

выше для функций ϕ и ψ в области b , получим, согласно (3) и (2)

$$x = \frac{(\kappa - 1)}{2} \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial z} \right)_{z=\eta} = \frac{\kappa - 1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^n \left\{ \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{n+1} a_k \left\{ \exp \left[\frac{\alpha_k}{\eta} \left(z + \frac{\kappa - 1}{2} \theta \right) \right] + \exp \left[\frac{\alpha_k}{\eta} \left(z - \frac{\kappa - 1}{2} \theta \right) \right] \right\} \right\} \right]_{z=\eta} = \sum_{k=1}^{n+1} b_k \left[\exp \frac{\alpha_k \lambda}{\eta} + \exp \frac{\alpha_k (2\eta - \lambda)}{\eta} \right]$$

где b_k не зависят от λ . Отсюда

$$\frac{dx}{d\lambda} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{b_k \alpha_k}{\eta} \left[\exp \frac{\alpha_k \lambda}{\eta} - \exp \frac{\alpha_k (2\eta - \lambda)}{\eta} \right]$$

Легко видеть, что корнем этой функции является значение $\lambda = \eta$, лежащее в указанном интервале изменения λ . Это означает, что при любом соотношении чисел M в исходной струе и на ее границе со средой (т. е. при любом значении η) и при любых κ характеристики пересекаются в области b или раньше.

Таким образом, изэнтропическое течение в гиперзвуковой струе никогда не распространяется дальше первого сжатия струи. Расчет показывает, что при $0 < \eta \leq 0.5$ ударная волна образуется в результате пересечения характеристик в областях 3 и 4, при $0.5 < \eta \leq 0.88$ — в областях 4 и 4'', при $0.88 < \eta < 1$ — в областях 5, 5'' и 6.

Возможность образования ударных волн в сверхзвуковой струе была выяснена Пэкком [4] путем численного расчета методом конечных разностей для двух примеров течения. Изложенное решение непосредственно переносится на случай истечения струи из прямого среза в среду с большим давлением. В этом случае по выходе в среду образуется ударная волна, фронт которой прямолинеен. Свободная граница [также прямолинейна. От точки встречи ударной волны, [отраженной от плоскости симметрии, со свободной границей отходит центрированная волна разрежения и начинается течение, рассмотренное выше.

Поступила 9 III 1960

Институт механики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Л а н д а у Л. Д. и Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.
2. Ф а л ь к о в и ч С. В. Плоское движение газа при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1947, т. XI, вып. 4.
3. С т а н ю к о в и ч К. П. Неустойчившиеся движения сплошной среды. Гостехиздат, М., 1955.
4. Р а с к D. C. On the formation of shock-waves in supersonic gas jets. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1948, vol. 1, p. 1.

ДВИЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ПОРШНЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

М. П. М и х а й л о в а (Москва)

Рассмотрим движение газа за сферическим поршнем, [который расширяется с постоянной скоростью в среде, плотность которой ρ изменяется по закону

$$\rho = \rho_1 [1 - \epsilon z^\kappa] \quad (1)$$

где z — декартова координата, ϵ — малый параметр; ρ_1, κ — постоянные.

Аналогичная задача для сильного взрыва рассмотрена В. П. Карликовым [1]. Возьмем [в пространстве сферические координаты r, θ, ϕ . По условиям задачи давление p , плотность ρ , компоненты скорости v_r и v_θ , энтропия S не зависят от координаты ϕ и координата скорости $v_\phi = 0$. Все эти физические величины являются функциями переменных t, r, θ и параметров $\rho_1, p_1, \epsilon, \kappa, \gamma = c_p/c_v$. Из этих величин можно составить только три безразмерные переменные

$$\lambda = \frac{\gamma p_1 t^2}{\rho_1 r^2}, \quad \mu = \epsilon r^\kappa, \quad \theta$$

Таким образом, можно представить искомые размерные функции через безразмерные функции, зависящие от безразмерных переменных

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{r}{t} V_r'(\lambda, \mu, \theta), & v_\theta &= \frac{r}{t} V_\theta'(\lambda, \mu, \theta), \\ p &= \rho_1 \left(\frac{r}{t}\right)^2 P'(\mu, \theta), & \rho &= \rho_1 R'(\lambda, \mu, \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

Задача о движении газа за поршнем, который движется с постоянной скоростью в однородной среде, решена Л. И. Седовым [2]. Пусть $V_0(\lambda)$, $P_0(\lambda)$, $R_0(\lambda)$ есть решения этой задачи. Тогда линеаризованные искомые решения представим в виде:

$$\begin{aligned} V_r' &= V_0(\lambda) + V_r^\circ(\lambda, \theta), & V_\theta' &= \mu V_\theta^\circ(\lambda, \theta), & P' &= P_0(\lambda) + \mu P^\circ(\lambda, \theta), \\ R' &= R_0(\lambda) + \mu R^\circ(\lambda, \theta) \end{aligned} \quad (3)$$

Основные уравнения в сферических координатах имеют вид:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial r^2 \rho v_r}{\partial r} + \frac{r}{\sin \theta} \frac{\partial \rho v_\theta \sin \theta}{\partial \theta} &= 0 & \frac{\partial S}{\partial t} + v_r \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{r_\theta^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0 & (4) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta v_r}{r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

После перехода к безразмерным переменным и варьирования по μ получаем систему уравнений в частных производных относительно V_r° , V_θ° , P° , R° . Эту систему уравнений в частных производных можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, если воспользоваться методом Фурье. Представим искомые функции в виде

$$\begin{aligned} V_r^\circ &= F(\theta) V_r(\lambda), & P^\circ &= F(\theta) P(\lambda), & R^\circ &= F(\theta) R(\lambda), & V_\theta^\circ &= N(\theta) V_\theta(\lambda) \\ & \left(F(\theta) = P_\nu(\cos \theta), & N(\theta) = -\frac{1}{n^2} \frac{dP_\nu}{d\theta} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $P_\nu(\cos \theta)$ — полином Лежандра, ν — целое число. Если положить $V_\theta = n^2 V^{(\nu)}(\lambda)$, то решения для V_r° , P° , R° , V_θ° можно искать в виде бесконечных рядов следующего вида:

$$\begin{aligned} V_r^\circ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\cos \theta) V_r^{(\nu)}(\lambda) & R^\circ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\cos \theta) R^{(\nu)}(\lambda), \\ P^\circ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\cos \theta) P^{(\nu)}(\lambda), & V_\theta^\circ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1) \frac{dP_\nu}{d\theta} V_\theta^{(\nu)}(\lambda) \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим граничные условия. На поршне нормальная скорость газа равна скорости поршня $v_r = u$, и так как $V_0 = 1$, то $V_r(\lambda_n) = 0$, λ_n — значение λ на поршне, u — скорость поршня.

Впереди поршня на некотором расстоянии находится ударная волна. Ради упрощения задачи будем предполагать, что скорость поршня велика и условия на ударной волне возьмем в виде

$$v_2 = \frac{2}{\gamma + 1} c, \quad \rho_2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho, \quad p_2 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho c^2 \quad \begin{array}{l} c - \text{скорость} \\ \text{ударной волны} \end{array} \quad (7)$$

Условия на ударной волне после перехода к безразмерным переменным и варьирования по μ имеют вид

$$\begin{aligned} V_{r_2}^\circ(\lambda^*, \theta) &= 2 \left[\frac{\kappa + 1}{\gamma + 1} - V_0(\lambda^*) + 2\lambda^* \left(\frac{dV_0}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda^*} \right] f(\theta) \\ V_{\theta_2}^\circ(\lambda^*, \theta) &= -\frac{2}{\gamma + 1} f'(\theta) \end{aligned} \quad (8)$$

$$R_2^\circ(\lambda^*, \theta) = 2\lambda^* \left(\frac{dR_0}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda^*} f(\theta) - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \cos^x \theta$$

$$P_2^\circ(\lambda^*, \theta) = \left[4 \frac{\kappa + 1}{\gamma + 1} - 2P_0(\lambda^*) + 2\lambda^* \left(\frac{dP_0}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda^*} \right] f(\theta) - \frac{2}{\gamma + 1} \cos^x \theta$$

где λ^* — значение λ на ударной волне. Радиус-вектор r_2 на ударной волне представляется в виде

$$r_2 = r_{20} [1 + \mu^* f(\theta)] \quad (9)$$

Здесь $\mu^* = \varepsilon r_{20}^{\kappa}$ и $f(\theta)$ — неизвестная функция. Как известно, для автомодельного движения $V_0(\lambda)$, $P_0(\lambda)$, $R_0(\lambda)$ не выражаются в аналитической форме. После перехода к независимой переменной V_0 можно найти приближенное решение, разложив искомые функции по степеням $(1 - V_0)$

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_{00} \left[1 - \frac{2}{3} (1 - V_0) + \dots \right], & P_0 &= P_{00} \left[1 - \frac{2}{3} (1 - V_0) + \dots \right] \\ R_0 &= R_{00} \left[1 + \frac{1}{3} (1 - V_0)^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (10)$$

где λ_{00} , P_{00} , R_{00} — значения функций на поршне. Система обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $V_r^{(\nu)}(V_0)$, $P^{(\nu)}(V_0)$, $R^{(\nu)}(V_0)$, $V_\theta^{(\nu)}(V_0)$ имеет особую точку при $V_0 = 1$. Будем искать решения в виде рядов по степеням $(1 - V_0)$

$$\begin{aligned} V_r^{(\nu)} &= (1 - V_0)^s \sum_{n=0}^{\infty} a_{ni}^{(\nu)} (1 - V_0)^n, & R^{(\nu)} &= (1 - V_0)^s \sum_{n=0}^{\infty} c_{ni}^{(\nu)} (1 - V_0)^n \\ P^{(\nu)} &= (1 - V_0)^s \sum_{n=0}^{\infty} b_{ni}^{(\nu)} (1 - V_0)^n, & V_\theta^{(\nu)} &= (1 - V_0)^s \sum_{n=0}^{\infty} d_{ni}^{(\nu)} (1 - V_0)^n \end{aligned} \quad (11)$$

Характеристическое уравнение системы будет следующим:

$$s^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\kappa}{\lambda_n} \left(\frac{d\lambda}{dV_0} \right)_{V_0=1} - s \right] \left[\frac{\kappa + 1}{2\lambda_n} \left(\frac{d\lambda}{dV_0} \right)_{V_0=1} - s \right] = 0 \quad (12)$$

Корни этого уравнения, если учесть (10), имеют следующие значения

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = \frac{1}{3} \kappa, \quad s_4 = \frac{1}{3} (\kappa + 1)$$

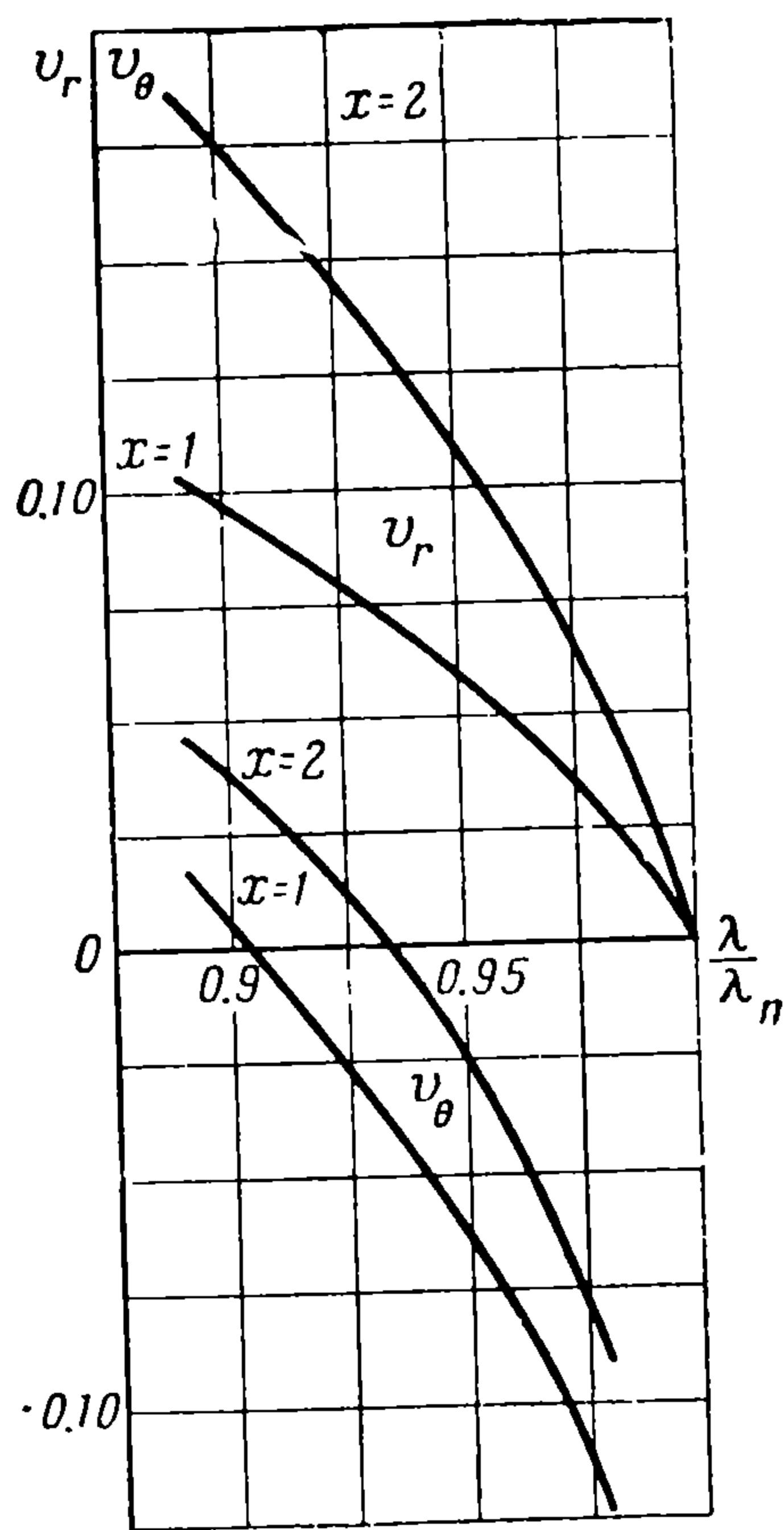
Корням s_1 , s_2 соответствуют решения с логарифмической особенностью [3]. Если s_3 и s_4 не будут целыми числами, то решения для $V_r^{(\nu)}$, $P^{(\nu)}$, $R^{(\nu)}$, $V_\theta^{(\nu)}$ можно, пренебрегая $(1 - V_0)^2$, представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} V_r^{(\nu)} &= \frac{b_{01}^{(\nu)}}{3\gamma P_{00}} \left[\kappa + \frac{\nu(\nu+1)\gamma P_{00}}{(\kappa+1)R_{00}} \right] (1 - V_0) [-\ln(1 - V_0)] - \\ &\quad - \frac{\nu(\nu+1)}{\kappa+4} d_{04}^{(\nu)} (1 - V_0)^{(\kappa+4)/3} \\ P^{(\nu)} &= b_{01}^{(\nu)} \left\{ \left[1 - \frac{\kappa+2}{3} (1 - V_0) \right] [\ln(1 - V_0) + 1] + \frac{6+\kappa}{3} (1 - V_0) \right\} \\ R^{(\nu)} &= \frac{R_{00}}{\gamma P_{00}} b_{01}^{(\nu)} \left\{ \left[1 - \frac{\kappa}{3} (1 - V_0) \right] [\ln(1 - V_0) + 1] + \frac{3\kappa+12}{(3-\kappa)} (1 - V_0) \right\} + \\ &\quad + c_{03}^{(\nu)} (1 - V_0)^{\kappa/3} \\ V_\theta^{(\nu)} &= \frac{b_{01}^{(\nu)}}{R_{00}(\kappa+1)} \left\{ \left[1 - \frac{\kappa+2}{3} (1 - V_0) \right] [\ln(1 - V_0) + 1] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(3\kappa+12)}{3(2-\kappa)} (1 - V_0) \right\} + d_{04}^{(\nu)} (1 - V_0)^{(\kappa+1)/3} \left[1 - \frac{1}{3} (1 - V_0) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

При этом условии на поршне уже учтено. Неизвестные постоянные $d_{04}^{(\nu)}$, $c_{03}^{(\nu)}$, $b_{01}^{(\nu)}$ определяются из условий на ударной волне. В случае $\kappa = 1$ решения будут следующими:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{r}{t} \left[V_0 + \mu \left\{ \frac{b_{01}^{(1)}}{3\gamma P_{00}} \left(1 + \frac{\gamma P_{00}}{R_{00}} \right) (1 - V_0) [-\ln(1 - V_0)] - \frac{2}{5} d_{04}^{(1)} (1 - V_0)^{5/3} \right\} \cos \theta \right] \\ v_\theta &= \frac{r}{t} \mu \left[\frac{b_{01}^{(1)}}{2R_{00}} \{ V_0 \ln(1 - V_0) + 1 + 4(1 - V_0) \} + d_{04}^{(1)} (1 - V_0)^{2/3} \left[1 - \frac{1}{3} (1 - V_0) \right] \right] \sin \theta \\ p &= \rho_1 \left(\frac{r}{t} \right)^2 \left\{ P_{00} \left[1 - \frac{2}{3} (1 - V_0) \right] + \mu b_{01}^{(1)} \left[V_0 \ln(1 - V_0) + 1 + \frac{4}{3} (1 - V_0) \right] \cos \theta \right\} \\ \rho &= \rho_1 \left[R_{00} + \mu \left(\frac{b_{01}^{(1)} R_{00}}{\gamma P_{00}} \left\{ \left[1 - \frac{1}{3} (1 - V_0) \right] \ln(1 - V_0) + 1 + \frac{13}{6} (1 - V_0) \right\} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c_{03}^{(1)} (1 - V_0)^{1/3} \right) \cos \theta \right] \\ r_2 &= r_{20} [1 + \mu^* c_1 \cos \theta] \end{aligned} \quad (14)$$

В случае $\kappa = 2$ корень s_4 будет целым числом. В этом случае



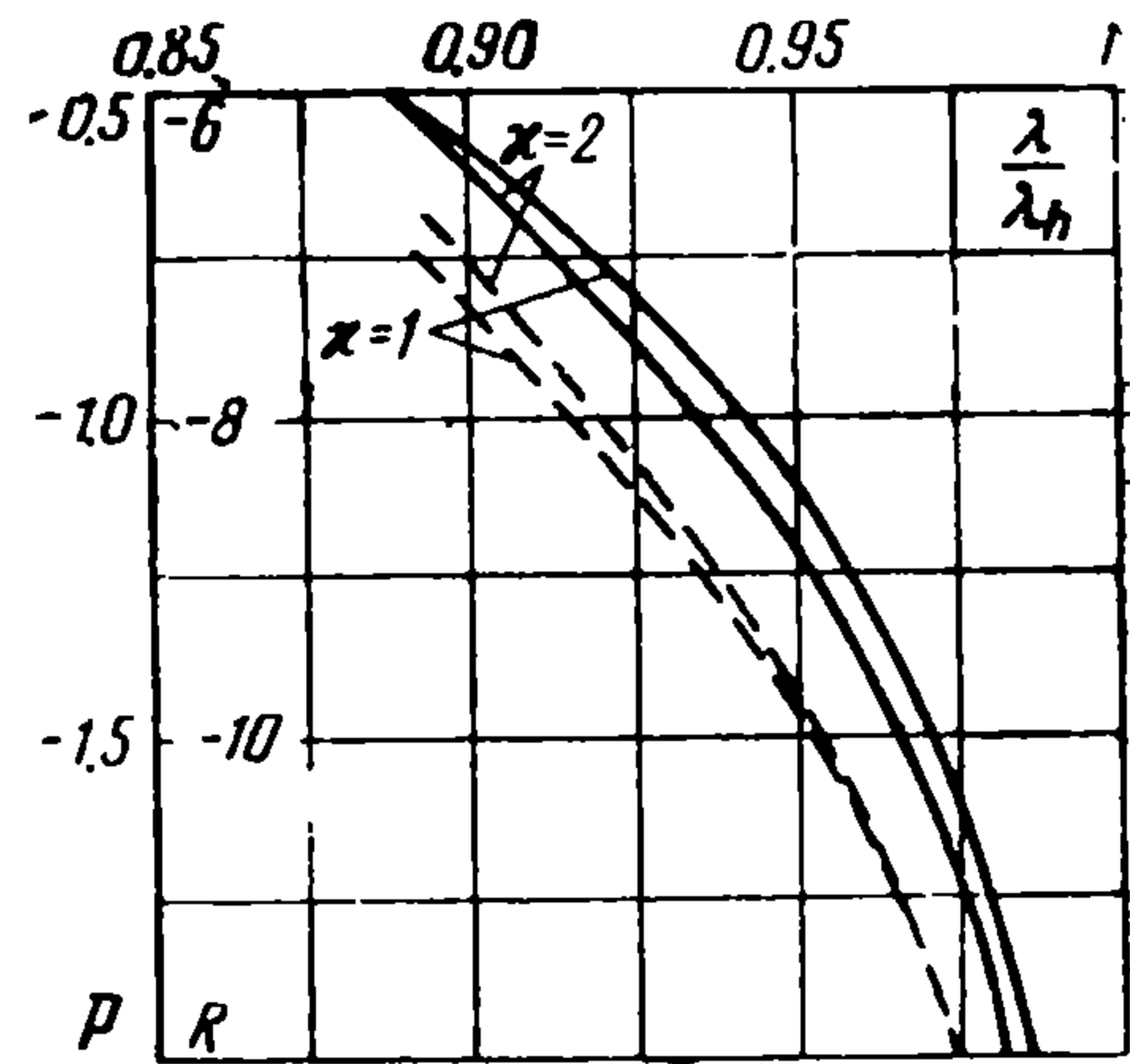
Фиг. 1

$$V_r^{(\nu)} = \frac{b_{01}^{(\nu)}}{3\gamma P_{00}} \left[-2 + \frac{\nu(\nu+1)\gamma P_{00}}{3R_{00}} \right] (1-V_0) [-\ln(1-V_0)]$$

$$P^{(\nu)} = b_{01}^{(\nu)} \left\{ \left[1 - \frac{4}{3}(1-V_0) \right] \ln(1-V_0) + 1 + \frac{4}{3}(1-V_0) \right\}$$

$$R^{(\nu)} = \frac{b_{01}^{(\nu)} R_{00}}{\gamma P_{00}} \left\{ \left[1 - \frac{2}{3}(1-V_0) \right] \ln(1-V_0) + \frac{16}{3}(1-V_0) \right\} + c_{03}^{(\nu)} (1-V_0)^{2/3}$$

$$V_\theta^{(\nu)} = \left[\frac{b_{01}^{(\nu)}}{3R_{00}} + d_{11}^{(\nu)} (1-V_0) \right] [1 + \ln(1-V_0)]$$



Фиг. 2

Окончательные формулы для решения будут иметь следующий вид:

$$v_r = \frac{r}{t} \left\{ V_0 + \mu \left[\frac{b_{01}^{(0)}}{3\gamma P_{00}} \left(2 \frac{\gamma P_{00n}}{3R_{00n}} \right) + \frac{b_{01}^{(2)}}{3\gamma P_{00n}} \left(1 + \frac{\gamma P_{00}}{R_{00}} \right) (3\cos^2 \theta - 1) \right] \times \right. \\ \left. \times (1-V_0) [-\ln(1-V_0)] \right\} \quad (16)$$

$$v_\theta = \frac{r}{t} \mu \left[\frac{b_{01}^{(2)}}{3R_{00}} + d_{11}^{(2)} (1-V_0) \right] 3\cos \theta \sin \theta [\ln(1-V_0) + 1]$$

$$p = \rho_1 \left(\frac{r}{t} \right)^2 \left(P_{00} \left[1 - \frac{2}{3}(1-V_0) \right] + \mu \left[b_{01}^{(0)} + \frac{1}{2} b_{01}^{(2)} (3\cos^2 \theta - 1) \right] \times \right. \\ \left. \times \left\{ \left[1 - \frac{4}{3}(1-V_0) \right] \ln(1-V_0) + 1 + \frac{4}{3}(1-V_0) \right\} \right)$$

$$p = \rho_1 \left(R_{00n} + \mu \frac{R_{00}}{\gamma P_{00}} \left[b_{01}^{(0)} + \frac{1}{2} b_{01}^{(2)} (3\cos^2 \theta - 1) \right] \times \right. \\ \left. \times \left\{ \left[1 - \frac{2}{3}(1-V_0) \right] \ln(1-V_0) + 1 + \frac{16}{3}(1-V_0) \right\} + \right.$$

$$\left. + \mu \left\{ \left[c_{03}^{(0)} + \frac{1}{2} c_{03}^{(2)} (3\cos^2 \theta - 1) \right] (1-V_0)^{2/3} \right\} \right)$$

$$r_2 = r_{20} \left\{ 1 + \mu^* \left[c_0 + \frac{1}{2} c_2 (3\cos^2 \theta - 1) \right] \right\}$$

Результаты вычисления V_r° в зависимости от λ/λ_n для $\theta = 0$ и V_θ° для $\theta = 45^\circ$ представлены в виде графиков на фиг. 1; на фиг. 2 представлены сплошными кривыми зависимости R , пунктирными кривыми — зависимости p .

Поступила 7 X 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Карликов В. П. Решение линеаризованной осесимметричной задачи о точечном взрыве в среде с переменной плотностью. ДАН, 1955, т. 101, № 6.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат М., 1957.
3. Пиджико. Интегрирование дифференциальных уравнений. ГТТИ, 1933.