О ВДУВАНИИ В ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА

А. Б. Ватажин (Москва)

Рассмотрена задача о «вдуве» электропроводной жидкости в пограничный слой, образующийся на плоской пластине, в присутствии магнитного поля, перпендикулярного к поверхности пластины.

1. Пусть плоская полубесконечная пластина обтекается газовым потоком с постоянной температурой T_∞, плотностью ρ_∞ и скоростью u_∞. Через поверхность пластины вводится электропроводная жидкость (газ), образующая на пластине тонкий слой, увлекаемый внешним потоком. Течение происходит в магнитном поле H, перпендикулярном плоскости пластины (фиг. 1). Выберем систему координат, направив ось x° вдоль, а ось y° перпендикулярно поверхности пластины. Пристеночный слой и внешний поток отделяются поверхностью разрыва, на которой изменяются физико-химические свойства веществ. Пристеночный слой и все величины в нем будем обозначать индексом 2, а часть пограничного слоя, относящегося к внешнему потоку, будем обозначать индексом 1.

Перейдем к безразмерным переменным по формулам

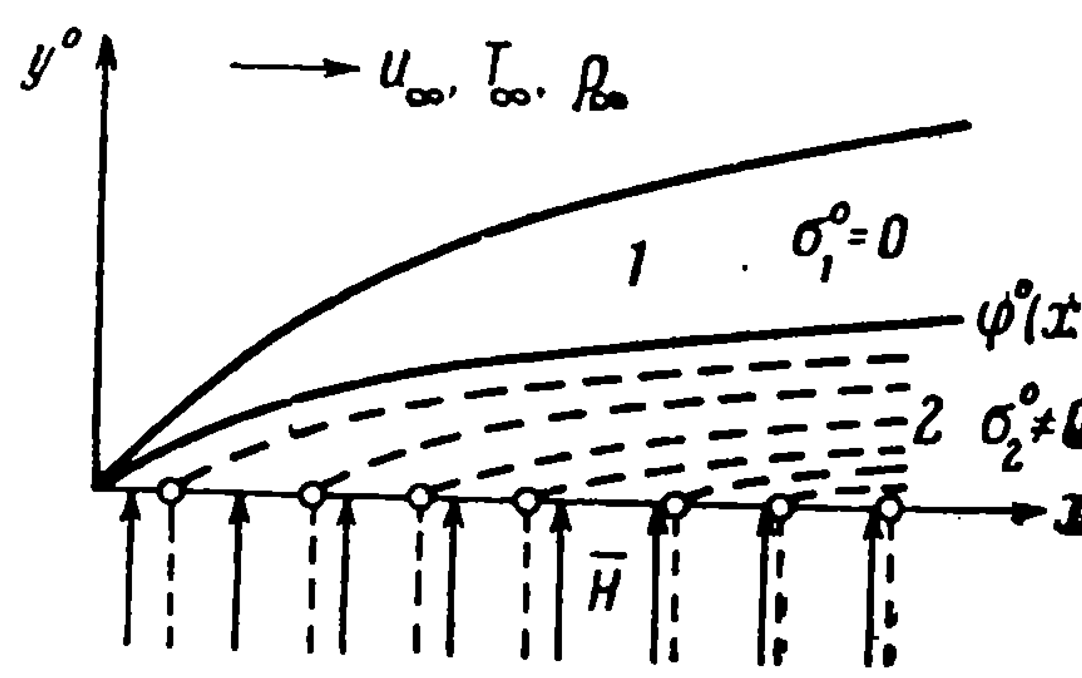
$$x^\circ = lx, \quad u^\circ = u_\infty u, \quad \rho^\circ = \rho_\infty \rho, \quad T^\circ = T_\infty T, \quad H^\circ = H_* H(x)$$

$$y^\circ = \frac{l}{\sqrt{R}}\, y, \quad v^\circ = \frac{u_\infty}{\sqrt{R}}\, v, \quad \eta^\circ = \eta_\infty \eta, \quad \sigma^\circ = \sigma_* \sigma, \quad k^\circ = k_\infty k \tag{1.1}$$

Здесь u и v — скорости в направлениях x и y, η — коэффициент динамической вязкости, k — коэффициент теплопроводности, σ — проводимость среды, l — характерный размер вдоль пластины, H_* — характерная напряженность магнитного поля, H° — нормальная составляющая магнитного поля на стенке, $R = \rho_\infty u_\infty l / \eta_\infty$ — число Рейнольдса. Размерные величины η_∞, k_∞ относятся к набегающему потоку, σ_* — характерная проводимость вдуваемой жидкости, величины с индексом $^\circ$ наверху — размерные.

Предположим, что проводимостью среды в области 1 можно пренебречь по сравнению с проводимостью вдуваемой жидкости, а магнитное число Рейнольдса, определенное по длине пограничного слоя, представляет величину порядка единицы, в то время как величина $1/\sqrt{R}$ мала:

$$R_m = \frac{u_\infty l \sigma_*}{c^2} 4\pi = O(1), \qquad \frac{1}{\sqrt{R}} = o(1)$$



Фиг. 1

Тогда в безразмерных переменных уравнения движения в области 1 можно записать

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \eta \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = m_1^2 \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{P_1} \frac{\partial}{\partial y} \eta \frac{\partial T}{\partial y} \tag{1.2}$$

В области 2 движение описывается системой

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \eta \frac{\partial u}{\partial y} - \gamma \sigma H^2(x) u, \qquad \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = m_2^2 \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{P_2} \frac{\partial}{\partial y} \eta \frac{\partial T}{\partial y} + m_2^2 \gamma \sigma H^2(x) u^2 \tag{1.3}$$

В системах (1.2) и (1.3) введены постоянные параметры

$$\gamma = \frac{\sigma_* H_*^2 l}{c^2 \rho_\infty u_\infty}, \qquad P_i = \frac{c_{p_i} \eta_i^\circ}{k_i^\circ}, \qquad m_i^2 = \frac{u_\infty^2}{c_{p_i} T_\infty} \qquad (i = 1, 2)$$

Уравнения движения дополняются условиями на поверхности пластины, линии разрыва $\varphi(x)$ и границе пограничного слоя. На внешней границе имеем $u_1 = 1$, $T_1 = 1$. На поверхности пластины предположим выполненным условие $u_2 = 0$, известны температурное условие и секундный расход вдуваемой жидкости. Наконец, можно показать, что в случае одинаковых магнитных проницаемостей сред ($\mu_1 = \mu_2 = 1$) соотношения на поверхности разрыва можно привести к форме, использованной в работе [1], в которой решена задача о вдуве без магнитного поля

$$u_1 \operatorname{tg}\beta - v_1 = u_2 \operatorname{tg}\beta - v_2 = 0$$

$$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 = \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y}\right)_2, \quad \left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right)_1 = \left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right)_2, \quad u_1 = u_2, \quad T_1 = T_2, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{d\varphi}{dx} \qquad (1.4)$$

Поставленная задача автомодельна, если магнитное поле и секундный расход вдуваемой жидкости пропорциональны $1 / \sqrt{x}$

$$H^\circ = H_* \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad \rho(x, 0)\, v(x, 0) = \frac{\rho_\infty u_\infty}{\sqrt{R_x}} \frac{C}{2}, \qquad R_x = \frac{\rho_\infty u_\infty x^\circ}{\eta_\infty}$$

Введем переменную Блазиуса $\zeta = 1 / \sqrt{x}$ и функцию $\omega(u) = \eta du / d\zeta$; уравнения (1.2) и (1.3) можно привести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\omega'' + K_1^2 \frac{u}{2\omega} = 0, \qquad T'' + T' \frac{\omega'}{\omega}(1 - P_1) + (Pm^2)_1 = 0 \qquad \text{при } u^* \leqslant u \leqslant 1$$

$$\omega'' + K_2^2 \frac{u}{2\omega} - \gamma \frac{d}{du} \frac{\psi u}{\omega} = 0 \qquad (1.5)$$

$$T'' + T' \left[\frac{\omega'}{\omega}(1 - P_2) + \frac{P_2 \gamma \psi u}{\omega^2}\right] + (Pm^2)_2 \left(1 + \frac{\gamma \psi u^2}{\omega^2}\right) = 0 \qquad \text{при } 0 \leqslant u \leqslant u^*$$

Здесь u^* — скорость на линии разрыва

$$T = T(u), \qquad T' = \frac{dT}{du}; \qquad K_1^2 = K_1^2(T) = \frac{\rho_1^\circ \eta_1^\circ}{\rho_\infty \eta_\infty}$$

$$\omega' = \frac{d\omega}{du}; \qquad \psi = \psi(T) = \frac{\sigma_2^\circ \eta_2^\circ}{\sigma_* \eta_\infty}, \qquad K_2^2 = K_2^2(T) = \frac{\rho_2^\circ \eta_2^\circ}{\rho_\infty \eta_\infty}$$

Функции K_1^2, K_2^2, ψ зависят только от температуры вследствие постоянства давления во всем пограничном слое. Система (1.5) дополняется соотношениями

$$\begin{array}{llll} T_1 = 1, & \omega_1 = 0 & & \text{при } u = 1 \\ \omega_1' = 0, & \omega_2' = \dfrac{\gamma \psi u}{\omega_2}, & \omega_1 = \omega_2 & \\ N T_1' = T_2', & T_1 = T_2 & \left(N = \dfrac{k_1^\circ \eta_2^\circ}{\eta_1^\circ k_2^\circ}\right) & \text{при } u = u^* \\ \omega_2' = {}^1/_2\, C, & T = T_w & & \text{при } u = 0 \end{array} \qquad (1.6)$$

Девяти условий (1.6) достаточно для решения двух систем (1.5), каждая из которых четвертого порядка, и определения скорости на поверхности разрыва.

2. Решение системы (1.5) с граничными условиями (1.6) получено в случае постоянных величин K_1^2, K_2^2, ψ, когда параметр K_2^2 представляет большую величину. Для этого коэффициент динамической вязкости в области 1 должен быть пропорциональным температуре ($K_1^2 = 1$), а движение в области 2 должно происходить с незначительными температурными перепадами (тогда плотность, проводимость и коэффициент динамической вязкости можно считать постоянными). Условие $K_2^2 = K^2 \gg 1$ выполнится, если потребовать, чтобы плотность и коэффициент динамической вязкости в области 2 были больше, чем в области 1. Тогда

$$\gamma\psi = \frac{\sigma_* H_*^2 l \eta_2^\circ}{c^2 \rho_\infty u_\infty \eta_\infty} = K \gamma_*, \qquad \frac{1}{K} = o(1), \qquad \gamma_* = O(1)$$

При сделанных предположениях динамическую задачу (определение поля скоростей) можно решать отдельно от тепловой задачи (определение поля температур).

Из системы (1.5) получаем следующую замкнутую систему уравнений (2.1)

$$\omega'' + \frac{u}{2\omega} = 0 \quad \text{при } u^* \leqslant u \leqslant 1; \qquad \omega'' + \frac{K^2 u}{2\omega} - \gamma_* K \frac{d}{du}\frac{u}{\omega} = 0 \quad \text{при } 0 \leqslant u \leqslant u^*$$

$$\omega_1(1) = 0, \quad \omega_2'(0) = \frac{1}{2}C; \quad \omega_1' = 0, \quad \omega_2' = \gamma_* K \frac{u}{\omega_2}, \quad \omega_1 = \omega_2 \quad \text{при } u = u^*$$

Найдем выражение для коэффициентов трения и полного сопротивления пластины. Для силы, действующей на единицу поверхности пластины, имеем выражение

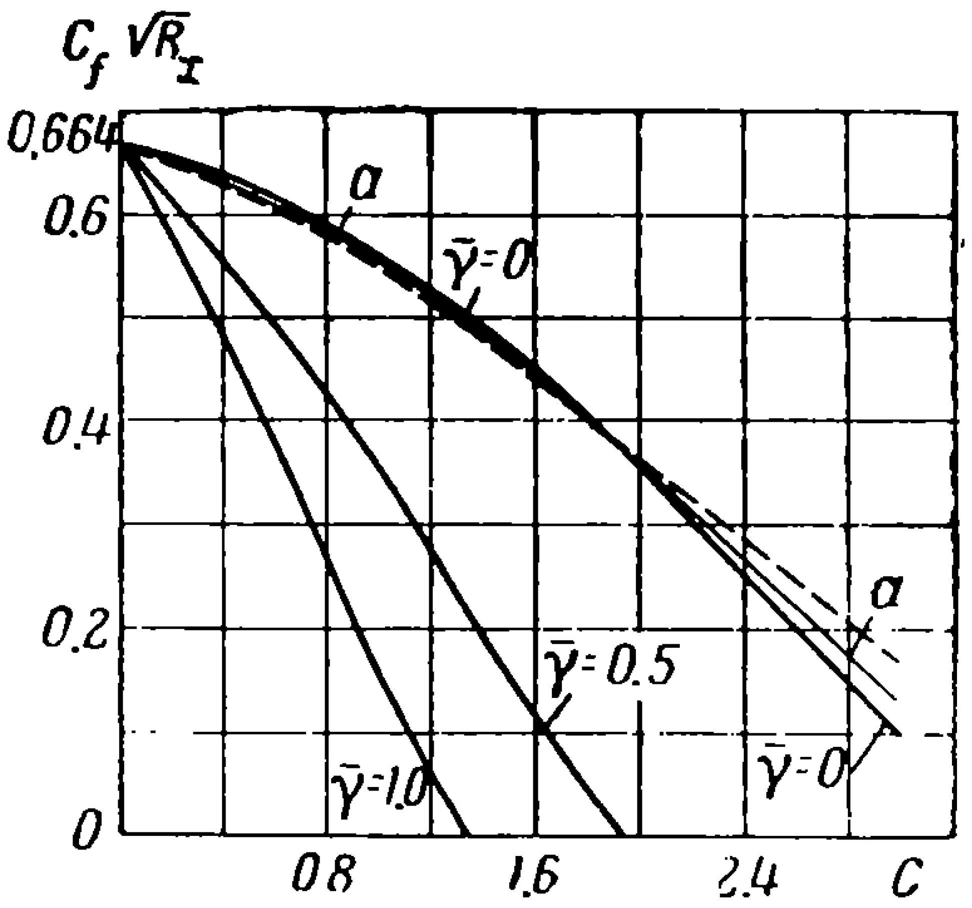
$$F = \left(\eta^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial y^\circ}\right)_w + \int_0^{\varphi^\circ(x^\circ)} \frac{\sigma^\circ H^{\circ 2} u^\circ}{c^2} dy^\circ$$

Вводя коэффициенты трения и полного сопротивления по формулам

$$c_f = \frac{(\eta^\circ \partial u^\circ / \partial y^\circ)_w}{{}^1\!/_2\, \rho_\infty u_\infty^2}, \qquad c_d = \frac{F}{{}^1\!/_2\, \rho_\infty u_\infty^2}$$

получим

$$\frac{c_f \sqrt{R_x}}{2} = \omega_2(0), \qquad \frac{c_d \sqrt{R_x}}{2} = \omega_2(0) + \frac{C\gamma_*}{K}$$



Фиг. 2

Воспользуемся тем, что параметр K представляет большую величину. Решени системы (2.1) можно получить методом разложения величин в ряды по степеням K^{-1} изложенным в работе [2]. Опуская громоздкие выкладки, приведем окончательные результаты. Для коэффициентов трения и полного сопротивления получим (2.2)

$$c_f \sqrt{R_x} = 0.664 - 0.5431 \frac{C^{3/2}}{K} - \frac{2\gamma_* C}{K} + \frac{0.0526\, C^3 - 0.1974\, C}{K^2} + 0.2863\, \gamma_* \frac{C^{5/2}}{K^2} + O(K^{-3})$$

$$c_d \sqrt{R_x} = 0.664 - 0.5431 \frac{C^{3/2}}{K} + \frac{0.0526\, C^3 - 0.1974\, C}{K^2} + 0.2863\, \gamma_* \frac{C^{3/2}}{K^2} + O(K^{-3}) \qquad (2.3)$$

При параметре магнитогазодинамического взаимодействия γ_*, равном нулю, получим решение задачи о вдуве без учета магнитного поля. Эта задача путем численного интегрирования уравнений была решена в работе [1]. При отсутствии магнитного поля и вдува формула (2.2) дает классическое решение уравнений пограничного слоя. На фиг. 2 изображена зависимость $c_f \sqrt{R_x}$ от постоянной вдува C при $K = 5$ и различных значениях $\gamma_* = \bar{\gamma}$, построенная с учетом членов только первого порядка малости относительно K^{-1}. Приведена также кривая «*a*», построенная при $\bar{\gamma} = 0$ с учетом членов второго порядка малости относительно K^{-1}. Пунктиром изображена кривая, полученная в работе [1]. Несмотря на сравнительно небольшую величину K, для значений постоянной C в диапазоне от нуля до двух получено хорошее совпадение с точным решением даже с учетом только первого приближения. Это свидетельствует об эффективности предложенного метода разложения по введенному малому параметру. Как видно из фиг. 2, присутствие магнитного поля приводит к уменьшению поверхностного трения. Полное сопротивление, как следует из формулы (2.3), если учитывать члены только порядка K^{-1}, совпадает с сопротивлением трения при отсутствии магнитного поля. Увеличение сопротивления за счет пересечения потоком магнитных силовых линий компенсируется уменьшением поверхностного трения. Учет же членов порядка K^{-2} показывает, что полное сопротивление пластины при вдуве в присутствии магнитного поля возрастает. Однако оно не превосходит сопротивления, испытываемого пластиной без вдува и без учета магнитного поля.

Поступила 23 V 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Ламинарные течения в пограничном слое с поверхностью разрыва. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 12.
2. Ватажин А. Б. Оплавление пластины, обтекаемой сверхзвуковым или высокотемпературным газовым потоком. Изв. АН СССР, ОТН, 1959, № 6.