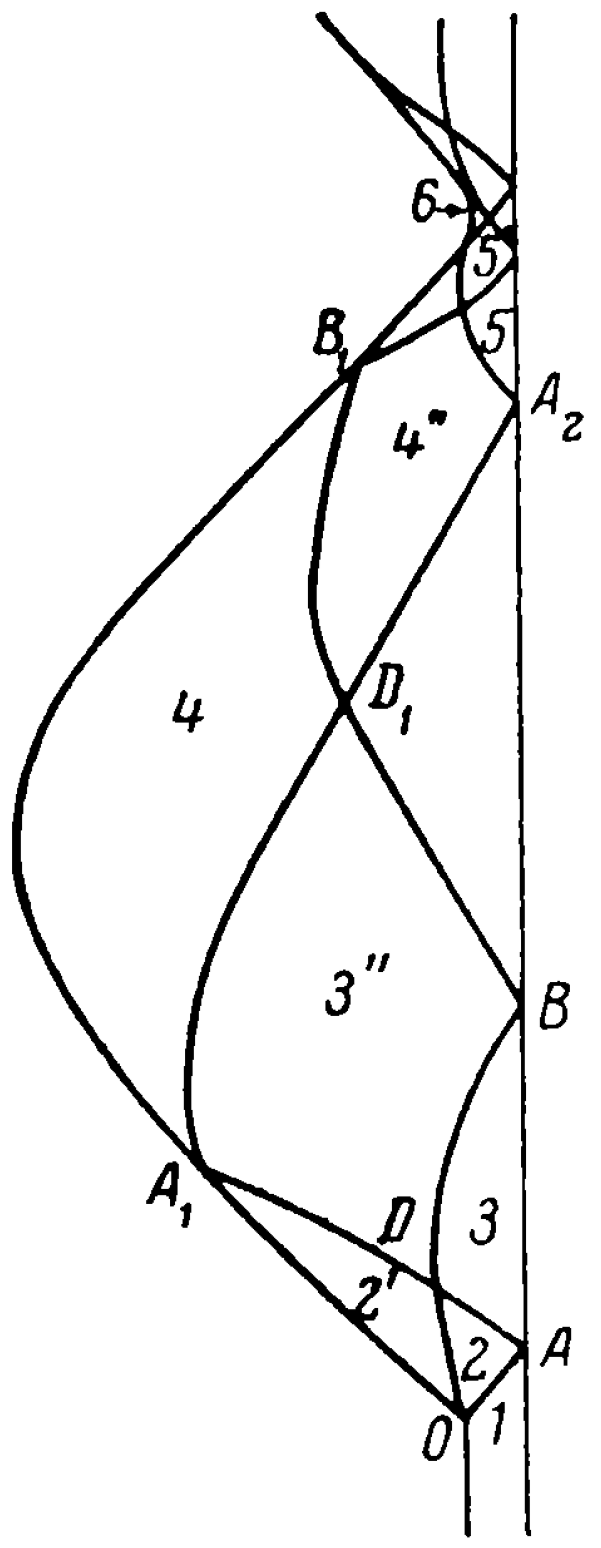
ОБ ИСТЕЧЕНИИ ПЛОСКОЙ ГИПЕРЗВУКОВОЙ СТРУИ В ПОКОЯЩУЮСЯ СРЕДУ

В. А. Смирнов

(Москва)

Для рассматриваемой задачи истечения струи из прямого среза в гиперзвуковом приближении получено точное решение. Показано, что при любых соотношениях чисел M в невозмущенной струе и на ее границе со средой ударные волны в струе образуются до прохождения ею первого сжатия. Решение получено для бесконечной последовательности дискретных значений $\varkappa$.



1. Неустановившееся одномерное движение газа и плоское безвихревое гиперзвуковое течение определяются одним и тем же уравнением

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} - \frac{4}{(\varkappa-1)^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} + \frac{3-\varkappa}{\varkappa-1}\frac{1}{z}\frac{\partial \chi}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

Переменные здесь имеют для одномерного неустановившегося движения смысл: z — скорость звука, θ — скорость частиц. Для плоского гиперзвукового течения $z = 1/M = a/\tau$, где a — скорость звука, τ — модуль скорости частиц, θ — угол наклона вектора скорости к оси x.

Переменные плоскости течения t, y или x, y определяются формулами:

$$x \text{ (или } t) = \frac{\varkappa-1}{2z}\frac{\partial \chi}{\partial z}, \qquad y = \theta x - \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \qquad (2)$$

Изложенное отвечает существованию известной гиперзвуковой аналогии.

Для одномерного изэнтропического движения газа формулы (1), (2) являются точными [1]; для плоского установившегося гиперзвукового течения они получаются в предположении [2] малости величин h^2z^2 и z^2 по сравнению с единицей, где $h^2 = (\varkappa+1)/(\varkappa-1)$.

Для значений $\varkappa = (2n+3)/(2n+1)$, где n — целое, общее решение уравнения (1) есть:

$$\chi(z,\theta) = \left(\frac{\partial}{z\partial z}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{z}\varphi\left(z+\frac{\varkappa-1}{2}\theta\right) + \frac{1}{z}\psi\left(z-\frac{\varkappa-1}{2}\theta\right)\right\} \qquad (3)$$

2. Решение, описывающее простую волну

$$y = (\theta \pm z)x + f(\theta) \qquad (4)$$

не содержится в общем решении (3) и является особым интегралом уравнения (1). Вследствие этого течение вида (3) может следовать за областью постоянного течения лишь через промежуточную стадию простой волны. На граничной с простой волной характеристике функция $\chi(z, \theta)$ принимает значение [1]:

$$\chi = -\int f(\theta)\, d\theta \qquad (5)$$

3. Рассмотрим задачу об истечении плоской гиперзвуковой струи в покоящуюся среду из прямого среза, что соответствует задаче о движении поршня в замкнутой трубе при условии постоянства на нем величины давления. Определяющими параметрами задачи являются: значение z_0' в исходной струе, значение z_1' на свободной границе струи, зависящее от параметров среды, и полуширина l струи.

Безразмерные координаты в плоскости течения $x = z_0'x'/l$, $y = y'/l$ зависят от одного параметра: $\eta = z_1'/z_0'$ и безразмерных переменных $z = z'/z_0'$ и $\theta = \theta'/z_0'$.

Достаточно рассмотреть половину струи, считая плоскость ее симметрии твердой стенкой.

При выходе в среду граница струи вначале будет прямолинейной, отходящей от точки O (фиг. 1) под углом $\theta = 2(\eta-1)/(\varkappa-1)$ и от этой точки пойдет центрированная волна разрежения[1]. В плоскости xy в области *1* будет постоянное

[1] Случай истечения струи в среду с большим давлением рассмотрен в конце статьи.

течение $z=1$, $\theta=0$, в области *2* — волна разрежения $y=(\theta+z)x$, в области *2'* — постоянное течение $z=\eta$, $\theta=2(\eta-1)/(\varkappa-1)$. В области *3* — взаимодействия падающей волны с отраженной от стенки, имеем [3]

$$\chi_3(z,\theta)=\frac{(4n^2-1)(n-1)!}{2n!}\left(\frac{\partial}{z\partial z}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{z}\left[\left(z-\frac{\varkappa-1}{2}\theta\right)^2-1\right]^n\right\} \tag{6}$$

или

$$\varphi_3(u)\equiv 0,\qquad \psi_3(u)=\frac{(4n^2-1)(n-1)!}{2n!}(u^2-1)^n=a(u^2-1)^n$$

В области *3'* — постоянное течение с параметрами $z=2\eta-1$, $\theta=0$, в области *3''* — волна разрежения $y=(\theta-z)x+F_3'(\theta)$; здесь $F_3(\theta)$ — значения χ_3 на характеристике DB, т. е. при $z=2\eta-1-{}^1\!/_2(\varkappa-1)\theta$.

4. Течение в области *4* определяется граничными условиями на характеристике A_1D_1 и на свободной границе струи. Области *3* и *4* граничат вдоль характеристик DB и A_1D_1 соответственно с одной и той же простой волной. Поэтому вследствие (5) имеем

$$\chi_4=\chi_3\quad\text{при } z=2\eta-1-\frac{\varkappa-1}{2}\theta \tag{7}$$

Условие на свободной границе получится из того факта, что граница струи является линией тока и на ней (в гиперзвуковом приближении)

$$dy/dx=\theta\quad\text{при } z=\eta$$

Так как здесь $\dfrac{\partial}{\partial\theta}=\dfrac{d}{d\theta}$, то, используя (2), получим

$$\left(x+\theta\frac{dx}{d\theta}-\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2}\right)\Big/\frac{dx}{d\theta}=\theta\qquad\text{при } z=\eta$$

что возможно лишь, если

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2}-\frac{\varkappa-1}{2z}\frac{\partial\chi}{\partial z}=0\qquad\text{при } z=\eta \tag{8}$$

Обращение производной $dx/d\theta$ в бесконечность означало бы прямолинейность границы струи в области ее взаимодействия с падающей простой волной.

Вследствие уравнения (1) условие (8) может быть представлено также в вид

$$\left[\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}-\frac{1}{z}\frac{\partial\chi}{\partial z}\right]_{z=\eta}=0\quad\text{или}\quad\left[\frac{\partial^2\chi}{(z\partial z)^2}\right]_{z=\eta}=0 \tag{9}$$

5. Условие (7) определяет функцию $\psi_4(u)$ в виде:

$$\psi_4(u)=\psi_3(u)+\Phi(b_1,\ldots,b_{n-1};\ \varphi_4(2\eta-1),\ \varphi_4'(2\eta-1),\ldots,\ \varphi_4^{n-1}(2\eta-1);\ u) \tag{10}$$

где Φ — многочлен по u с коэффициентами, пропорциональными

$$b_1,\ldots,b_{n-1};\qquad \varphi_4(2\eta-1),\quad \varphi_4^1(2\eta-1),\ldots,\quad \varphi_4^{(n-1)}(2\eta-1) \tag{11}$$

Константы $b_1,\ldots,b_{n-1}$ обусловлены тем, что функция $\chi(z,\theta)$ представлена как $(n-1)$-я производная от φ и ψ. В выражении для функции $\chi(z,\theta)$ эти константы исчезнут и, следовательно, можно положить

$$b_1=\ldots b_{n-1}=0. \tag{12}$$

Условие (9) дает линейное неоднородное уравнение порядка $(n+1)$ с постоянными коэффициентами для функции $\varphi_4(u)$. В решение для $\varphi_4(u)$ войдет $(n+1)$ произвольных постоянных, которые определяются через $\varphi_4(2\eta-1)$, $\varphi_4'(2\eta-1),\ldots$ $\ldots,\varphi_4^{(n-1)}(2\eta-1)$, и из условия совпадения координат точки сопряжения свободной границы струи в областях *4* и *2* (одно условие). Это условие вообще будет

$$\frac{\partial\chi_{2m}}{\partial\theta}=\frac{\partial\chi_{2m-2}}{\partial\theta} \tag{13}$$

при z и θ, соответствующих точке сопряжения (здесь $2m$ — номер области). Для определения величин $\varphi_4(2\eta-1)$, $\varphi_4'(2\eta-1),\ldots,\varphi_4^{(n-1)}(2\eta-1)$ нет условий и, в соответствии с этим, непосредственной подстановкой можно убедиться, что их значения несущественны, так как в выражении функции $\chi(z, \theta)$ все они исчезнут. Таким образом, можно положить:

$$\varphi_4(2\eta-1)=\varphi_4'(2\eta-1)=\ldots=\varphi_4^{(n-1)}(2\eta-1)=0 \tag{14}$$

Из определения функции Φ и соотношений (12), (14) следует, что $\Phi\equiv 0$ и

$$\psi_4(u)=\psi_3(u)=a(u^2-1)^n \tag{15}$$

Вследствие (3) условие (9) запишется в виде

$$\left[\left(\frac{\partial}{z\partial z}\right)^{n+1}\left\{\frac{1}{z}\varphi_4\left(z+\frac{\varkappa-1}{2}\theta\right)+\frac{1}{z}\psi_3\left(z-\frac{\varkappa-1}{2}\theta\right)\right\}\right]_{z=\eta}=0 \tag{16}$$

Легко видеть, что частным решением этого уравнения будет

$$\varphi_4(u)=-\psi_3(u) \tag{17}$$

Действительно, вследствие (15) выражение

$$\frac{1}{z}\left[-\psi_3\left(z+\frac{\varkappa-1}{2}\theta\right)+\psi_3\left(z-\frac{\varkappa-1}{2}\theta\right)\right]$$

будет многочленом по z^2 порядка $(n-1)$. Общим решением (16) будет

$$\varphi_4(u)=-\psi_3(u)+a_1\exp\left(\frac{\alpha_1}{\eta}u\right)+a_2\exp\left(\frac{\alpha_2}{\eta}u\right)+\ldots+a_{n+1}\exp\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\eta}u\right) \tag{18}$$

где $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}$ — корни характеристического уравнения, соответствующего (16).

$$\alpha^{n+1}-\frac{(n+1)(n+2)}{2}\alpha^n+\frac{(n+2)(n+1)n+(n+1)n(n-1)+\ldots+3\cdot2\cdot1}{2}\alpha^{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+(-\lambda)^{n+1}\frac{(2n+\lambda)!}{2^n n!}=0 \tag{19}$$

Постоянные $a_1,\ldots,a_{n+1}$ определяются из условий (13) и (14).

6. В области *5* условие на характеристике, граничной с *4*,

$$\chi_5=\chi_4 \text{ при } z=2\eta-1+\frac{\varkappa-1}{2}\theta$$

приводит к равенствам

$$\varphi_5(u)=\varphi_4(u) \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\psi_5(2\eta-1)&=\psi_4(2\eta-1)=\psi_3(2\eta-1)\\ \psi_5'(2\eta-1)&=\psi_3'(2\eta-1) \qquad (21)\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \psi_5^{(n-1)}(2\eta-1)&=\psi_3^{(n-1)}(2\eta-1)\end{aligned}$$

Условие $\partial\chi_5/\partial\theta=-1$ при $\theta=0$ на плоскости симметрии течения в сочетании с (21) определяет $\psi_5(u)$ в виде

$$\psi_5(u)=\varphi_5(u)+\psi_3(u)=\varphi_4(u)+\psi_3(u) \tag{22}$$

В последующих областях определение функций φ и ψ подобно рассмотренному для областей *4* и *5*: все они выражаются через найденные выше две функции: $\psi_3(u)$ и $\varphi_4(u)$. Приводим выражения функций φ и ψ по областям течения.

Область	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	и т. д.
$\varphi=$	0	φ_4	φ_4	$\varphi_4+\psi_3$	$\varphi_4+\psi_3$	$\varphi_4+2\psi_3$	и т. д.
$\psi=$	ψ_3	ψ_3	$\varphi_4+\psi_3$	$\varphi_4+\psi_3$	$\varphi_4+2\psi_3$	$\varphi_4+2\psi_3$	и т. д.

7. В областях *4—6* течение имеет характер волн сжатия и, следовательно, возможно пересечение характеристик одного семейства нарушение изэнтропичности течения, образование ударных волн.

В случае, если характеристики не пересекаются в этом течении, координата x границы струи в области *6* должна быть монотонной функцией θ или характеристического параметра $\lambda=\eta+{}^1/_2(\varkappa-1)\theta$ в интервале изменения

$$2\frac{1-\eta}{\varkappa-1}\geqslant\theta\geqslant-2\frac{1-\eta}{\varkappa-1}, \text{ или } 2\eta-1\leqslant\lambda\leqslant 1$$

Если характеристики пересекаются, то в этой области изменения параметра функция $x(\lambda)$ должна иметь экстремум. Пользуясь выражениями, приведенными выше для функций φ и ψ в области *6*, получим, согласно (3) и (2)

$$x = \frac{(\varkappa-1)}{2}\left(\frac{\partial\chi_6}{\partial z}\right)_{z=\eta} = \frac{\varkappa-1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n\left\{\frac{1}{z}\sum_{k=1}^{n+1} a_k\left\{\exp\left[\frac{\alpha_k}{\eta}\left(z+\frac{\varkappa-1}{2}\,\theta\right)\right]+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\exp\left[\frac{\alpha_k}{\eta}\left(z-\frac{\varkappa-1}{2}\,\theta\right)\right]\right\}\right\}\right]_{z=\eta} = \sum_{k=1}^{n+1} b_k\left[\exp\frac{\alpha_k\lambda}{\eta}+\exp\frac{\dot\alpha_k(2\eta-\lambda)}{\eta}\right]$$

где b_k не зависят от λ. Отсюда

$$\frac{dx}{d\lambda} = \sum_1^{n+1}\frac{b_k\alpha_k}{\eta}\left[\exp\frac{\alpha_k\lambda}{\eta}-\exp\frac{\alpha_k(2\eta-\lambda)}{\eta}\right]$$

Легко видеть, что корнем этой функции является значение $\lambda=\eta$, лежащее в указанном интервале изменения λ. Это означает, что при любом соотношении чисел M в исходной струе и на ее границе со средой (т. е. при любом значении η) и при любых $\varkappa$ характеристики пересекаются в области *6* или раньше.

Таким образом, изэнтропическое течение в гиперзвуковой струе никогда не распространяется дальше первого сжатия струи. Расчет показывает, что при $0<\eta\leqslant 0.5$ ударная волна образуется в результате пересечения характеристик в областях *3* и *4*, при $0.5<\eta\leqslant 0.88$ — в областях *4* и *4″*, при $0.88<\eta<1$ — в областях *5*, *5″* и *6*.

Возможность образования ударных волн в сверхзвуковой струе была выяснена Пэкком [4] путем численного расчета методом конечных разностей для двух примеров течения. Изложенное решение непосредственно переносится на случай истечения струи из прямого среза в среду с большим давлением. В этом случае по выходе в среду образуется ударная волна, фронт которой прямолинеен. Свободная граница также прямолинейна. От точки встречи ударной волны, отраженной от плоскости симметрии, со свободной границей отходит центрированная волна разрежения и начинается течение, рассмотренное выше.

Поступила 9 III 1960

Институт механики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.
2. Фалькович С. В. Плоское движение газа при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1947, т. XI, вып. 4.
3. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. Гостехиздат, М., 1955.
4. Pack D. C. On the formation of shock-waves in supersonic gas jets. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1948, vol. 1, p. 1.

ДВИЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ПОРШНЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

М. П. Михайлова (Москва)

Рассмотрим движение газа за сферическим поршнем, который расширяется с постоянной скоростью в среде, плотность которой ρ изменяется по закону

$$\rho = \rho_1[1-\varepsilon z^\varkappa] \tag{1}$$

где z — декартова координата, ε — малый параметр; ρ_1, $\varkappa$ — постоянные.

Аналогичная задача для сильного взрыва рассмотрена В. П. Карликовым [1]. Возьмем в пространстве сферические координаты r, θ, φ. По условиям задачи давление p, плотность ρ, компоненты скорости v_r и v_θ, энтропия S не зависят от координаты φ и координата скорости $v_\varphi=0$. Все эти физические величины являются функциями переменных t, r, θ и параметров ρ_1, p_1, ε, $\varkappa$, $\gamma=c_p/c_v$. Из этих величин можно составить только три безразмерные переменные

$$\lambda = \frac{\gamma p_1}{\rho_1}\frac{t^2}{r^2}, \qquad \mu = \varepsilon r^\varkappa, \qquad \theta$$