О ЗАТУХАНИИ УДАРНЫХ ВОЛН В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПЛОТНОСТЬЮ И ТЕМПЕРАТУРОЙ

О. Ю. Полянский

(Москва)

Вопросам нелинейного затухания ударных волн в однородной среде посвящено большое количество работ, укажем, например, [1-4].

Распространение ударных волн малой амплитуды в неоднородной среде рассматривалось К. Е. Губкиным [5], который применил для этой цели метод интегрирования уравнений вдоль характеристик.

Ниже рассматривается задача распространения ударных волн в движущейся среде с переменными плотностью и температурой в предположении, что ударная волна слабая, а длина волны много меньше характерного размера задачи. Показывается, что нелинейные эффекты в этом случае можно определить, используя подход, аналогичный примененному Л. Д. Ландау в работе [1]. Приводятся асимптотические формулы для избыточного давления на фронте волны с линейным профилем давления при некоторых законах изменения плотности среды.

В случае «слабо переменной среды» получены простые приближенные формулы, позволяющие рассчитать избыточное давление на фронте волны с линейным профилем давления.

1. Рассмотрим распространение слабых ударных волн в неоднородной среде. Полагаем, что невозмущенные давление p, плотность ρ, скорость звука a и скорость движения газа $\mathbf{u}$ (скорость ветра) суть функции координат. Будем предполагать, что во всей рассматриваемой области

$$\frac{\Delta p}{p} \ll 1, \qquad \frac{l}{H} \ll 1, \qquad \frac{l}{R} \ll 1 \tag{1.1}$$

Здесь Δp — избыточное давление в волне, l — длина волны (в дальнейшем под l будем подразумевать длину зоны сжатия волны), H — характерный размер задачи — расстояние, на котором существенно меняются параметры среды, R — радиус кривизны фронта волны.

Из последнего неравенства (1.1) следует, что цилиндрические и сферические волны локально на каждом небольшом участке можно рассматривать как плоские. Введем декартову систему координат x, y, z.

Будем считать, что решения уравнений движения в приближении геометрической акустики известны, т. е. известны конфигурация лучей и изменения избыточного давления $\Delta p'$ и длины волны l' вдоль луча (штрих указывает, что значение соответствующего параметра берется в приближении геометрической акустики).

Найдем дополнительное по сравнению с акустикой затухание ударной волны с линейным профилем давления вдоль произвольно выбранного луча $\xi(x, y, z)$.

В основу дальнейших рассмотрений будут положены свойства одномерных бегущих волн, определяемых римановскими решениями уравнений движения (так называемая простая волна, см., например, [6], § 94), согласно которым скорость перемещения точки профиля волны U равняется сумме местной скорости звука и скорости газа в волне v или, в несколько иной форме,

$$U = a + \alpha v \qquad \left(\alpha = \frac{\varkappa + 1}{2}, \quad \varkappa = \frac{c_p}{c_v}\right) \tag{1.2}$$

В скобках указано значение α для идеальных газов, $\varkappa$ — отношение теплоемкостей при постоянных давлении и объеме (для воздуха $\alpha = 1.2$).

При наличии разрыва решение Римана теряет силу, однако для волн малой амплитуды с точностью до членов второго порядка относительно $\Delta p \;/\, p$ волна остается простой, а положение разрыва находится при помощи простого правила, описанного в [6], § 95.

Согласно (1.2), дополнительное по сравнению с акустикой смещение элемента профиля волны вдоль луча в направлении нормали к фронту волны за время от t_0 до t определяется выражением

$$\delta\xi = \alpha \int_{t_0}^{t} v dt$$

В первом приближении

$$v = \Delta p' / \rho a, \quad dt = U_*^{-1} d\xi;$$

Здесь U_* — так называемая лучевая скорость, равная $|a\mathbf{n} + \mathbf{u}|$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный по нормали к фронту волны, $d\xi$ — дифференциал дуги вдоль луча. Имеем

$$\delta\xi = \alpha \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\Delta p'}{\rho a} \frac{d\xi}{U_*}, \qquad U_* = a \sqrt{1 + \frac{2u_n}{a} + \left(\frac{u}{a}\right)^2} \qquad (u_n = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) \tag{1.3}$$

Здесь ξ_0 — положение элемента профиля волны в момент t_0 на рассматриваемом луче (далее через ξ_0 будем обозначать положение ударной волны при $t = t_0$).

Заметим, что длина волны в приближении геометрической акустики определяется выражением

$$l'(t) = l_0 \frac{N(t)}{N(t_0)} \qquad \left(l_0 = l(t_0), \ \frac{N(t)}{N(t_0)} = \frac{N(\xi)}{N(\xi_0)} = \frac{a(\xi) + u_n(\xi)}{a(\xi) + u_n(\xi_0)}\right) \tag{1.4}$$

Учитывая (1.3) и (1.4) и повторяя, по существу, рассуждения Л. Д. Ландау, [6], § 95, получаем следующие выражения для длины волны l и избыточного давления на фронте волны Δp_Φ (для волны с линейным профилем давления):

$$l(\xi) = l_0 \frac{N(\xi)}{N(\xi_0)} \sqrt{1 + \Phi(\xi, \xi_0)}, \quad \Phi(\xi, \xi_0) = \frac{\alpha}{l_0} \frac{N(\xi_0)}{N(\xi)} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\Delta p_\Phi'}{\rho a} \frac{d\xi}{U_*} \tag{1.5}$$

$$\Delta p_\Phi(\xi) = \frac{\Delta p_\Phi'}{\sqrt{1 + \Phi(\xi, \xi_0)}} \tag{1.6}$$

2. Рассмотрим асимптотическое поведение ударных волн в спокойной изотермической среде с переменной плотностью. В этом случае лучи будут прямолинейные, а

$$\Delta p_\Phi'(\xi) = \frac{\Delta p_0}{(\xi/\xi_0)^\nu} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \qquad (\Delta p_0 = \Delta p_\Phi'(\xi_0), \ \rho_0 = \rho(\xi_0))$$

Здесь $\nu = 0$, $1/2$, 1 соответственно в случае плоских, цилиндрических и сферических волн. Тогда из (1.6) получаем

$$\Delta p_\Phi = \frac{\Delta p_0}{(\xi/\xi_0)^\nu} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \frac{1}{\sqrt{1 + m_\nu \Psi(\xi, \xi_0)}} \tag{2.1}$$

Здесь

$$m_\nu = \frac{\alpha \Delta p_0 \xi_0}{l_0 a_0^2 \rho_0}, \qquad \Psi(\xi, \xi_0) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{(\xi/\xi_0)^\nu \xi_0 \sqrt{\rho/\rho_0}}$$

Если вдоль луча $\sqrt{\rho}$ возрастает быстрее, чем $\xi^{1-\nu}$, то предельный закон затухания интенсивности ударной волны будет

$$\Delta p_\Phi \sim \frac{\sqrt{\rho}}{\xi^\nu} \tag{2.2}$$

т. е. такой же, как и в акустике.

Следует отметить, что для выполнения условий (1.1) необходимо, чтобы плотность вдоль луча возрастала не быстрее, чем по экспоненте.

Если $\rho = \text{const}$, то из (2.1) получаем асимптотические формулы Л. Д. Ландау [1]

$$\begin{aligned} \Delta p &\sim \frac{1}{\sqrt{\xi}} && \text{при } \nu = 0 \\ \Delta p &\sim \frac{1}{\xi^{3/4}} && \text{при } \nu = {}^1/_2 \\ \Delta p &\sim \frac{1}{\xi\sqrt{\ln(\xi/\xi^*)}} && \text{при } \nu = 1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Если же $\sqrt{\rho}$ вдоль луча уменьшается (или возрастает, но не быстрее, чем $\xi^{1-\nu}$), то формально нетрудно получить асимптотические законы затухания ударной волны и в этом случае. Однако требование, чтобы выполнялись неравенства (1.1), налагает существенные ограничения на законы изменения плотности, при которых возможно асимптотическое представление $\Delta p_{\text{ф}}$ в рамках рассматриваемого приближения.

В том случае, если $\sqrt{\rho} \sim \xi^{c-\nu}$, где $-1 < c < 1$, т. е. если ρ уменьшается не быстрее, чем ξ^{-4}, то в пределе

$$l \sim \xi^{\frac{1-c}{2}}, \quad \Delta p_{\text{ф}} \sim \rho^{3/4} \xi^{-\frac{1+\nu}{2}} \tag{2.4}$$

В этом случае, если представить $\Delta p_{\text{ф}}$ в виде

$$\Delta p_{\text{ф}} \sim \Delta p_+ \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}\, \mu(\rho)$$

где Δp_+ — избыточное давление на фронте волны, распространяющейся в однородной среде (см. формулы (2.3)), то при $\xi \to \infty$ имеют место равенства

$$\mu(\rho) = (\rho / \rho_0)^{1/4} \qquad \text{для } \nu = 0 \text{ и } \nu = {}^1/_2$$

$$\mu(\rho) = (\rho / \rho_0)^{1/4} \sqrt{\ln(\xi / \xi^*)} \qquad \text{для } \nu = 1$$

Функция $\mu(\rho)$ характеризует нелинейное затухание интенсивности ударной волны, обусловленное изменением плотности среды.

3. Рассмотрим среду, в которой все гидродинамические параметры в невозмущенном состоянии зависят лишь от одной координаты, например z. Предположим, что во всей рассматриваемой области

$$\frac{|\operatorname{grad} a|}{a_0}(\xi - \xi_0) < \varepsilon \ll 1, \quad \frac{|\operatorname{grad} u|}{a_0}(\xi - \xi_0) < \varepsilon \ll 1$$

В этом случае с точностью до членов порядка ε величину $\Delta p'$ вдоль луча можно представить в виде

$$\Delta p' = \Delta p_0 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \sqrt{\frac{a}{a_0}} \sqrt{\frac{s_0}{s}} \left(1 + \frac{u_n - u_{n0}}{a_0}\right)^{-1} \tag{3.1}$$

Здесь индексом 0 отмечены значения соответствующих параметров в каком-либо выбранном сечении 0 бесконечно узкой лучевой трубки, построенной на базе рассматриваемого луча; s — площадь поперечного сечения такой лучевой трубки. Формулу (3.1) можно доказать следующим образом. Из [5] для $\Delta p_{\text{ф}}'$ имеем

$$\Delta p_{\text{ф}}' = \frac{\Delta p_0}{L} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \sqrt{\frac{a}{a_0}}$$

Здесь в рассматриваемом случае

$$L = \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t \left(a \operatorname{div} \mathbf{n} + \frac{du_x}{dz} n_x n_z + \frac{du_y}{dz} n_y n_z\right) dt\right]$$

(интеграл берется вдоль луча). Так как $\operatorname{div} \mathbf{u} / a = 0$, а $dt = U_*^{-1} d\xi$, то с точностью до членов порядка ε имеем

$$L = \exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\frac{1}{a+u_n}\left[(a+u_n)\operatorname{div}\left(\mathbf{n}+\frac{\mathbf{u}}{a}\right)-u_n\operatorname{div}\mathbf{n}+\frac{du_n}{d\xi}\right]d\xi\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\frac{ds}{s}+2\frac{du_n}{a_0}\right\} = \sqrt{\frac{s}{s_0}}\left[1+\frac{u_n-u_{n0}}{a_0}+O(\varepsilon^2)\right]$$

Заметим, что формула (3.1) с точностью до членов порядка ε совпадает с формулой для $\Delta p_\phi'$, приведенной в [7] и полученной из условия сохранения средней энергии в геометрической акустике для стационарных процессов. Коэффициент расширения лучевой трубки s/s_0 нетрудно получить, используя найденный С. В. Чибисовым [8] закон преломления луча в неоднородной среде.

При линейном изменении скорости звука в отсутствие ветра для волны, распространяющейся от точечного пространственного источника, имеем[1] в первом приближении $\sqrt{s} \sim \xi\sqrt{a}$, так что

$$\Delta p_\phi' = \frac{\Delta p_0}{\xi/\xi_0}\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}, \quad \Delta p_\phi = \frac{\Delta p_\phi'}{\sqrt{1+m\chi(\xi,\xi_0)}} \qquad \chi(\xi,\xi_0) = \frac{a_0}{a}\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\frac{d\xi}{\xi\sqrt{\rho/\rho_0}\,(a/a_0)^2} \tag{3.2}$$

Как известно, [4] для $\xi/\xi_0 > 1.06$ при

$$\Delta p_0 = 0.57\,p, \quad m = 2.75, \qquad \xi_0 = \sqrt[3]{\frac{E_0}{p}} \qquad (E_0\text{—энергия взрыва})$$

результаты, полученные по формуле Л. Д. Ландау [1], в которую при постоянных ρ и a переходит формула (3.2), совпадают с результатами численного расчета точечного взрыва с учетом противодавления [10–12].

Поэтому для приближенного расчета Δp_ϕ в слабо переменной среде с постоянным градиентом скорости звука при $\xi \gg \xi_0$ можно предложить следующую формулу

$$\Delta p_\phi = \frac{0.57 p_0}{\xi/\xi_0}\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}\frac{1}{\sqrt{1+2.75\chi(\xi\xi_0)}}$$

[1] Этот результат также следует из работы О. С. Рыжова [9].

Поступила 10 V 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Л а н д а у Л. Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ, 1945, т. IX, вып. 4.
2. Х р и с т и а н о в и ч С. А. Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва. ПММ, 1956, т. XX, вып. 5.
3. W h i t h a m G. B. The propagation of spherical blast. Proc. Roy. Soc. 1950, ser. A, vol. 203, № 1075.
4. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике, изд. 4, 1957.
5. Г у б к и н К. Е. Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
6. Л а н д а у Л. Д. и Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, 1954.
7. Б л о х и н ц е в Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. ОГИЗ, 1946.
8. Ч и б и с о в С. В. О времени пробега звукового луча в атмосфере. Изв. АН СССР, Серия геогр. и геофиз., 1940, № 1.
9. Р ы ж о в О. С. Об одном точном решении уравнений акустики. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3.
10. О х о ц и м с к и й Д. Е., К о н д р а ш е в а И. Л., В л а с о в а З. И., К а з а к о в а Р. К. Расчет точечного взрыва с учетом противодавления. Тр. Математ. ин-та АН СССР, 1957, т. L.
11. G o l d s t i n e H., N e u m a n n J. Blast Wave Calculation. Comm. Pure and Appl. Math., 1955, vol. VIII.
12. B r o d e H. Numerical Solutions of Spherical Blast Waves, J. Appl. Phys., 1955, vol. 26, № 6.