

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ МАГНИТНО-ВИХРЕВЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Ю. П. Л а д и к о в

(Москва)

Выводятся уравнения движения системы соосных магнитно-вихревых колец и исследуются отдельные частные случаи такого рода движений. Под магнитно-вихревыми кольцами понимаются плазменные круговые вихревые нити, по которым текут токи. Вне колец жидкость считается идеальной: несжимаемой и непроводящей. Условия существования и устойчивости изолированного магнитно-вихревого кольца были рассмотрены в статье [1]. Плоским аналогом системы соосных колец являются пары прямолинейных магнитно-вихревых нитей с взаимно противоположными циркуляциями и токами, расположенные симметрично относительно некоторой оси. Предполагается, что движение магнитно-вихревого кольца качественно не отличается от движения соответствующей пары прямолинейных магнитно-вихревых нитей; движение такой пары исследуется в направлении проводящей и непроводящей стенки. Показывается, что в первом случае кольцо будет приближаться к стенке расширяясь. Во втором случае, при некоторых значениях начальных параметров, кольцо, приближаясь к стенке, сжимается. Если при этом в стенке имеется щель, то кольцо может проскочить в нее. Подобные явления, по свидетельству очевидцев, наблюдаются при приближении шаровой молнии к препятствию [2].

§ 1. Основные уравнения. Известно [3], что движение тел с многосвязными объемами в несжимаемой жидкости может быть описано системой уравнений

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \dot{q}_j + \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$T = \sum_{i,j} A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad K = \sum_{i,j} B_{ij} \Gamma_i \Gamma_j, \quad \gamma_{rs} = \frac{\partial \beta_s}{\partial q_r} - \frac{\partial \beta_r}{\partial q_s} \quad (1.1)$$

Здесь q_i — обобщенные координаты, \dot{q}_i — обобщенные скорости, T — та часть кинетической энергии, которой обладали бы движущиеся тела и жидкость при отсутствии циклического движения, K — квадратичная форма циркуляций Γ_i , представляет собой кинетическую энергию циклического движения, Q_i — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_i ; величины β_r являются линейными формами циркуляций $\beta_r = \alpha_{r1} \Gamma_1 + \dots + \alpha_{rk} \Gamma_k$, коэффициенты которой определяются из уравнений

$$r \dot{\chi}_j = \frac{\partial K}{\partial \Gamma_j} + \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \dot{q}_i \quad (j = 1, \dots, k) \quad (k — порядок связности) \quad (1.2)$$

Если рассматриваемую область течения жидкости превратить в односвязную с помощью k перегородок, то $r \dot{\chi}_j$ определяет поток массы в

единицу времени через перегородку j и, следовательно, α_{ij} есть та часть потока массы через перегородку j , которая приходится на единицу скорости изменения координаты q_i . Выписанные уравнения (1.1) применяются редко, так как квадратичные формы T и K , вообще говоря, неизвестны и могут быть определены только из решения соответствующей гидродинамической задачи, которая в большинстве случаев является весьма сложной. Однако, если рассматриваемые тела очень тонкие, например, вихревые нити, — эти уравнения могут быть применены.

Переходим к конкретным задачам. Пусть в несжимаемой идеальной, непроводящей жидкости находятся тонкие плазменные, вихревые кольца или прямолинейные нити, по которым текут токи I_j , совпадающие по направлению с вихрями или противоположные им. Вне вихревых нитей жидкость имеет безвихревое циклическое движение, скорость которого определяется из закона Био и Савара. Текущие по нитям токи вызывают в окружающем пространстве магнитное поле, напряженность которого также определяется по закону Био и Савара. Считается, что поле с окружающей средой не взаимодействует. В виду этого обстоятельства циркуляция Γ по любому замкнутому контуру должна сохранять свое постоянное значение и, следовательно, вихревые нити не могут покинуть ту область плазмы, с которой они были связаны в начальный момент движения, т. е. вихревые нити будут заморожены в соответствующие плазменные нити. Так как кольца предполагаются очень тонкими, а квадратичная форма T пропорциональна объемам τ колец, мы можем величиной T в уравнениях (1.1) и ее производными пренебречь.

Обобщенные силы Q_i в рассматриваемом случае определяются [4] как производные от магнитной энергии M токов по соответствующим координатам $Q_i = \partial M / \partial q_i$. Уравнения (1.1) примут следующий вид:

$$\sum \gamma_{ij} \dot{q}_j + \frac{\partial K}{\partial q_i} = \frac{\partial M}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Кроме того, считая плазменные кольца и нити идеальными проводниками, к системе (1.3) следует присоединить условие постоянства потока магнитной индукции через площадь, ограниченную контуром проводника

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial I_j} = 0 \quad (1.4)$$

Таким образом, плазменные вихревые кольца и нити должны подчиняться системе уравнений (1.3) и (1.4).

Рассмотрим сначала движение одного плазменного кольца. Положение кольца определяем его радиусом $r = q_1$, радиусом поперечного сечения μ , координатами точки $(\xi = q_2, \eta = q_4)$ пересечения плоскости кольца с осью симметрии и углом $\theta = q_3$, который составляет ось симметрии с выбранным направлением (фиг. 1). Кинетическая энергия движения жидкости, вызванного единичным вихревым кольцом, и магнитная энергия кругового тока соответственно равны

$$K = \frac{\rho \Gamma^2 r}{2} \left(\ln \frac{8r}{\mu} - \frac{7}{4} \right), \quad M = \frac{2\pi r}{c^2} I^2 \left(\ln \frac{8r}{\mu} - \frac{7}{4} \right)$$

Здесь ρ — плотность, c — скорость света в пустоте. Следует заметить, что r и μ связаны между собой условием несжимаемости $2\pi^2 r \mu^2 = \tau = \text{const}$.

Легко видеть, что из величин α_{rj} , равных потокам массы через отверстие кольца, отличны от нуля только

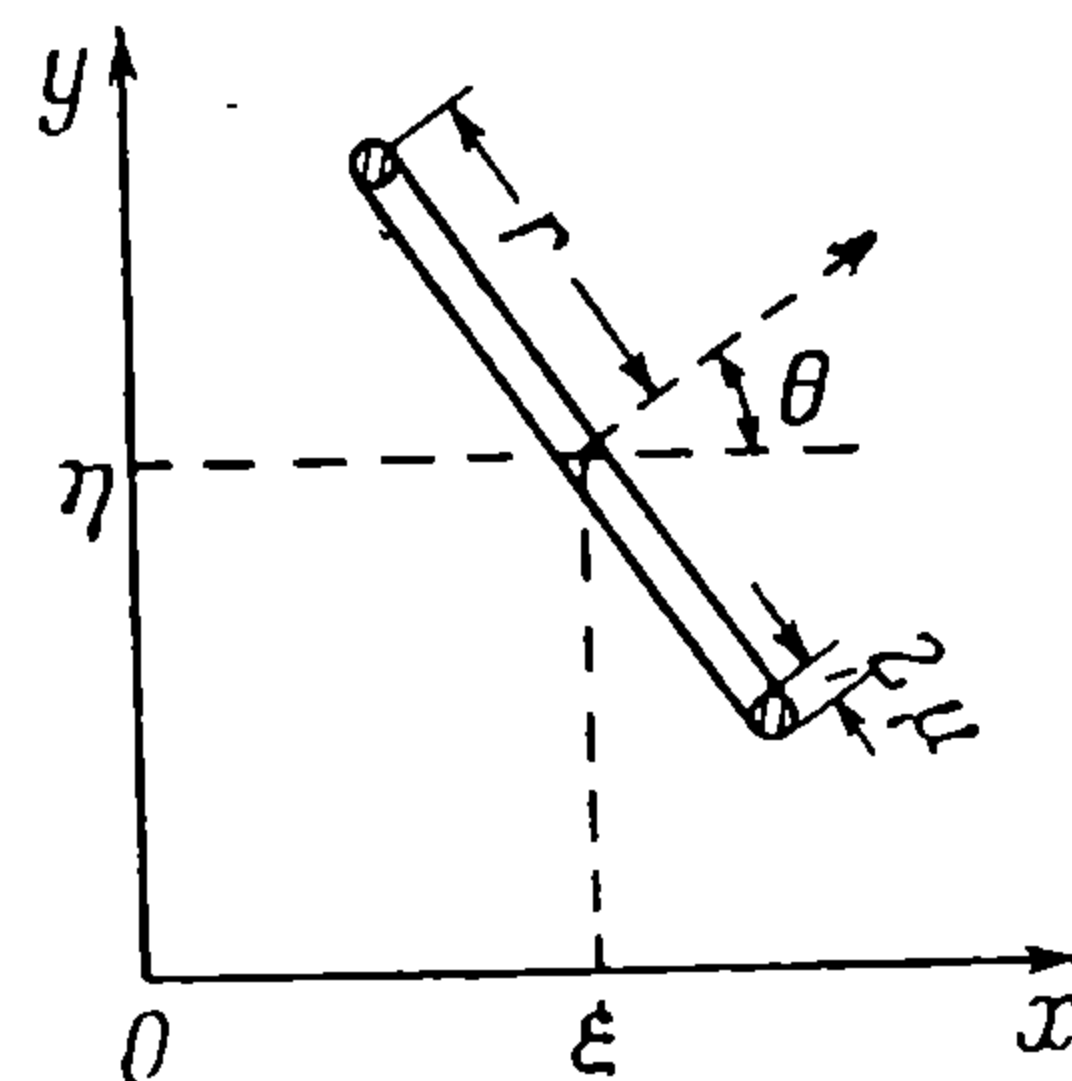
$$\alpha_{21} = -\pi r^2 \cos \theta, \quad \alpha_{41} = -\pi r^2 \sin \theta$$

Соответственно

$$\beta_2 = -\Gamma \pi r^2 \rho \cos \theta, \quad \beta_4 = -\Gamma \pi r^2 \rho \sin \theta$$

Остальные величины $\beta_i = 0$. Уравнения движения кольца будут иметь следующий вид

$$\begin{aligned} +\pi r^2 \rho \cos \theta \dot{\theta} \Gamma + 2\pi r \rho \sin \theta \Gamma \dot{r} &= 0 \\ 2\pi r \rho \cos \theta \Gamma \dot{r} - \pi r^2 \rho \sin \theta \Gamma \dot{\theta} &= 0 \\ -2\pi r \rho \cos \theta \Gamma \dot{\xi} - 2\pi r \rho \sin \theta \Gamma \dot{\eta} &= -\frac{\partial K}{\partial r} + \frac{\partial M}{\partial r} \quad (1.5) \\ \pi r^2 \rho \sin \theta \Gamma \dot{\xi} - \pi r^2 \rho \cos \theta \Gamma \dot{\eta} &= 0 \\ \frac{4\pi r}{c^2} I \left(\ln \frac{8r}{\mu} - \frac{7}{4} \right) &= \Phi = \text{const} \end{aligned}$$



Фиг. 1

Очевидно, что первые два уравнения могут быть удовлетворены только при $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$. Тогда из остальных уравнений следует, что изолированное кольцо может двигаться только поступательно в направлении оси симметрии с постоянной скоростью

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi r} \left(\ln \frac{8r}{\mu} - \frac{1}{4} \right) (1 - \zeta)^2, \quad \zeta = \sqrt{\frac{4\pi}{\rho} \frac{I}{c\Gamma}}$$

Полученная формула совпадает с формулой для скорости поступательного движения магнитно-вихревого кольца, найденной из решения точных уравнений магнитной гидродинамики в предположении, что кольцо имеет малые, но конечные размеры [1]. На первый взгляд кажется парадоксальным, что кольцо не может иметь никакого другого движения, кроме движения в направлении своей оси симметрии. Действительно, допустим, что мы кольцу придали какое-то иное начальное движение, например, вращение. Тогда кольцо должно было бы, хотя бы некоторое время, вращаться по инерции. Однако, пренебрегая при выводе уравнений массой (мерой инерции), нельзя считать, что кольцо может обладать инерцией и, следовательно, нельзя задавать начальной скорости. Уравнения (1.3) — (1.4) определяют непосредственно скорости, а не ускорения.

Рассмотрим теперь движение двух тонких магнитно-вихревых колец с общей осью симметрии z . В качестве обобщенных координат мы можем принять $q_1 = r_1$ — радиус первого кольца, $q_2 = z_1$ — расстояние центра первого кольца от начала координат, $q_3 = r_2$ — радиус второго кольца; $q_4 = z_2$ — расстояние центра второго кольца от начала координат. Ки-

нетическая энергия циклического движения K и магнитная энергия M соответственно равны

$$K = \frac{\rho\Gamma_1^2 r_1}{4} \left(\ln \frac{128\pi^2}{\tau_1} r_1^3 - \frac{7}{2} \right) + \frac{\rho\Gamma_2^2 r_2}{4} \left(\ln \frac{128\pi^2}{\tau_2} r_2^3 - \frac{7}{2} \right) + 2\rho\Gamma_1\Gamma_2 \sqrt{r_1 r_2} f(k)$$

$$M = \frac{I_1^2 2\pi r_1}{c^2} \left(\ln \frac{128\pi^2}{\tau_1} - \frac{7}{2} \right) - \frac{I_2^2 2\pi r_2}{c^2} \left(\ln \frac{128\pi^2}{\tau_2} - \frac{7}{2} \right) + \frac{I_1 I_2}{c^2} 4\pi \sqrt{r_1 r_2} f(k)$$

Здесь τ_1, τ_2 — объемы колец

$$k^2 = \frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}, \quad k'^2 = 1 - k^2, \quad f(k) = \frac{1 + k'^2}{2k} F - \frac{1}{k} E$$

где F и E — полные эллиптические интегралы. Из уравнений (1.2), подобно тому как это сделано в предыдущем случае, можно найти $\alpha_{12} = -\pi r_1^2 \rho$, $\alpha_{24} = -\pi r_2^2 \rho$. Все остальные величины $\alpha_{ij} = 0$. Вычисляя затем значения β_i и γ_{ij} и подставляя в (1.3) и (1.4), получим

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{\Gamma_2}{\pi} (1 - \zeta_1 \zeta_2) \frac{k_3 (z_1 - z_2)}{4r_1} \frac{\partial f}{\partial k}$$

$$\frac{dr_2}{dt} = -\frac{\Gamma_1}{\pi} (1 - \zeta_1 \zeta_2) \frac{k_3 (z_1 - z_2)}{4r_2} \frac{\partial f}{\partial k}$$

$$\frac{dz_1}{dt} = (1 - \zeta_1^2) \frac{3}{8\pi} \frac{\Gamma_1}{r_1} \ln \lambda_1 r_1 + \frac{\Gamma_2}{\pi} (1 - \zeta_1 \zeta_2) \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2r_1} f(k) + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial r_1} \right] \quad (1.6)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = (1 - \zeta_2^2) \frac{3}{8\pi} \frac{\Gamma_2}{r_2} \ln \lambda_2 r_2 + \frac{\Gamma_1}{\pi} (1 - \zeta_1 \zeta_2) \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2r_2} f(k) + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial r_2} \right]$$

$$2I_1 r_1 \left(\ln \frac{128\pi^2}{\tau_1} r_1^3 - \frac{7}{2} \right) + I_2 \sqrt{r_1 r_2} f(k) = \Phi_1 = \text{const}$$

$$2I_2 r_2 \left(\ln \frac{128\pi^2}{\tau_2} r_2^3 - \frac{7}{2} \right) + I_1 \sqrt{r_1 r_2} f(k) = \Phi_2 = \text{const}$$

Здесь

$$\zeta_1 = \sqrt{\frac{4\pi}{\rho} \frac{I_1}{c\Gamma_1}}, \quad \zeta_2 = \sqrt{\frac{4\pi}{\rho} \frac{I_2}{c\Gamma_2}}, \quad \lambda_1 = \left(\frac{128\pi^2}{\tau_1 \sqrt{e}} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \lambda_2 = \left(\frac{128\pi^2}{\tau_2 \sqrt{e}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

При $M = 0$ система уравнений (1.6) совпадает с системой уравнений, определяющих движение двух соосных вихревых колец, которую можно получить из чисто кинематических соображений [5]. Легко видеть, что система (1.6) имеет интеграл сохранения импульса $\Gamma_1 r_1^2 + \Gamma_2 r_2^2 = \text{const}$ и интеграл сохранения энергии $K + M = \text{const}$.

Первый интеграл легко получить из первых двух уравнений. Он имеет следующее физическое обоснование. Из общих теорем гидродинамики следует, что всякое безвихревое движение в односвязной области может быть вызвано импульсивными давлениями, приложенными к границе области. Если загородить кольца перегородками, то область рассматриваемого течения станет односвязной и движение в ней может быть вызвано с помощью импульсивных давлений $\pi r_1^2 \Gamma_1$ и $\pi r_2^2 \Gamma_2$, приложенных к перегородкам. Вследствие отсутствия внешних сил сумма этих

давлений должна сохранять постоянное значение. Второй интеграл можно получить, вычислив полную производную

$$\frac{d}{dt} (K - M) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial q_i} (K - M) \frac{dq_i}{dt} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial (K - M)}{\partial I_j} \frac{dI_j}{dt} \quad (1.7)$$

Первая сумма обращается в нуль вследствие первых четырех уравнений (1.6), а вторая может быть преобразована следующим образом:

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial (K - M)}{\partial I_j} \frac{dI_j}{dt} = - \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^2 I_j \frac{\partial M}{\partial I_j} + \sum_{j=1}^2 I_j \frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial I_j} = - 2 \frac{dM}{dt}$$

Подставляя в (1.7), получим $K + M = \text{const}$. Система уравнений (1.6) очень сложна, поэтому целесообразно рассматривать, вместо движения соосных магнитно-вихревых колец, движение магнитно-вихревых пар с общей осью. Магнитно-вихревой парой будем называть совокупность двух вихревых прямолинейных плазменных нитей, по которым текут равные токи в противоположных направлениях и которые имеют равные и противоположные циркуляции. Если кольца очень тонки, то можно считать, что движение магнитно-вихревых колец качественно не будет отличаться от движения соответствующих им магнитно-вихревых пар, как это и имеет место в чисто гидродинамическом случае. Кинетическая энергия системы двух магнитно-вихревых пар с общей осью u имеет следующее значение:

$$K = \frac{\rho \Gamma_1^2}{8\pi} \left(1 + 4 \ln \frac{2x_1}{\mu_1}\right) + \frac{\rho \Gamma_2^2}{8\pi} \left(1 + 4 \ln \frac{2x_2}{\mu_2}\right) + \frac{\rho \Gamma_1 \Gamma_2}{2\pi} F(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

Магнитная энергия

$$M = \frac{I_1^2}{2c^2} \left(1 + 4 \ln \frac{2x_1}{\mu_1}\right) + \frac{I_2^2}{2c^2} \left(1 + 4 \ln \frac{2x_2}{\mu_2}\right) + \frac{2I_1 I_2}{c^2} F(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = - \ln \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Здесь $2x_1, 2x_2$ — расстояния между вихрями пар, y_1, y_2 — ординаты пар. Вычисляя, подобно предыдущему, выражения для $\alpha_{ij}, \beta_i, \gamma_{ij}$ и подставляя их в (1.3) и (1.4), получим

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= - (1 - \zeta_1 \zeta_2) \frac{\Gamma_2}{4\pi} \frac{\partial F}{\partial y_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= - (1 - \zeta_1 \zeta_2) \frac{\Gamma_1}{4\pi} \frac{\partial F}{\partial y_2} \\ \frac{dy_1}{dt} &= (1 - \zeta_1^2) \frac{\Gamma_1}{4\pi x_1} + \frac{\Gamma_2}{4\pi} (1 - \zeta_1 \zeta_2) \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{dy_2}{dt} &= (1 - \zeta_2^2) \frac{\Gamma_2}{4\pi x_2} + \frac{\Gamma_1}{4\pi} (1 - \zeta_1 \zeta_2) \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$2\Gamma_1 \zeta_1 \ln \lambda_1 x_1 + \Gamma_2 \zeta_2 F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \Phi_1 = \text{const}$$

$$2\Gamma_2 \zeta_2 \ln \lambda_2 x_2 + \Gamma_1 \zeta_1 F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \Phi_2 = \text{const}$$

Здесь μ_1, μ_2 — радиусы сечений нитей

$$\zeta_j = \sqrt{\frac{4\pi}{\rho} \frac{I_j}{c\Gamma_j}} \quad (j = 1, 2), \quad \lambda_j = \frac{\sqrt[4]{e}}{2\mu_j} \quad (j = 1, 2)$$

Эти уравнения, как и предыдущие, имеют интегралы сохранения импульсов и энергии

$$\begin{aligned} \Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2 &= 2c = \text{const} \\ (1 + \zeta_1^2) \frac{\Gamma_1^2}{2\pi} \ln \lambda_1 x_1 + (1 + \zeta_2^2) \frac{\Gamma_2^2}{2\pi} \ln \lambda_2 x_2 - \\ - (1 + \zeta_1, \zeta_2) \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{2\pi} \ln \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} &= \text{const} \end{aligned} \quad (1.9)$$

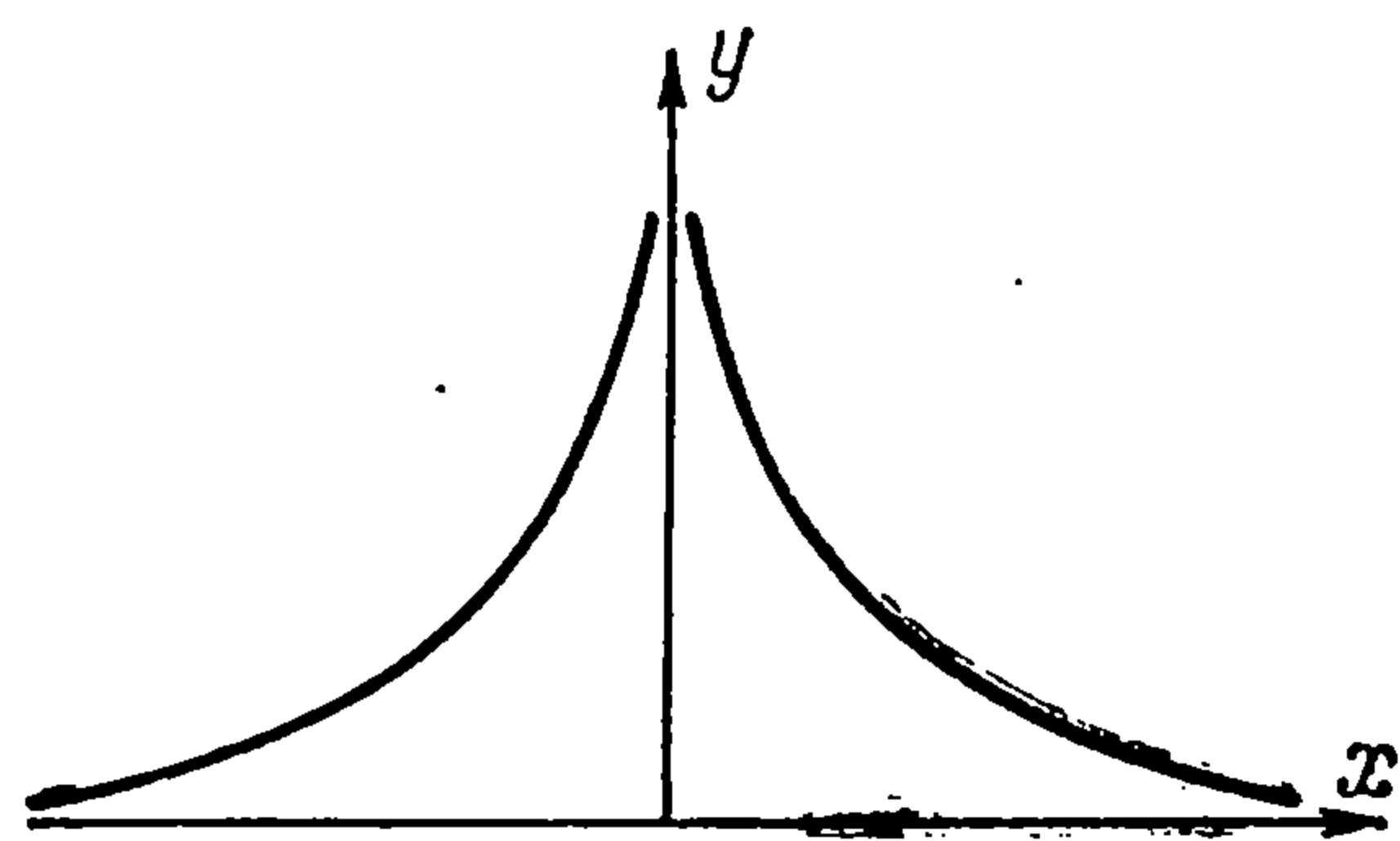
Как видно из уравнений, одна магнитно-вихревая пара движется в направлении своей оси y со скоростью

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi x} (1 - \zeta^2) \quad \left(\zeta = \frac{\Phi}{2\Gamma \ln \lambda x} = \text{const} \right)$$

§ 2. Движение магнитно-вихревой пары при наличии проводящей стенки. Рассмотрим движение магнитно-вихревой пары в направлении абсолютно проводящей стенки. Задача о такого рода движении эквивалентна задаче о движении двух магнитно-вихревых пар с равными значениями абсцисс $x_1 = x_2 = x$ и равными, но противоположными значениями ординат, циркуляций и токов

$$\begin{aligned} y_1 = -y_2 = y, \quad \Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma_1 \\ I_1 = -I_2 = I, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta \end{aligned}$$

Действительно, скорость жидкости и напряженность магнитного поля в этом случае будут иметь в плоскости $y = 0$ только составляющие в направлении



Фиг. 2

оси x и, следовательно, в точках плоскости $y = 0$ будут удовлетворяться граничные условия, соответствующие абсолютно проводящей стенке. Уравнения (1.8) в рассматриваемом случае примут вид

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\Gamma}{4\pi} (1 - \zeta^2) \frac{x^2}{(x^2 + y^2) y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi} (1 - \zeta^2) \frac{y^2}{(x^2 + y^2) x} \quad (2.1)$$

$$\zeta = \frac{\Phi}{\Gamma} \left(\ln \frac{\lambda^2 x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right)^{-1} \quad (2.2)$$

Легко получить интеграл

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = m^2 = \text{const}$$

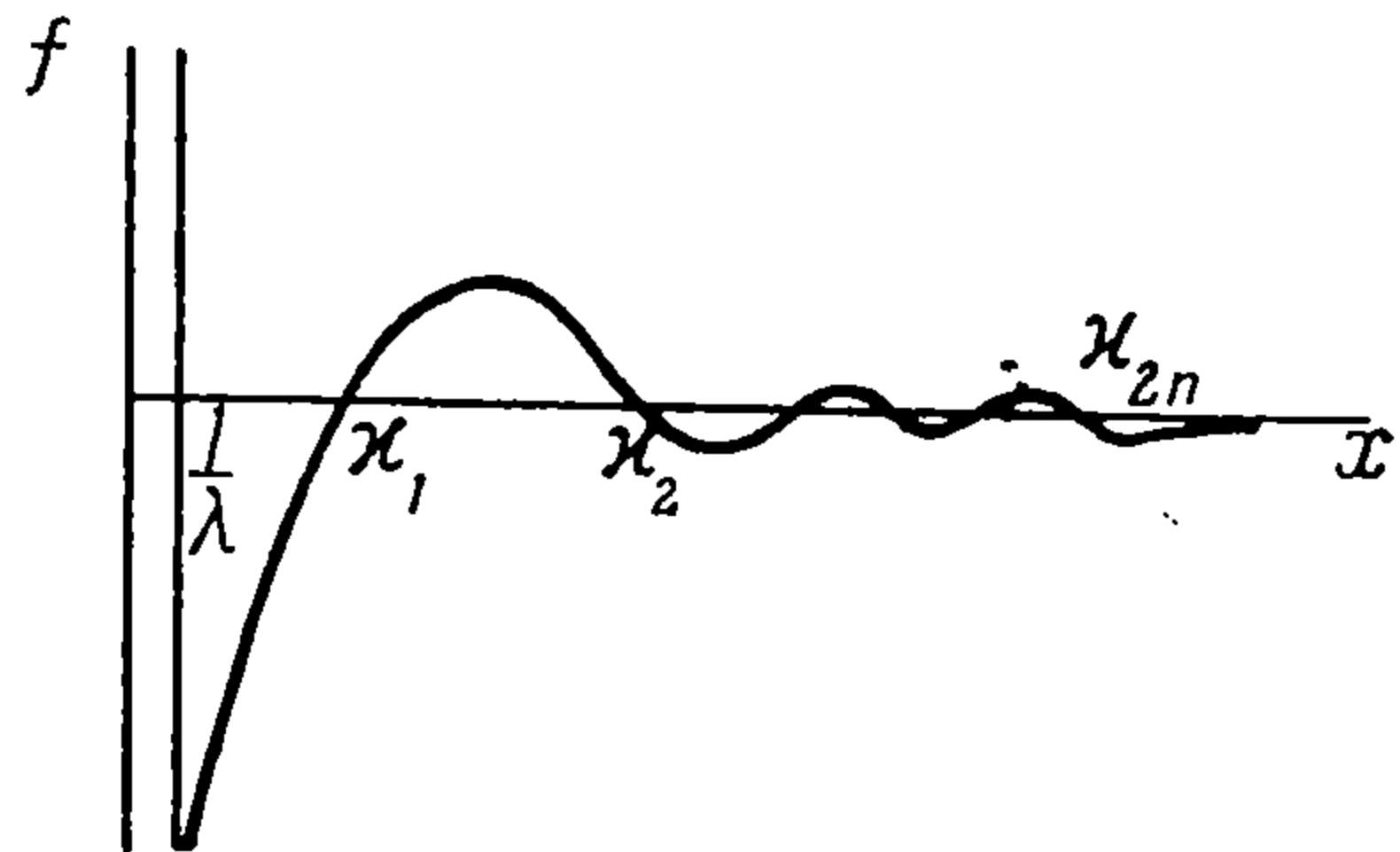
Поэтому $\zeta = \text{const}$. Таким образом, имеем

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\Gamma}{4\pi} (1 - \zeta^2) \frac{1}{m^2 y^3}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi} (1 - \zeta^2) \frac{1}{m^2 x^3} \quad (2.3)$$

Из уравнения (2.3) видно, что при $\Gamma > 0$, $\zeta < 1$ или при $\Gamma < 0$, $\zeta > 1$ магнитно-вихревая пара удаляется от стенки суживаясь, при $\Gamma < 0$, $\zeta < 1$ или при $\Gamma > 0$, $\zeta > 1$ пара приближается к стенке расширяясь, при $\Gamma = 0$ или $\zeta = 1$ пара неподвижна.

На фиг. 2 показана траектория движения магнитно-вихревой пары в направлении проводящей стенки. Предполагая, что кольца ведут себя подобным же образом, можно утверждать, что магнитно-вихревое кольцо взаимодействует с абсолютно-проводящей стенкой точно так же, как обычное вихревое кольцо взаимодействует с твердой стенкой [5].

3. Движение магнитно-вихревого кольца в направлении непроводящей стенки. Уравнения такого движения можно получить, если рассматривать движение двух колец, имеющих равные радиусы, равные, но противоположные циркуляции, причем одно из этих колец обладает магнитной энергией, другое же является чисто вихревым и сила тока в нем равна нулю. Будем предполагать, что кольца расположены симметрично относительно некоторой плоскости. Тогда нормальная составляющая скорости в точках этой плоскости равна нулю, а нормальная составляющая магнитной напряженности отлична от нуля. Подобные условия будем иметь на неподвижной твердой непроводящей стенке. Как и прежде, движение магнитно-вихревого кольца будет имитировать движение соответствующей магнитно-вихревой пары. Система уравнений для движения такой пары при условии, что плоскость $y=0$ является непроводящей стенкой, имеет вид



Фиг. 3

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{x^2}{y(x^2+y^2)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi x} \left[\frac{y^2}{x^2+y^2} - \zeta^2 \right], \quad 2\zeta \ln \lambda x = \Phi \quad (3.1)$$

Уравнения имеют интеграл

$$\ln \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}} = \frac{\Phi^2}{\ln \lambda x} + c \quad (3.2)$$

Обозначим

$$U = \frac{x^2+y^2}{x^2y^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$$

Тогда

$$\frac{1}{2} \ln u = \frac{\Phi^2}{\ln \lambda x} + c, \quad u = u_1 \exp \left[2\zeta_0^2 \left(\frac{\ln \lambda a}{\ln \lambda x} - 1 \right) \right]$$

Пусть вдоль интегральной кривой (3.2)

$$\frac{y^2}{x^2+y^2} - \frac{\Phi^2}{4 \ln^2 \lambda x} = f(x) = \frac{1}{x^2 u} - \frac{\zeta_0^2 \ln^2 \lambda a}{\ln^2 \lambda x} \quad (3.3)$$

При этом

$$\frac{df}{dx} = \frac{2}{x^3 u} \left(\frac{4\zeta_0^2 \ln^2 \lambda a}{\ln^2 \lambda x} - 1 \right) + \frac{2\zeta_0^2 \ln^2 \lambda a}{x \ln^3 \lambda x} \quad (3.4)$$

Будем предполагать, что в начальный момент $x = a$, $y = b$, $\zeta = \zeta_0$, $u = u_1$. Тогда из последнего уравнения (3.1) имеем

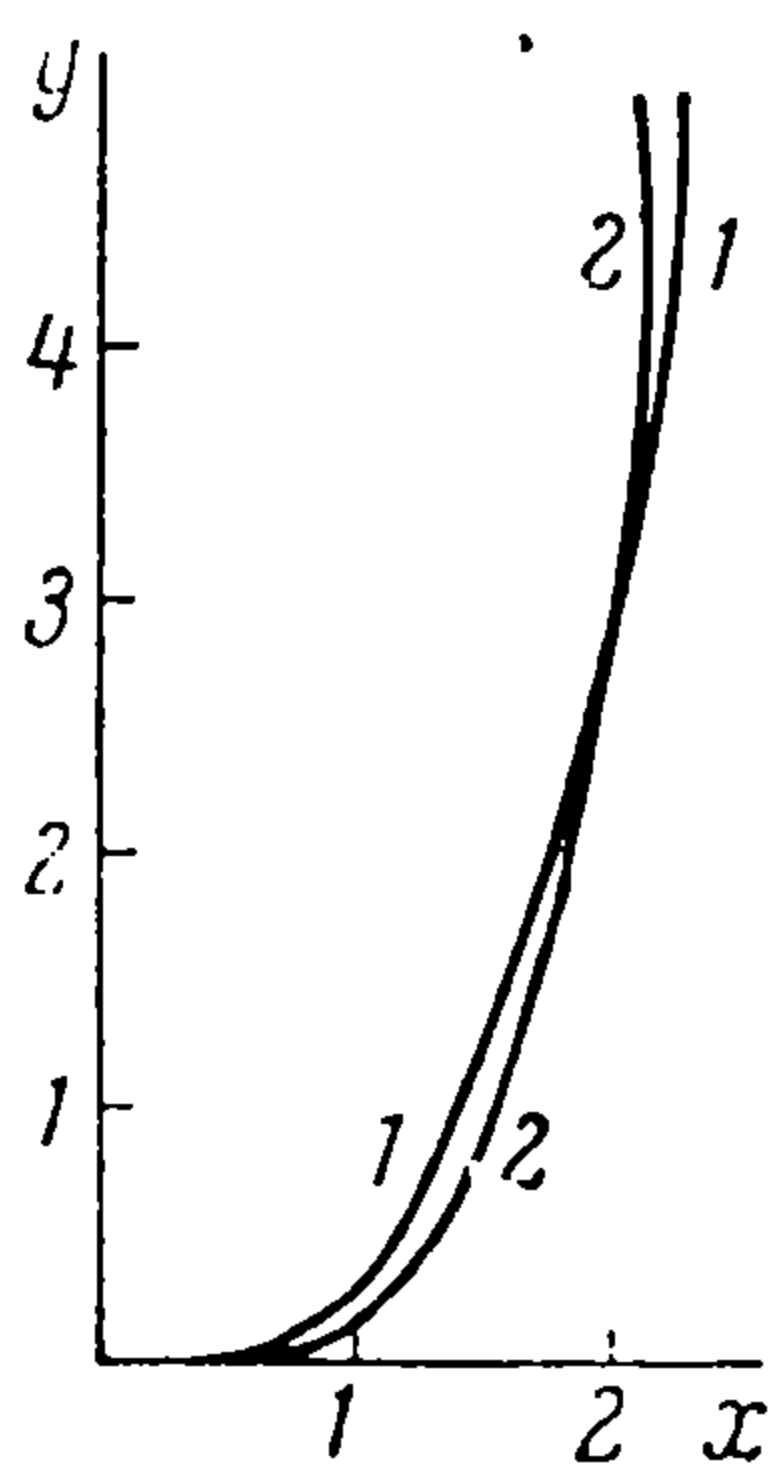
$$\Phi = 2\zeta_0 \ln \lambda a.$$

Поведение функции $f(x)$ показано на фиг. 3. Значения корней x_1, \dots, x_n функции $f(x)$ в рассматриваемом интервале $1/\lambda < x < \infty$ и их число определяются начальными условиями. Однако число корней всегда четное, так как функция $f(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow \infty$ и $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, оставаясь отрицательной.

В зависимости от расположения начального значения $x = a$ могут представиться следующие случаи.

Первый случай. $a < x_1$. При $\Gamma > 0$ радиус кольца уменьшается и кольцо приближается к стенке с возрастающей скоростью. При $\Gamma < 0$ радиус кольца увеличивается и кольцо удаляется от стенки. В зависимости от соотношения между начальными значениями магнитной и кинетической энергий ζ_0 может случиться следующее.

а) При большом значении ζ_0 корень x_1 велик и кольцо может уйти так далеко, что влияние стенки сказываться уже не будет; производная $dx/dt \rightarrow 0$ при возрастании y и $x \rightarrow x_0 < x_1$. На фиг. 4 показаны интегральные кривые, соответствующие начальным значениям $\lambda = 5$, $a = 2$,



Фиг. 4

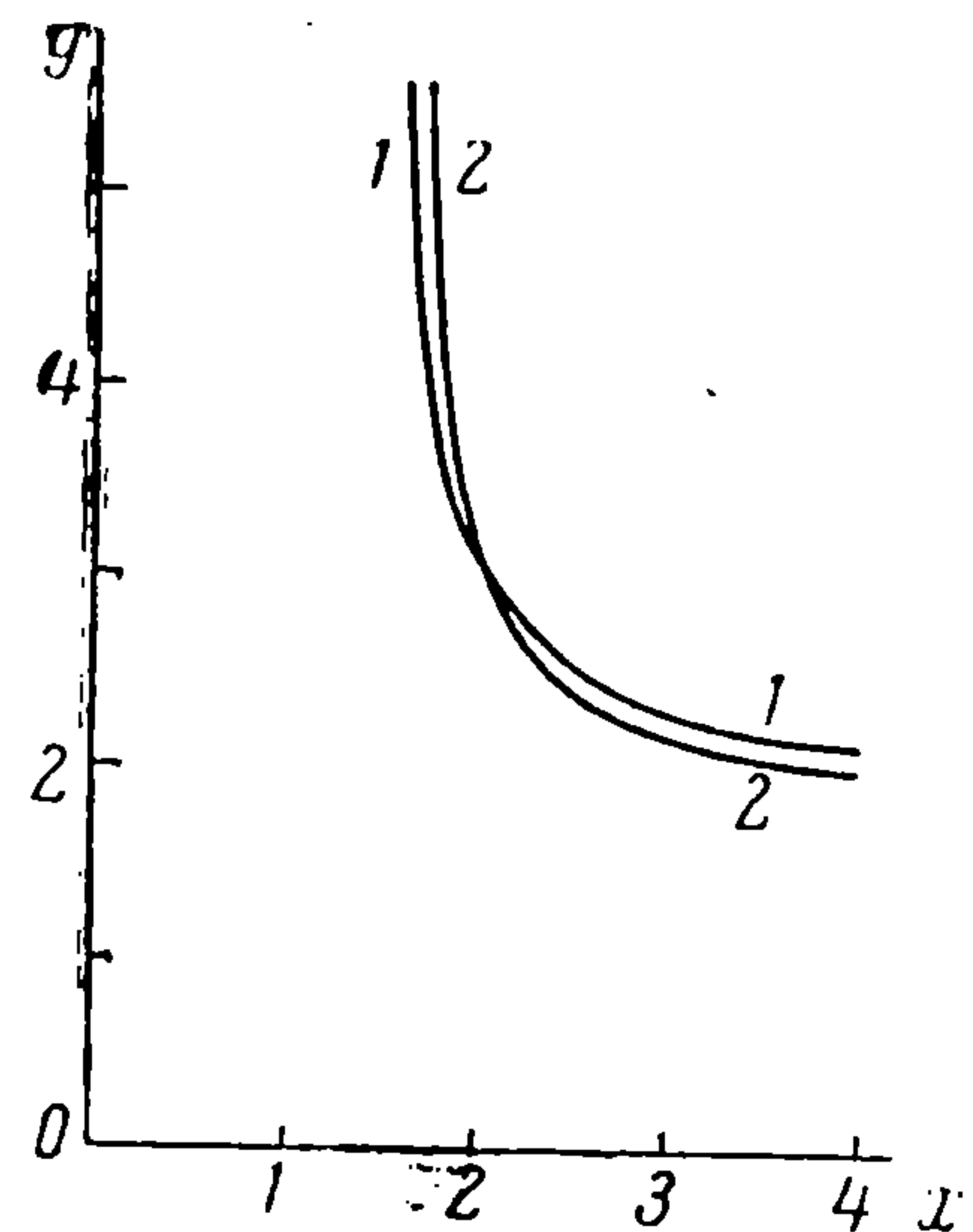
$b = 3$, $\zeta_0 = \sqrt{2}$ (кривая 1), а также $\zeta_0 = \sqrt{3}$ (кривая 2). При положительном значении циркуляции Γ кольцо очень быстро приближается к стенке, а при отрицательных значениях — удаляется от нее. Если в стенке имеется щель, то кольцо проскочет в нее и удалится в бесконечность.

б) Если значения ζ_0 невелики (порядка 1), то кольцо будет удаляться от стенки, расширяясь до тех пор, пока не достигнет значения $x = x_1$, затем скорость dy/dt изменит знак и кольцо начнет приближаться к стенке, продолжая расширяться. После того как значение x станет равным x_2 , кольцо опять начнет удаляться. Такие колебательные движения будут продолжаться до тех пор, пока кольцо не расширится настолько, что скорость dy/dt обратится в нуль. В конечном счете кольцо расплывается на некотором расстоянии от стенки.

Второй случай. $x_1 < a < x_2$. При $\Gamma > 0$ диаметр кольца уменьшается, но кольцо движется в направлении от стенки.

а) Если при этом величина ζ_0 мала, то кольцо уходит от стенки.

б) Если ζ_0 не очень мало, то с уменьшением радиуса отношение магнитной к кинетической энергии $\zeta^2 = M/K$ растет, и кольцо, после того как x достигнет значения x_1 , вернется к стенке. На фиг. 5 показаны интегральные кривые в том случае, когда ζ_0 мало ($\zeta_0 = 1/2, 1/\sqrt{3}$). При положительной циркуляции (убывании x) кольцо сразу удаляется от стенки подобно чисто вихревому кольцу. На фиг. 6 показана интегральная кривая, соответствующая малой разнице между начальными значениями магнитной и кинетической энергий. Кольцо сначала удаляется от стенки, а затем подходит к ней.



Фиг. 5

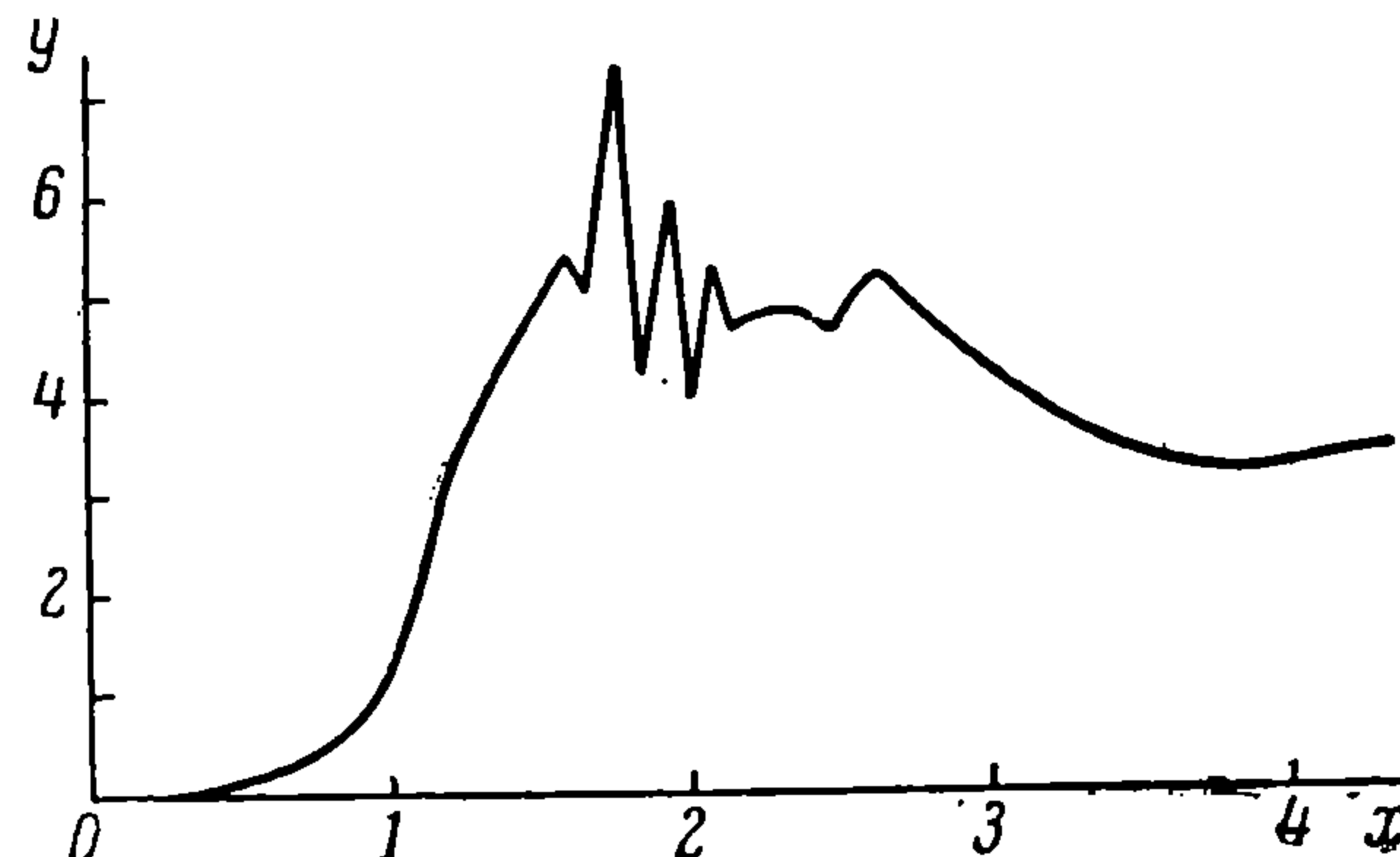
При $\Gamma < 0$ кольцо расширяется и приближается к стенке; для малых значений ζ_0 корень x_2 расположен далеко и, когда x достигает значения x_2 , скорость dy/dt , хотя и изменит знак, но будет настолько малой, что кольцо практически остановится и расплывется на некотором расстоянии от стенки (фиг. 5).

Если ζ_0 сравнима с единицей, то корень x_2 и последующие могут быть сравнительно близко. Кольцо будет совершать колебательные движения

к стенке и обратно, пока тоже не расплывется на некотором расстоянии от стенки.

Такой режим движения показан на фиг. 6. Он соответствует начальным значениям $\zeta_0 = 2/\sqrt{5}$, $a = 2$, $b = 4$, $\lambda = 5$. Дальнейшие случаи расположения начальных значений $x = a$, в зависимости от корней функции $f(x)$, не будут качественно отличаться от рассмотренного.

Разница будет состоять только в количестве колебательных движений к стенке и обратно. В работе [1] было показано, что при достаточно больших значениях ζ_0 внутри магнитно-вихревого кольца могут быть давления, сильно превышающие давление в окружающем газе. Там же было показано, что магнитно-вихревое кольцо устойчиво при малых возмущениях его поверхности.



Фиг. 6

Эти два обстоятельства дают право рассматривать магнитно-вихревое кольцо как возможную модель шаровой молнии. Рассмотренное в этом параграфе движение магнитно-вихревого кольца к непроводящей стенке показывает, что шаровая молния может проникать в помещение через узкие щели [2].

В заключение автор выражает благодарность своему руководителю — Л. И. Седову — за ценные советы и замечания.

Поступила 16 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладиков Ю. П. Магнитно-вихревые кольца. Изв. АН СССР. ОТН, серия «Механика и машиностроение», 1960, № 4.
2. Grand W. Der Kugelblitz, Hamburg, Grand 1923.
3. Ламб Г. Гидродинамика, Гостехиздат, 1947.
4. Ландау Л. Д. и Лившиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. ГИИТ, 1957.
5. Hicks W. M. On the mutual threading of vortex rings. Proc. Roy. Soc., 1922, A, 102, 111.