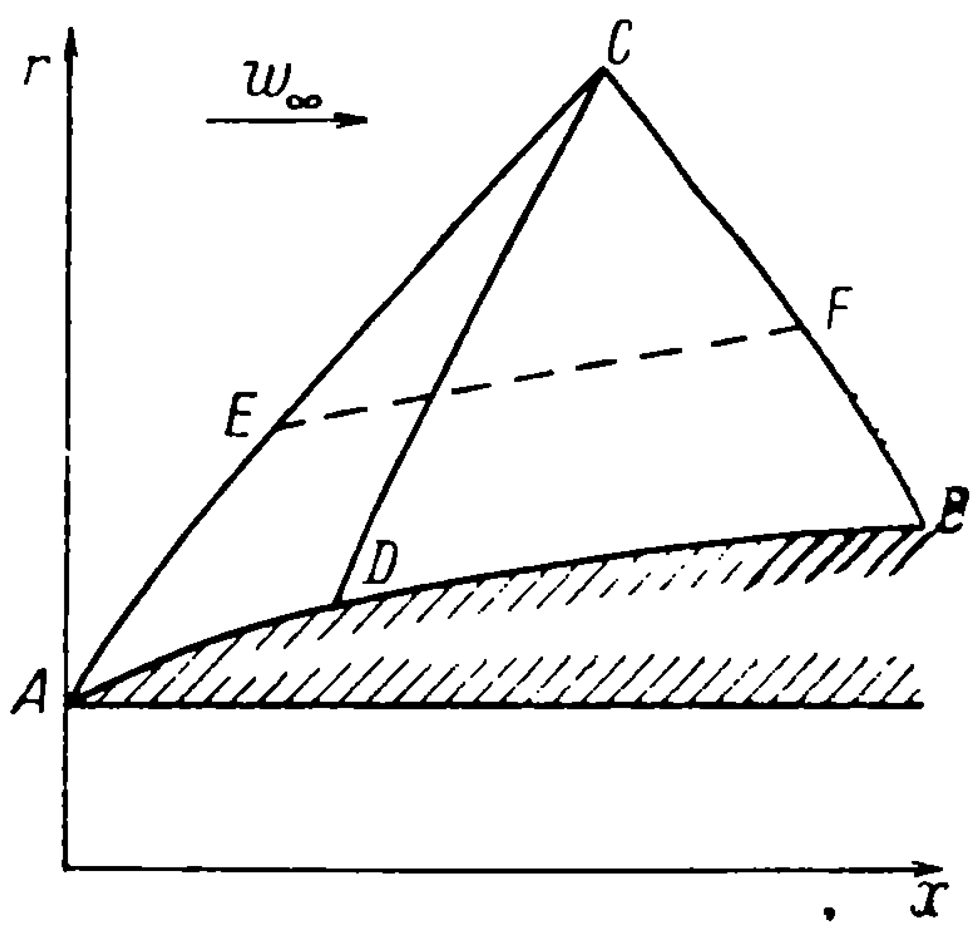
ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ С МИНИМАЛЬНЫМ ВОЛНОВЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Ю. Д. Шмыглевский (Москва)

Рассмотрим задачу построения образующей тела вращения AB (фиг. 1), обеспечивающей минимальное волновое сопротивление тела вращения, когда заданы скорость равномерного набегающего потока w_∞ и координаты точек A и B. Изучим только те случаи, когда ударная волна AC является присоединенной. Пусть BC является характеристикой второго семейства, а CD — характеристикой первого семейства.



Фиг. 1

Течение газа определяется уравнениями

$$\frac{\partial r\rho w \cos\vartheta}{\partial x} + \frac{\partial r\rho w \sin\vartheta}{\partial r} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} r\left(p + \rho w^2 \cos^2\vartheta\right) + \frac{\partial}{\partial r} r\rho w^2 \sin\vartheta\cos\vartheta = 0 \tag{2}$$

$$\frac{w^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}, \quad \frac{p}{\rho^\varkappa} = \varphi^{\varkappa - 1}(\psi) \tag{3}$$

Здесь x, r — декартовы координаты в меридиональной плоскости течения; w — скорость, отнесенная к критической скорости течения a_*; ϑ — угол наклона скорости к оси потока x; ρ — плотность газа, отнесенная к плотности набегающего потока ρ_∞; p — давление, отнесенное к $\rho_\infty a_*^2$; $\varkappa$ — показатель адиабаты; ψ — функция тока, причем

$$d\psi = r\rho w\left(\cos\vartheta\, dr - \sin\vartheta dx\right)$$

Решение поставленной задачи в случае $r_B \leqslant r_A$ и для течения в области DCB при $r_B > r_A$, если функции на BC подчиняются уравнениям Эйлера, дано в работе [1].

Искомые функции на BC подчиняются следующим равенствам

$$\begin{gathered}\lambda\left(\varkappa\sin 2\vartheta + \sin 2\alpha\right) + \varkappa\mu\left(1 - \cos 2\vartheta\right) = 0\\ \lambda\varphi A(\alpha)\cos\alpha - \sqrt{\varkappa}\, ra(\alpha)\sin^2\vartheta = 0\\ \sqrt{\varkappa r}\, dr \,/\, d\psi + \varphi A(\alpha)\sin(\vartheta - \alpha) = 0\\ \sqrt{\varkappa r^2} d\mu \,/\, d\psi + \varphi A(\alpha)\left[\lambda\cos(\vartheta - \alpha) + \mu\sin(\vartheta - \alpha)\right] = 0\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь λ — постоянный, а $\mu(\psi)$ — переменный множитель Лагранжа; α — угол Маха, причем $\rho w^2 \sin^2\alpha = \varkappa p$;

$$A(\alpha) = \left(\frac{\varkappa + 1}{2\varkappa}\,\frac{1 - \cos 2\alpha}{\varkappa - \cos 2\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}, \qquad a(\alpha) = \sqrt{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - \cos 2\alpha}}$$

$$\alpha = \alpha(\psi), \quad \vartheta = \vartheta(\psi), \quad r = r(\psi)$$

Обозначим через χ величину волнового сопротивления тела вращения с образующей AB, деленную на 2π. Величина χ выражается через контурные интегралы по AC и BC при помощи уравнения (2). В дальнейшем φ будем рассматривать как функцию от угла наклона ударной волны к оси x, который обозначим через $\sigma(\psi)$.

При отыскании контура AB вознакает следующая вариационная задача. Для заданных постоянных w_∞, r_A, r_B, $X = x_B - x_A$ найти функцию $\sigma(\psi)$, реализующую экстремум функционала χ

$$\chi = \int\limits_{\psi=\psi_A}^{\psi_C} \left\{\frac{\varkappa + 1}{2\varkappa}\left(w_\infty + \frac{1}{w_\infty}\right) - a(\alpha)\left[\cos\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\sin(\vartheta - \alpha)\right]\right\} d\psi \tag{5}$$

при изопериметрическом условии

$$X = \int\limits_{\psi=\psi_A}^{\psi_C}\left[\frac{\operatorname{ctg}\sigma}{\sqrt{2w_\infty\psi}} + \frac{1}{\sqrt{\varkappa}\, r}\,\varphi(\sigma) A(\alpha)\cos(\vartheta - \alpha)\right] d\psi \tag{6}$$

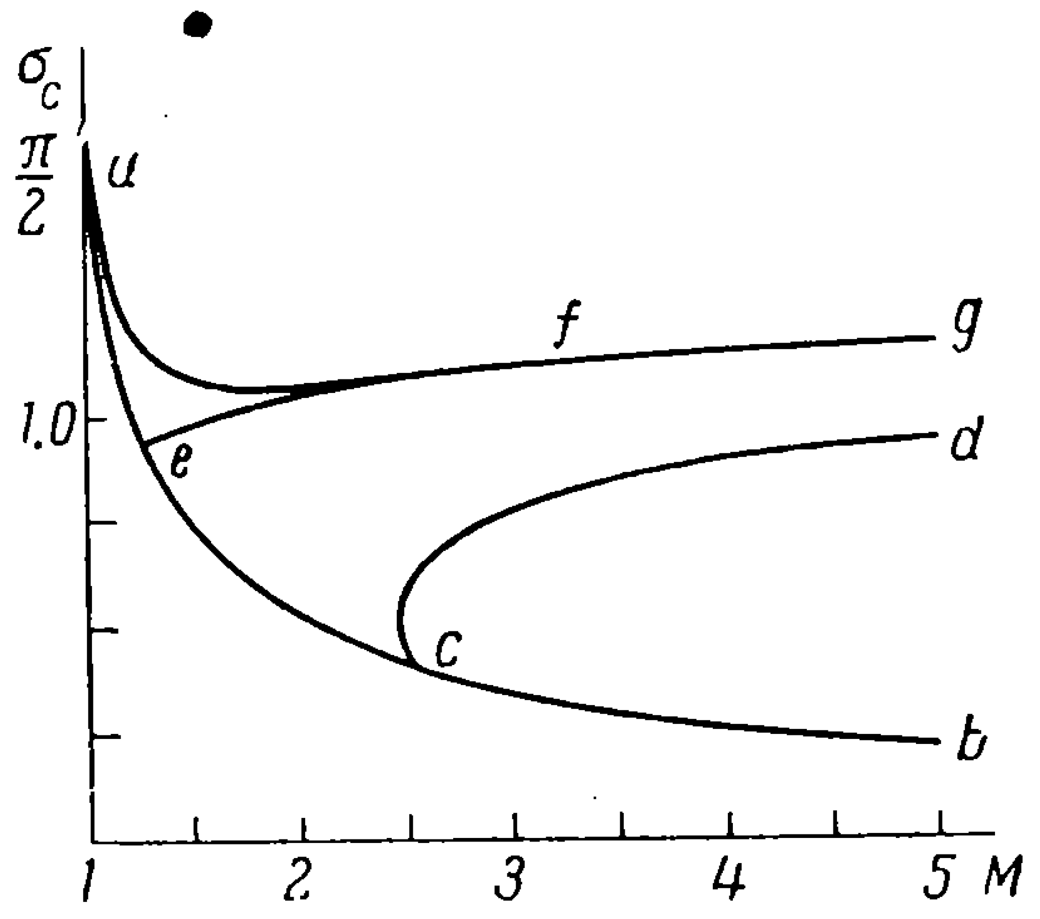
при условиях (4), связывающих функции α, ϑ, r, μ с искомой функцией σ, и при известных соотношениях на ударной волне

$$\alpha_C = \alpha(\sigma_C), \qquad \vartheta_C = \vartheta(\sigma_C), \qquad 2\psi_C = w_\infty r_C^2$$

Рассматриваемая постановка задачи, с требованием выполнения первых двух равенств, разумеется, не является единственно возможной. Допустимыми являются непрерывные функции $\sigma(\psi)$, удовлетворяющие свойствам [2] решений системы уравнений (1)—(3).

Отметим, что той же задаче посвящена работа [3].

Сформулированная задача является вырожденной. Тем не менее, попытаемся решить ее приемами классического вариационного исчисления. Введем новую независимую переменную z по формуле $z^2 = 2w_\infty \psi$. Для определения функций $\alpha(z)$, $\vartheta(z)$, $\sigma(z)$, $r(z)$, $\mu(z)$ при $z_A \leqslant z \leqslant z_C$ получим следующую систему уравнений Эйлера



Фиг. 2

$$\frac{d\mu}{dz} = \frac{\lambda}{w_\infty r \varphi_\sigma' \sin^2\sigma} = 0 \qquad \left(\varphi_\sigma' = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right) \tag{7}$$

$$\frac{dr}{dz} + \frac{\lambda}{w_\infty \varphi_\sigma' [\lambda \operatorname{ctg}(\vartheta - \alpha) + \mu] \sin^2\sigma} = 0 \tag{8}$$

$$\lambda(\varkappa \sin 2\vartheta + \sin 2\alpha) + \varkappa\mu(1 - \cos 2\vartheta) = 0 \tag{9}$$

$$\sqrt{\varkappa}\, a(\alpha)\, r \sin^2\vartheta = \lambda A(\alpha)\, \varphi \cos\alpha \tag{10}$$

$$\varphi_\sigma' z a(\alpha)[\lambda\cos(\vartheta - \alpha) + \mu \sin(\vartheta - \alpha)] \sin^2\sigma \sin^2\vartheta = \lambda^2 \cos\alpha \tag{11}$$

Функции α, ϑ, σ, r, μ должны удовлетворять изопериметрическому условию (6), граничным условиям

$$\alpha_C = \alpha(\sigma_C), \quad \vartheta_C = \vartheta(\sigma_C), \quad z_C = w_\infty r_C, \quad r(w_\infty r_A) = r_B \tag{12}$$

где r_B — заданная величина) и условию трансверсальности при $z = z_C$

$$\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\left(w_\infty + \frac{1}{w_\infty}\right) - a(\alpha)\left[\cos\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\sin(\vartheta - \alpha)\right] + \lambda\left[\frac{\operatorname{ctg}\sigma}{\sqrt{2w_\infty\psi}} + \frac{1}{\sqrt{\varkappa r}}\varphi(\sigma) A(\alpha)\cos(\vartheta - \alpha)\right] + \mu\left[\frac{1}{\sqrt{2w_\infty\psi}} - \frac{1}{\sqrt{\varkappa r}}\varphi(\sigma) A(\alpha)\sin(\vartheta - \alpha)\right] = 0 \tag{13}$$

Условие (13), как показали С. Н. Елисеев и Б. М. Киселев, выполняется в силу соотношений на ударной волне и первых двух равенств (4).

Количество произволов в определении функций равно четырем: два произвола дают дифференциальные уравнения (7) и (8) и, кроме того, произвольными являются величины λ и z_C. Условия (6) и (12) дают пять зависимостей.

Таким образом, поставленная вариационная задача, вообще говоря, не имеет решения в классическом смысле. Однако при некоторых частных соотношениях величин w_∞, $r_A : X$, $r_B : X$ такое решение может иметь место. Найдем эти частные зависимости [4]. Для этого исключим из уравнений (9)—(11) величины λ и μ, в результате получим

$$A(\alpha)\varphi_\sigma'(\sigma)(\sin 2\alpha + \varkappa\sin 2\vartheta)\sin(\vartheta - \alpha) + 2\varkappa\sin^2\vartheta\left[\frac{\sqrt{\varkappa r}}{z\varphi(\sigma)\sin^2\sigma} - A(\alpha)\varphi_\sigma'(\sigma)\cos(\vartheta - \alpha)\right] = 0 \tag{14}$$

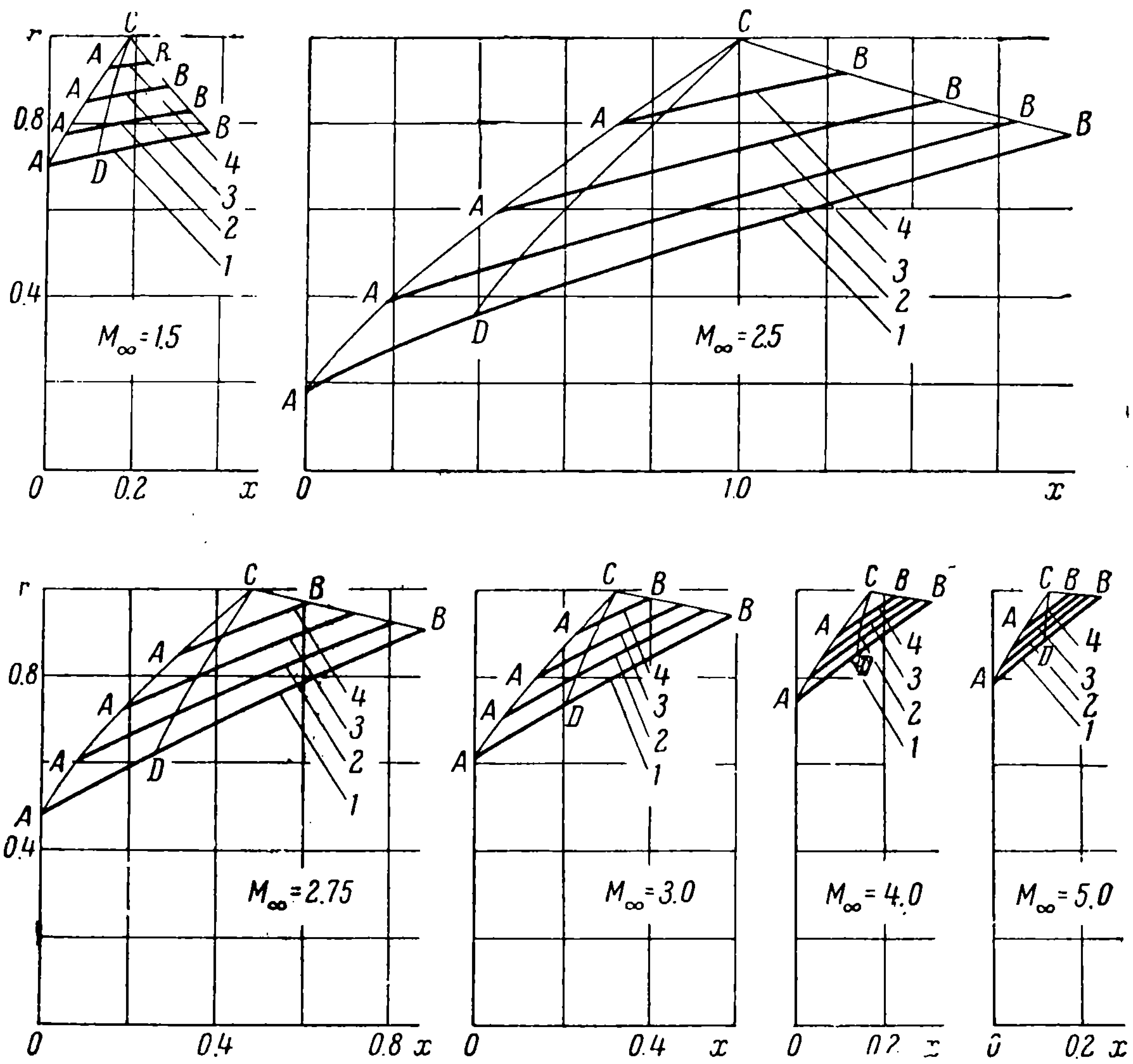
Решение имеет место тогда, когда равенство (14) выполняется при $z = z_C$ в силу соотношений на ударной волне.

Мысленно подставим в уравнение (14) выражение для z_C на ударной волне $z_C = w_\infty r_C$ и зависимости $\alpha(\sigma_C)$ и $\vartheta(\sigma_C)$, выражающие соотношения на ударной волне. Тогда получим уравнение $\varepsilon(w_\infty, \sigma_C) = 0$. Величина w_∞ в уравнении $\varepsilon = 0$ является параметром.

Корни уравнения $\varepsilon = 0$ изображены на фиг. 2, причем вместо w_∞ по оси абсцисс отложена величина M_∞ — число Маха набегающего потока. Одним из корней уравнения $\varepsilon = 0$ является

$$\sigma_C = \arcsin \frac{1}{M_\infty}$$

(линия ab). Этому корню соответствует тот случай, когда $r_B \leqslant r_A$ и ударная волна вырождается в характеристику набегающего потока AC. Линия ag отмечает те значения σ_C, при которых за ударной волной достигается скорость звука. При больших значениях σ_C скорости за ударной волной становятся дозвуковыми, и в этой области рассматриваемая теория не применима. Наконец, линии ef и cd дают еще два корня уравнения $\varepsilon = 0$.



Фиг. 3

Пусть w_∞ фиксировано. Возьмем σ_C, являющееся корнем уравнения $\varepsilon = 0$, и, пользуясь произволом в определении масштаба, зададим некоторое значение r_C. Вычислим $\varphi(\sigma_C)$ с помощью соотношений на ударной волне и $\varphi_\sigma'(\sigma_C)$. Найдем, далее, α_C, ϑ_C, z_C из первых равенств (12), λ — из равенства (10) и $\mu(z_C)$ — из равенства (9). Это даст начальные условия при $z = z_C$ для интегрирования системы уравнений (7)—(11).

Проинтегрируем уравнения (7)—(11) от $z = z_C$ до некоторого $z = z_*$ такого, что $z_* < z_C$ и скорость за ударной волной при $\sigma(z_*)$ равна скорости звука. Используя равенства

$$x = \frac{1}{w_\infty} \int\limits_{z=z_*}^{z} \operatorname{ctg} \sigma dz, \quad r = \frac{z}{w_\infty}$$

на ударной волне и равенство

$$x = x_C - \int\limits_{z=z_C}^{z} \frac{\lambda dz}{w_\infty \varphi_\sigma' [\lambda + \mu \operatorname{tg}(\vartheta - \alpha)] \sin^2 \sigma}$$

на характеристике BC, построим ударную волну AC и характеристику второго семейства BC (фиг. 1).

Течение, определяемое данными на ACB, можно найти следующим образом. Решение задачи Коши для уравнений (1)—(3) с данными на AC позволяет найти характиристику первого семейства CD, причем $z_D = z_A$. Известные характеристики CD и BC определяют решение уравнений (1)—(3), например внутри треугольника ABC.

Таблица

M_∞	Тело	$r_A : X$	$r_B : X$	c_x	M_∞	Тело	$r_A : X$	$r_B : X$	c_x
1,5	1	1.8796	2.0895	0.0818	3.0	1	1.0377	1.6009	0.3990
	2	2.7412	2.9387	0.0547		2	1.5157	2.0485	0.3022
	3	4.4709	4.6579	0.0325		3	2.4721	2.9805	0.2035
	4	9.6699	9.8478	0.0146		4	5.3340	5.8215	0.1026
2,5	1	0.1121	0·4433	0.2495	4.0	1	2.5188	3.2635	0.3907
	2	0.2762	0.5590	0.1934		2	3.1935	3.9190	0.3191
	3	0.5904	0.8406	0.1267		3	4.2947	5.0035	0.2463
	4	1.5492	1.7754	0.0587		4	6.3790	7.0727	0.1722
2,75	1	0.5531	1.0371	0.3881	5.0	1	3.3457	4.1783	0.3864
	2	0.8370	1.2872	0.3029		2	4.2531	5.0674	0.3135
	3	1.4257	1.8475	0.2067		3	5.7681	6.5663	0.2391
	4	3.0888	3.4871	0·1078		4	8.7588	9.5422	0.1629

Все линии тока (линии $z = \text{const}$ или $\psi = \text{const}$) течения в треугольнике ABC дают искомые профили. Это означает, что если, например, линия $\gamma(EF)$ является линией тока построенного течения, то из всех образующих тел вращения (по крайней мере, близких к линии γ), соединяющих точки E и F, наименьшее сопротивление дает именно линия γ. Это утверждение справедливо, так как при $z_E \leqslant z \leqslant z_C$ выполнены уравнения Эйлера, а при $z = z_C$ выполнены все соответствующие граничные условия, т. е для профиля EF выполнены все необходимые условия экстремума.

Множество линий тока такого течения исчерпывает все частные решения искомого вида, поскольку всякий иной выбор начальных данных при $z = z_C$ нарушает граничные условия (12) и (13) или приводит к невыполнению уравнений (9)—(11).

На фиг. 3 приведены примеры расчетов при различных M_∞. Показаны ударные волны AC, характеристики первого семейства CD и второго семейства BC. Приведены некоторые образующие тел вращения, обладающих минимальным сопротивлением. В таблице указаны геометрические характеристики точек A и B и коэффициенты сопротивления c_x, отнесенные к площади πr_B^2.

Автор приносит глубокую благодарность Л. В. Папандиной, которая составила программу для электронной машины и провела все вычисления.

Поступила 16 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики осесимметричных сверхзвуковых течений. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2.
2. Шмыглевский Ю. Д. О некоторых свойствах осесимметричных сверхзвуковых течений газа. ДАН СССР, 1958, т. 122, № 5.
3. Костычев Г. И. О форме тел с минимальным волновым сопротивлением. Изв. высш. учебн. заведений МВО, серия авиац. техн., 1958, № 2.
4. Шмыглевский Ю. Д. О сверхзвуковых профилях, имеющих минимальное сопротивление. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 2.