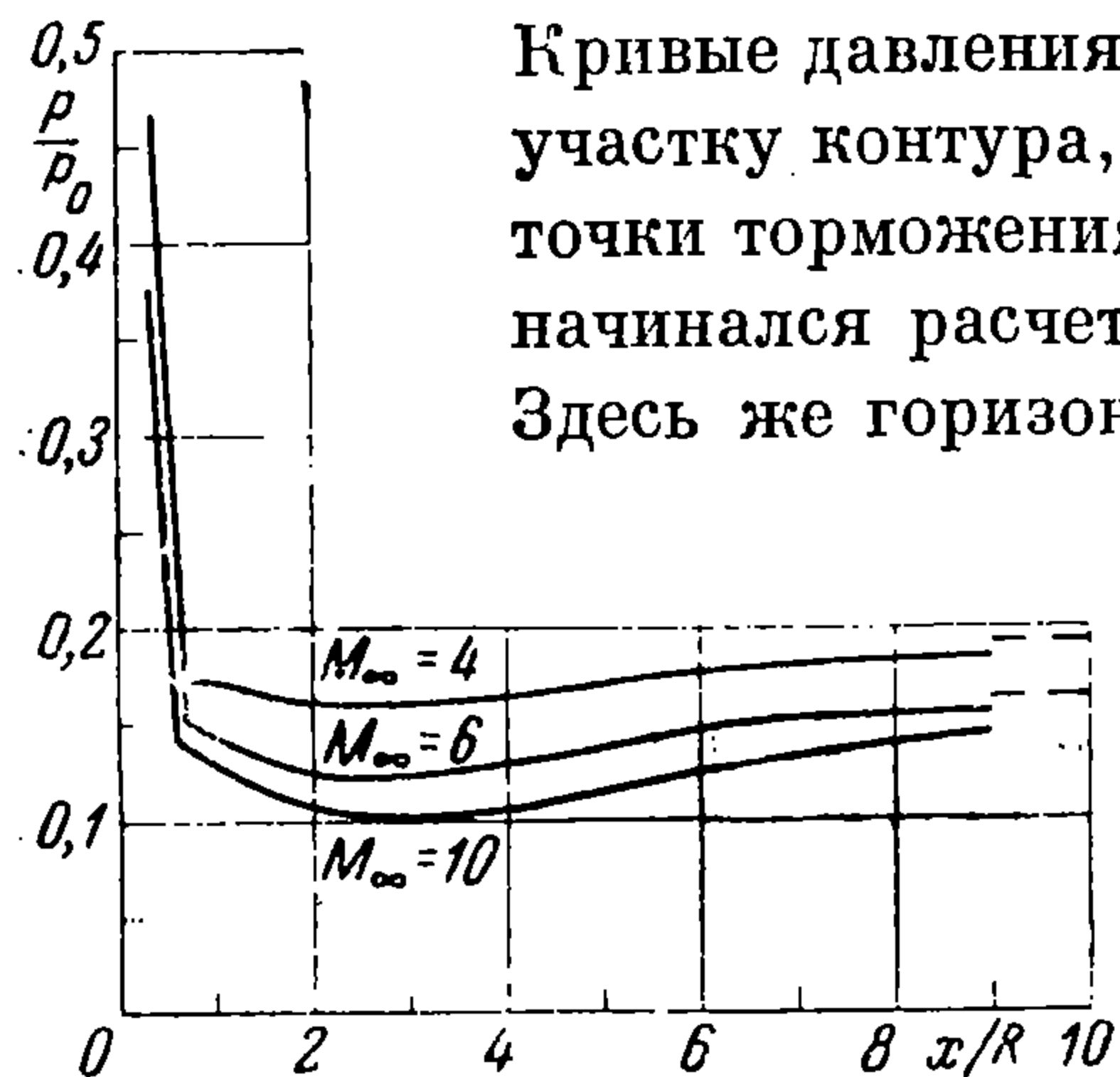
$$c_x = \frac{2(j+1)}{\lambda_\infty 2y^{j+1}} \int_0^y (p - p_\infty) y^j dy$$



Фиг. 4

и ограничивает чисто сферический участок течения. Если в точке  $B$  ударная волна для сферы оказывается слабее, чем соответствующий конический скачок, то ударная волна для затупленного конуса будет иметь точку перегиба. Такой случай и показан на фиг. 3.

Графики на фиг. 4 дают распределение давления на поверхности затупленных клиньев (пунктир) и конусов (сплошная линия) с различными полууглами раствора  $\delta$  при  $M_\infty = 4$ . Давление  $p$  отнесено здесь к давлению в точке торможения  $p_0$ , а расстояние от точки торможения вдоль оси тела  $x$  — к радиусу затупления  $R$ .

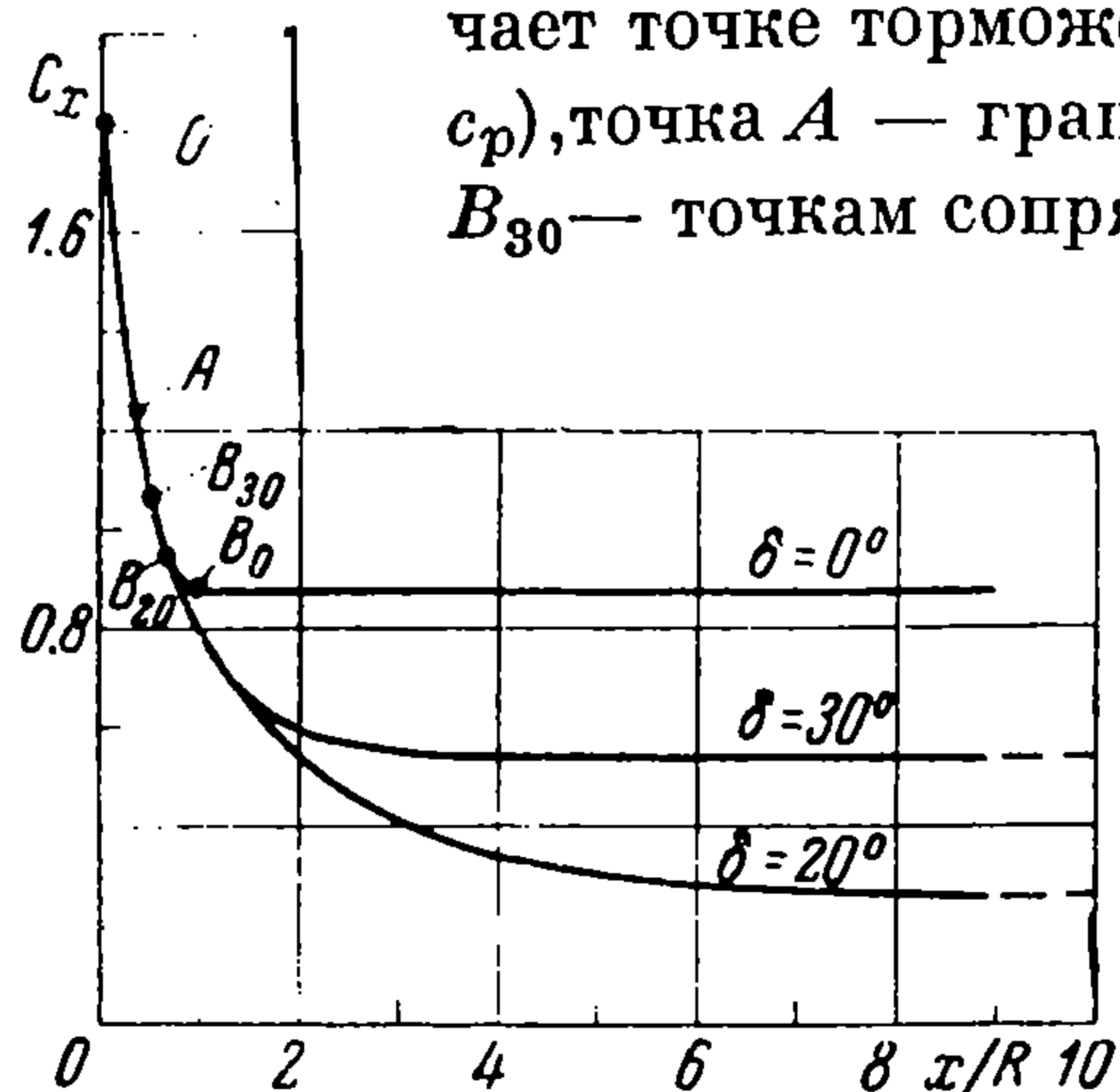


Фиг. 5

Кривые давления имеют две ветви — левая соответствует круговому участку контура, а правая — прямолинейному. Часть левой ветви от точки торможения до той точки сверхзвуковой области, от которой начинался расчет методом характеристик, на графике не изображена. Здесь же горизонтальными прямыми отмечены значения давления для соответствующих клиньев и конусов без затуплений.

Распределение давления на конусе  $\delta = 20^\circ$  в зависимости от числа Маха  $M_\infty$  показано на фиг. 5. Здесь также отмечены значения давления для соответствующего конуса без затупления при тех же  $M_\infty$ . Как видно, для затупленных конусов при больших  $M_\infty$  давление продолжает падать даже на прямолинейном участке контура и на значительной части тела остается меньшим, чем давление на конусе без затупления.

На фиг. 6 приводится изменение коэффициента волнового сопротивления  $c_x$  по длине затупленных конусов  $\delta = 0, 20$  и  $30^\circ$  при  $M_\infty = 6$  (случай  $\delta = 0^\circ$  соответствует цилиндру с полусферической носовой частью). На графике точка  $O$  отвечает точке торможения (здесь  $c_x$  просто равняется коэффициенту давления  $c_p$ ), точка  $A$  — границе области влияния носовой части, а точки  $B_0, B_{20}$  и  $B_{30}$  — точкам сопряжения кругового и прямолинейного участков контура для соответствующих  $\delta$ . Здесь же пунктирной линией показаны значения  $c_x$  для конусов без затупления. Как видно, затупление существенно влияет на сопротивление конуса лишь на сравнительно небольшом участке тела.



Фиг. 6

В заключение отметим, что настоящие расчеты по методу характеристик были выполнены под руководством автора на электронной вычислительной машине в Институте вычислительной техники Академии наук КНР (г. Пекин). Я приношу глубокую благодарность китайским математикам Ван Шу-лин, И Чень-гуэй, Ку Юан и

Лен Зун-кай, которые составили программу и провели расчеты на машине. Автор выражает также сердечную признательность О.М. Белоцерковскому и Ю. Д. Шмыглевскому за ценные советы и внимание к этой работе.

Поступила 15 VI 1960

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д о р о д н и ц ы н А. А. Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики. Тр. 3-го Всесоюзного математического съезда, 1956, т. 3, Изд-во АН СССР, 1958.
2. Б е л о ц е р к о в с к и й О. М. Обтекание симметричного профиля с отошедшей ударной волной. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 2.
3. Б е л о ц е р к о в с к и й О. М. О расчете осесимметричных течений с отошедшей ударной волной на электронной счетной машине. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 3.
4. E h l e r s F. E. The method of characteristics for isoenergetic supersonic flows adapted to high — speed digital computers. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 7, № 1, 1959. Имеется русский перевод: Сб. «Механика», № 1 (59), ИИЛ, 1960.
5. К а ц к о в а О. Н., Ш м ы г л е в с к и й Ю. Д. Осесимметричное сверхзвуковое течение свободно расширяющегося газа с плоской переходной поверхностью. Сб. «Вычислительная математика», № 2, Изд-во АН СССР, 1957.