

СХОДЯЩИЕСЯ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ГАЗЕ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТИ

Ф. Л. Черноусько
 (Москва)

Задача о сферической (и цилиндрической) ударной волне, сходящейся к центру (оси) симметрии по однородному покоящемуся газу, была изучена Гудерлеем [1]. Им было построено автомодельное решение, описывающее движение газа с сильной сходящейся ударной волной, фронт которой распространяется по степенному закону в зависимости от времени. Ниже рассматривается задача о сходящейся ударной волне в газе переменной плотности.

1. Пусть начальное (невозмущенное) состояние идеального газа задается формулами:

$$p \equiv p_0, \quad \rho = \omega r^s, \quad v \equiv 0, \quad (s \geq 0) \quad (1.1)$$

где r , p , ρ , v — расстояние частицы от центра (оси, или плоскости) симметрии, давление, плотность и массовая скорость.

Уравнения одномерного адиабатического движения идеального газа имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{\rho v}{r} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho} \right) + v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где t — время, γ — показатель адиабаты; $\nu = 1$ для плоских, $\nu = 2$ для цилиндрических, $\nu = 3$ для сферических волн.

Условия на ударной волне можно взять в виде:

$$\begin{aligned} v_2 = v_1 + \frac{2}{\gamma + 1} c_1 \left(\frac{1}{M} - M \right), \quad p_2 = p_1 \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M^2 - 1) \right] \\ \rho_2 = \rho_1 \frac{(\gamma + 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \quad \left(M = \frac{v_1 - D}{c_1} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где c — скорость звука, D — скорость перемещения фронта ударной волны. Индекс 1 соответствует состоянию перед скачком, 2 — за скачком, причем необходимо $|M| \geq 1$.

Пусть положение сходящейся ударной волны определяется степенным законом: $r(t) = a(-t)^\delta$, причем $\delta > 0$, $a > 0$, а состояние перед скачком задано формулами (1.1). Тогда из (1.1), (1.3) имеем

$$c_1^2 = \frac{\gamma p_0}{\omega r^s}, \quad M = \frac{\delta a^\Delta \sqrt{\omega}}{\sqrt{\gamma p_0}} r^{1-\Delta+1/2s} \quad \left(\Delta = \frac{1}{\delta} \right) \quad (1.4)$$

Для того чтобы при $r \rightarrow 0$ выполнялось неравенство $M \geq 1$, необходимо, чтобы $\delta \leq 2/(2+s)$. Если $\delta < 2/(2+s)$, то $M \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, и интенсивность волны растет неограниченно; если же $\delta = 2/(2+s)$, то M есть постоянное число (оно должно быть не меньше 1), и волна имеет постоянную интенсивность.

Будем считать движение за скачком автомодельным [2] с определяющими параметрами r, t, ω, a . При $\delta = 2/(2+s)$ размерность p_0 выражается через размерности a и ω , что видно из (1.4), и предположение об автомодельности совместимо с условиями (1.1), (1.3). Если же $\delta < 2/(2+s)$, то, так как ударная волна становится сильной вблизи $r = 0$, начальным давлением p_0 можно пренебречь и взять условия (1.3) в виде:

$$v_2 = -\frac{2\delta}{\gamma+1} a^\Delta r^{1-\Delta}, \quad p_2 = \frac{2\delta^2 a^{2\Delta} \omega}{\gamma+1} r^{2-2\Delta+s}, \quad \rho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \omega r^s \quad (1.5)$$

Искомые функции v, p, ρ выражаются в предположении об автомодельности формулами

$$v = \frac{\delta r}{t} V(\lambda), \quad p = \frac{\delta^2 r^2}{t^2} \omega r^s P(\lambda), \quad \rho = \omega r^s R(\lambda) \quad \left(\lambda = \frac{r}{a|t|^\delta}\right) \quad (1.6)$$

Обозначения для V и P множителями δ и δ^2 отличаются от принятых в книге [2].

Подставляя равенства (1.6) в уравнения (1.2) и вводя вместо P новую искомую функцию $z = \gamma P/R$, получим известные обыкновенные дифференциальные уравнения для автомодельных движений

$$\frac{dz}{dV} = \frac{z}{V-1} \frac{(2+\kappa-\kappa\gamma-2V\delta)A + (\gamma-1)\delta(V-1)B}{(\kappa-\nu V\delta)A + \delta(1-V)B} \quad (1.7)$$

$$\frac{d \ln \lambda}{dV} = \frac{\delta A}{(\kappa-\nu V\delta)A + \delta(1-V)B} \quad (1.8)$$

$$(V-1) \frac{d \ln R}{d \ln \lambda} = -(s+\nu)V - \frac{(\kappa-\nu V\delta)A + \delta(1-V)B}{\delta A} \quad (1.9)$$

Здесь

$$A(V, z) = z - (1-V)^2 \quad (1.10)$$

$$B(V) = (\nu-1)V^2 + \frac{1-\nu\delta-\kappa}{\delta}V + \frac{\kappa}{\delta}, \quad \kappa = \frac{2-\delta(s+2)}{\gamma} \geq 0$$

Начальными условиями для этой системы служат соотношения на ударной волне, в которые нужно подставить выражения (1.6). При $\delta = 2/(2+s)$ начальные условия имеют вид ($M \geq 1$):

$$V = \frac{2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{1}{M^2}\right), \quad R = \frac{(\gamma+1)M^2}{2 + (\gamma-1)M^2}$$

$$z = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \left\{ \left(1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma M^2}\right) \left[1 + \frac{2}{(\gamma-1)M^2}\right] \right\} \quad \text{при } \lambda = 1 \quad (1.11)$$

В случае $\delta < 2/(2+s)$ получим такие начальные условия

$$V = \frac{2}{\gamma+1}, \quad z = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}, \quad R = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \quad \text{при } \lambda = 1 \quad (1.12)$$

Если число δ известно, задача сводится к интегрированию одного дифференциального уравнения (1.7) при данных начальных условиях и двум квадратурам; уравнение (1.9) можно заменить интегралом адиабатичности [2].

Для определения δ потребуем, чтобы построенное решение имело физический смысл и чтобы оно описывало движение газа со сходящейся ударной волной вплоть до прихода ее в центр (ось или плоскость) симметрии, то есть при всех $t \leq 0$. Движение газа в пространстве за скачком считаем непрерывным.

Чтобы v и p были ограничены при $t = 0, r \neq 0$, необходимо, как видно из (1.6), $V = 0, P = 0$, а следовательно, и $z = 0$ при $\lambda = \infty$.

Поэтому интегральная кривая уравнения (1.7) в плоскости Vz , дающая решение задачи, должна проходить через начало координат O , которое представляет собой особую точку (узел) уравнения (1.7). Одна интегральная кривая входит в нее с наклоном $(dz/dV)_0 = 1/\kappa$, а остальные касаются оси V .

Начальные точки в плоскости Vz , определяемые (1.11), располагаются на параболе:

$$z = (1 - V) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} V \right) \quad (1.13)$$

причем при увеличении M от 1 до ∞ координаты V , z начальной точки изменяются, соответственно,

$$\text{от } 0 \text{ до } V^\circ = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad \text{от } 1 \text{ до } z^\circ = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2}$$

Таким образом, при $\delta = 2/(2 + s)$ решение проходит через точки параболы (1.13) между (0.1) и $N(V^\circ, z^\circ)$, а при $\delta < 2/(2 + s)$ — через точку N .

Этот отрезок параболы и точка O лежат по разные стороны от кривой $A(V, z) = 0$, поэтому искомая интегральная кривая должна ее пересечь. При движении вдоль интегральной кривой, дающей решение, от начальной точки до точки O величина λ должна монотонно возрастать от 1 до ∞ ; в противном случае одному и тому же λ отвечали бы разные V и z , и течение было бы неоднозначным. Но при $A = 0$, как видно из (1.8), λ , вообще говоря, имеет экстремум. Поэтому, для того чтобы решение имело физический смысл, необходимо, чтобы искомая интегральная кривая пересекала параболу $A = 0$ в особой точке дифференциальных уравнений, в которой $A = 0$ и $V = 1$, либо $A = B = 0$.

Первой возможности соответствует точка $Q(1, 0)$. Подробный анализ системы (1.7) — (1.9) в окрестности особой точки Q показывает, что ни одна из кривых, проходящих через нее, не может быть искомым решением.

Второй возможности отвечает пара особых точек $P_{1,2}$, z -координаты которых определяются равенством $z_{1,2} = (V_{1,2} - 1)^2$, а V_1 и V_2 ($V_1 \leq V_2$) есть корни квадратного уравнения $B(V) = 0$, где $B(V)$ определено формулами (1.10).

Так как $\kappa \geq 0$, то V_1 и V_2 имеют одинаковый знак. Пусть $V_1 \leq V_2 < 0$, тогда искомая интегральная кривая, идущая от начальной точки, должна пересечь ось $V = 0$, чтобы пройти через P_1 или P_2 . При этом она должна оставаться в области $A > 0$, где лежат начальные точки. Но из (1.8) при $A > 0$, $V = 0$ (поэтому $B \geq 0$) следует, что $d \ln \lambda / dV > 0$. Поэтому при переходе кривой от $V > 0$ к $V < 0$ λ убывает, что противоречит требованию о монотонном возрастании λ при движении вдоль кривой от начальной точки к точке O .

Следовательно, необходимым условием возможности построения решения с указанными свойствами является вещественность и неотрицательность корней квадратного уравнения $B(V) = 0$. Подставляя в него κ из формул (1.10), после простых преобразований получим:

$$\frac{1}{\delta} - \frac{2 + s}{2} = \frac{\gamma(v - 1)V[V - 1 + s/2(v - 1)]}{(2 - \gamma)V - 2}$$

Отсюда следует, что оба требования: $\delta \leq 2/(2+s)$ и $V \geq 0$ совместимы лишь при $0 \leq V \leq 1 - s/2(\nu - 1)$, для чего необходимо: $s \leq 2(\nu - 1)$. Когда последнее неравенство выполнено, δ может лежать в пределах:

$$0 \leq \frac{1}{\delta} - \frac{2+s}{2} \leq \frac{\gamma(\nu-1)}{2} V_0^2 \quad (1.14)$$

где

$$V_0 = \frac{2}{2-\gamma} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{2-\gamma}{2} \left[1 - \frac{s}{2(\nu-1)} \right]} \right\}$$

и каждому δ , кроме минимального, соответствуют два значения V . Больше из них (V_2) при увеличении δ растет от V_0 до $1 - s/2(\nu - 1)$, а меньшее (V_1) убывает от V_0 до 0.

Итак, если $s \leq 2(\nu - 1)$, а δ подчинено условию (1.14), то выполнены необходимые условия построения решения. При этом можно, вообще говоря, строить автомодельные решения двух типов (γ , ν и s фиксированы).

1. Считаем $\delta < 2/(2+s)$, искомая интегральная кривая должна проходить через фиксированную начальную точку N и упираться в точку O , пересекая параболу $A(V, z) = 0$ в одной из особых точек $P_{1,2}$. Условие для определения δ заключается в том, что точка N лежит как раз на интегральной кривой, проходящей через особую точку в определенном направлении. Подбор δ и построение решения осуществляются методом последовательных приближений: численно интегрируется уравнение (1.7) при разных δ (лежащих в пределах (1.14)) из особой точки, пока N не попадет на кривую.

2. Пусть $\delta = 2/(2+s)$; поле интегральных кривых при этом фиксировано, а начальной может служить любая точка отрезка параболы (1.13). Особая точка P_1 имеет координаты $(0,1)$, и анализ показывает, что при любом $s \geq 0$ вдоль всех кривых, проходящих через эту точку, λ убывает при приближении к P_1 из области $V \geq 0$, где лежат начальные точки. Отрезок оси z от O до P_1 дает тривиальное решение, соответствующее покою.

Поэтому искомое решение при $\delta = 2/(2+s)$ может пройти лишь через точку P_2 . Если интегральная кривая уравнения (1.7), проходящая через O и P_2 (при изменении λ в нужном направлении), пересекает начальную параболу (1.13) при $0 \leq V \leq V^0$, то она дает решение задачи. Число M определяется из формул (1.11) по найденной точке пересечения.

Первый случай соответствует сильным волнам, а второй — волнам определенной постоянной интенсивности (умеренным). Отметим, что точки $P_{1,2}$ для решений первого типа лежат между точками $P_{1,2}$ для второго случая (при одних и тех же γ , ν и s).

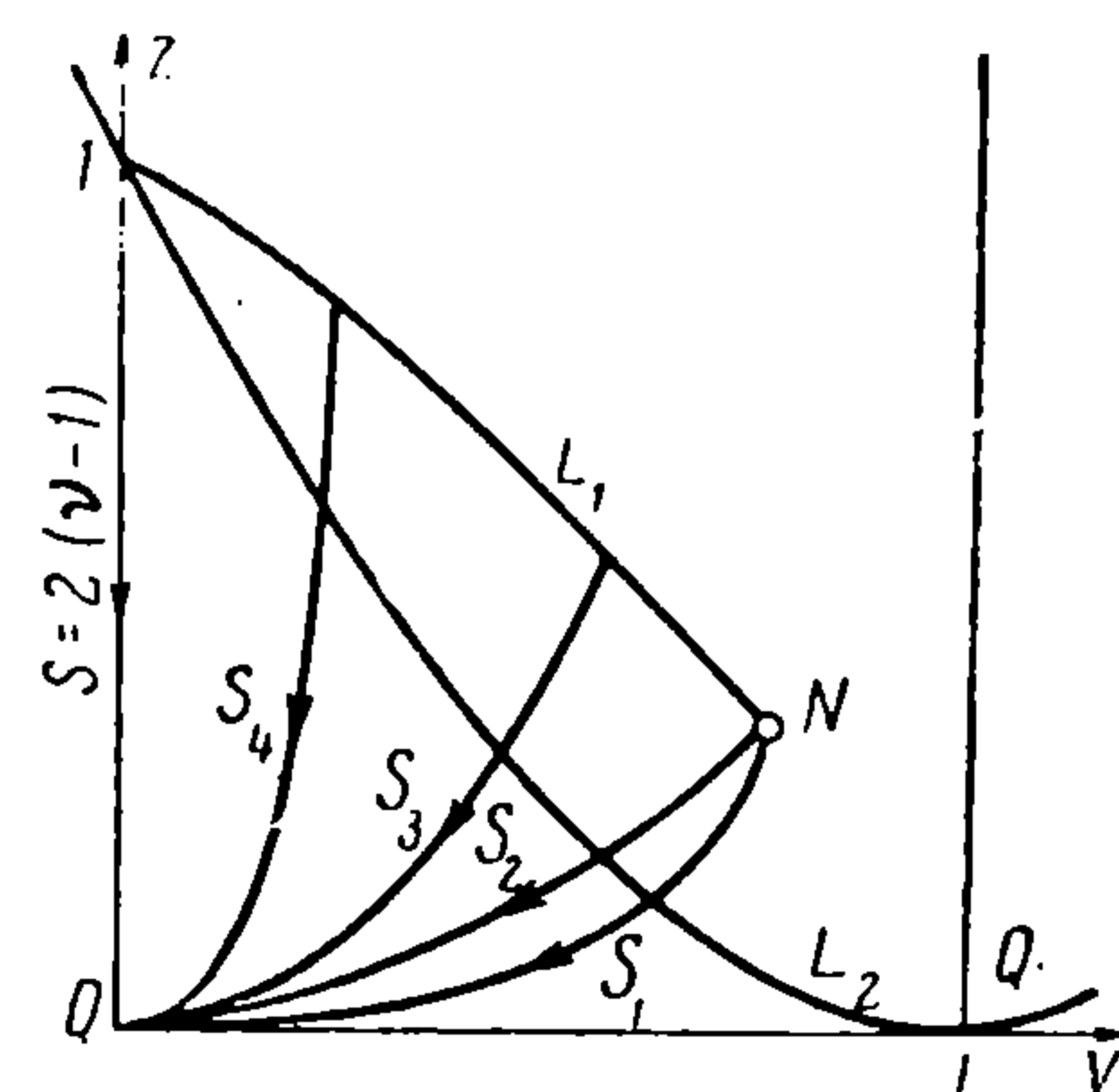
При $s = 0$ ($\nu \neq 1$) решения второго типа не существует, так как точка P_2 при $s = 0$, $\delta = 1$ совпадает с $Q(1, 0)$. Решение первого типа (с сильной волной) построено в работе [1]; интегральная кривая проходит через особую точку P_2 , являющуюся седлом.

Если же разность $s - 2(\nu - 1)$ отрицательна и достаточно мала ($\nu \neq 1$), то, наоборот, можно построить лишь решение второго типа, с умеренной

волной. В этом случае точка P_2 является седлом; из двух кривых, проходящих через нее, только вдоль одной λ растет при переходе из области $A > 0$ к $A < 0$.

Наклон dz/dV этой кривой сколь угодно велик при $[s - 2(\nu - 1)] \rightarrow -0$, а сама точка P_2 сколь угодно близка к $(0,1)$; это и обеспечивает пересечение кривой с отрезком начальной параболы. Число M , соответствующее точке пересечения, стремится к 1 при $[s - 2(\nu - 1)] \rightarrow -0$. Решения с сильной волной построить здесь нельзя: интегральные кривые, проходящие через P_1 и P_2 (лежащие вблизи точки $(0,1)$), не попадут в точку N .

При увеличении s от 0 до $2(\nu - 1)$ тип решения, по-видимому, изменяется следующим образом. Сначала (при s , близких к 0) возможны лишь решения с сильными волнами, то есть с $\delta < 2/(2 + s)$, и порядок обращения M в ∞ при $r \rightarrow 0$ убывает с ростом s . При некотором s осуществляется решение, проходящее через точку N такое, что $\delta = 2/(2 + s)$. Это случай решения, граничного между первым и вторым типами, причем волна имеет постоянную, но бесконечно большую интенсивность. При дальнейшем росте s реализуются лишь решения второго типа (с умеренной волной), и постоянное число M уменьшается от ∞ до 1 при увеличении s до $2(\nu - 1)$.



Фиг. 1

Решения первого типа можно, вообще говоря, строить и при $s < 0$; решения второго типа здесь невозможны, так как особая точка P_2 при $\delta = 2/(2 + s)$ лежит в области $V > 1$, отделенной от начальной параболы прямой $V = 1$ (интегралом уравнения (1.7)).

Схематический вид решений при различных s изображен на фиг. 1. Здесь L_1 — парабола начальных точек, L_2 — кривая $z = (1 - V)^2$, на которой лежат особые точки $P_{1,2}$, стрелкой указано направление роста λ , а $s_i < s_j$ при $i < j$ и все s_i не превосходят $2(\nu - 1)$. Значению s_1 соответствует решение первого типа, s_2 — граничный случай, s_3, s_4 — решения второго типа, причем $M_3 > M_4$. Значению $s = 2(\nu - 1)$ при $\nu \neq 1$ соответствует только тривиальное решение — отрезок оси z .

В случае плоских волн ($\nu = 1$) имеется лишь одна особая точка P_1 , координата V_1 которой связана с δ соотношением

$$\frac{1}{\delta} - \frac{2 + s}{2} = \frac{\gamma V_1 s}{2[(2 - \gamma)V_1 - 2]} \quad (1.15)$$

Решения второго типа при $s \neq 0$ невозможны, так как при $\delta = 2/(2 + s)$ получим $V_1 = 0$, и точка P_1 имеет координаты $(0,1)$. При $s = 0$, как видно из (1.15), должно быть $\delta = 1$. В этом случае $B(V) \equiv 0$, и переход решения через параболу $A = 0$ возможен, так как λ на ней не имеет экстремума. Уравнения (1.7) — (1.9) имеют простое решение:

$$V = V(1) \lambda^{-1}, \quad z = z(1) \lambda^{-2}, \quad R = R(1)$$

Здесь $V(1)$, $z(1)$, $R(1)$ даны начальными условиями (1.11).

Таким образом, при $s < 2(\nu - 1)$ можно строить автомодельные решения с сильной или умеренной сходящейся ударной волной. После

построения решения все характеристики течения при $t = 0$ будут известны, и распределение их является автомодельным. Поэтому можно решить задачу Коши о движении газа при $t \geq 0$ в тех же автомодельных переменных. В случае $s = 0$ в работе [1] построено такое решение с отраженной расходящейся ударной волной.

2. При $s \geq 2(\nu - 1)$ особые точки $P_{1,2}$ для решений обоих типов лежат в области $V \leq 0$. Следовательно, нарушается необходимое условие построения автомодельных решений с сильными или умеренными ($M = \text{const} > 1$) сходящимися ударными волнами.

Единственным автомодельным решением является здесь тривиальное — отсутствие возмущений. Так как при $[s - 2(\nu - 1)] \rightarrow -0$ интенсивность ударной волны автомодельного решения второго типа убывает, стремясь к 0, то естественно полагать, что при $s \geq 2(\nu - 1)$ существуют движения со сходящимися ударными волнами, слабыми вблизи $r = 0$.

Имея это в виду, для случая $s \geq 2(\nu - 1)$ линеаризируем уравнения (1.2). Положим

$$p = p_0 + p^\circ, \quad \rho = \omega r^s + \rho^\circ$$

и будем считать

$$|p^\circ| \ll p_0, \quad |\rho^\circ| \ll \omega r^s, \quad |v| \ll c_1 = \sqrt{\gamma p_0 / \omega r^s}.$$

Запишем линеаризованные уравнения движения

$$\begin{aligned} \omega r^s \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p^\circ}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \rho^\circ}{\partial t} + \omega r^s \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\nu + s - 1}{r} v \right) = 0 \\ \frac{1}{p_0} \frac{\partial p^\circ}{\partial t} - \frac{\gamma}{\omega r^s} \frac{\partial \rho^\circ}{\partial t} - \frac{\gamma s v}{r} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Обозначим через $u(r, t)$ смещение частицы из начального (невозмущенного) состояния; тогда $v = \partial u / \partial t$. Здесь, как обычно в линейной теории, пренебрегается различием между эйлеровыми и лагранжевыми координатами частиц. Интегрируя по t второе и третье уравнения (2.1) при условии, что $u = 0$, $p^\circ = 0$, $\rho^\circ = 0$ при $t \rightarrow -\infty$, после простых преобразований получим

$$p^\circ = -\gamma p_0 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\nu - 1}{r} u \right), \quad \rho^\circ = \frac{\omega r^s}{\gamma p_0} p^\circ - s \omega r^{s-1} u \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в первое из уравнений (2.1), получим уравнение для основной искомой функции $u(r, t)$:

$$\frac{\omega r^s}{\gamma p_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{u}{r} \right] \quad (2.3)$$

Характеристики этого линейного гиперболического уравнения второго порядка суть

$$t + \frac{2\sqrt{\omega} r^{1+1/2s}}{(2+s)\sqrt{\gamma p_0}} = \xi, \quad t - \frac{2\sqrt{\omega} r^{1+1/2s}}{(2+s)\sqrt{\gamma p_0}} = \eta$$

В характеристических переменных после замены искомой функции получим уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{m}{\xi - \eta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = 0 \quad \left(\varphi = u r^{\nu-1}, m = \frac{1}{2} - \frac{\nu}{2+s} \right) \quad (2.4)$$

Известно, что общее решение уравнения (2.4) может быть найдено в замкнутом виде, если m является целым числом. Так, при $s = 2(\nu - 1)$ имеем $m = 0$, и общее решение уравнения (2.3) имеет вид:

$$u = r^{1-\nu} \left[f \left(t + \sqrt{\frac{\omega}{\gamma p_0}} \frac{r^\nu}{\nu} \right) + g \left(t - \sqrt{\frac{\omega}{\gamma p_0}} \frac{r^\nu}{\nu} \right) \right]$$

при $\nu = 1$ оно переходит в известное решение для плоских волн.

Если смещение $u(r, t)$ найдено, то избыточное давление и плотность определяются по формулам (2.2), а скорость $v = \partial u / \partial t$. Можно, однако получить для этих величин и отдельные уравнения

$$\frac{\omega r^s}{\gamma p_0} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial v}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{v}{r} \right], \quad \frac{\omega r^s}{\gamma p_0} \frac{\partial^2 p^\circ}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p^\circ}{\partial r^2} + \frac{\nu - s - 1}{r} \frac{\partial p^\circ}{\partial r} \quad (2.5)$$

Легко видеть, что уравнение (2.3) имеет инвариантно-групповое решение вида

$$u = Cr^{1+k} w(x), \quad x = \frac{1}{2} \left(\frac{2+s}{2} \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\omega}} \frac{t}{r^{1+1/2s}} + 1 \right) \quad (2.6)$$

где w — дважды дифференцируемая безразмерная функция безразмерного аргумента x , C — произвольная постоянная размерности $(см)^{-k}$.

Если смещение выражается формулой (2.6), то для v и p° получим, пользуясь $v = \partial u / \partial t$ и (2.2),

$$v = C \frac{2+s}{4} \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\omega}} r^{k-1/2s} q(x), \quad p^\circ = -\gamma p_0 C \frac{2+s}{4} r^k \sigma(x) \quad (2.7)$$

причем функции $q(x)$ и $\sigma(x)$ выражаются через $w(x)$ следующим образом

$$q(x) = w'(x), \quad \sigma(x) = (1 - 2x) w'(x) + \frac{[4(k + \nu) w(x)]}{2 + s} \quad (2.8)$$

Подставляя (2.6) в (2.3), найдем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $w(x)$. Это уравнение является гипергеометрическим

$$x(1-x)w'' + [\theta - (1 + \alpha + \beta)x]w' - \alpha\beta w = 0 \quad (2.9)$$

со следующими значениями параметров α , β , θ :

$$\alpha = -\frac{2k}{2+s}, \quad \beta = -\frac{2(k+\nu)}{2+s}, \quad \theta = \frac{1}{2} - \frac{3k+\nu}{2+s} \quad (2.10)$$

После подстановки выражений (2.7) в уравнения (2.5) получим аналогично дифференциальные уравнения для q и σ . Они также оказываются гипергеометрическими с параметрами

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \frac{2k}{2+s}, & \beta &= 1 - \frac{2(k+\nu)}{2+s}, & \theta &= \frac{3}{2} - \frac{2k+\nu}{2+s} & \text{для } q \\ \alpha &= -\frac{2k}{2+s}, & \beta &= 2 - \frac{2(k+\nu)}{2+s}, & \theta &= \frac{3}{2} - \frac{2k+\nu}{2+s} & \text{для } \sigma \end{aligned} \quad (2.11)$$

Построим решение вида (2.6) со слабой ударной волной, сходящейся по покоящемуся газу. При $t = 0$ происходит отражение волны от центра (оси, или плоскости) симметрии.

Условия на ударной волне (1.3) в случае слабого скачка ($M \rightarrow 1$) можно взять в виде

$$p_2^\circ - p_1^\circ = D\omega r^s (v_2 - v_1), \quad D = \pm V \sqrt{\gamma p_0 / \omega r^s} \quad (2.12)$$

где знак «плюс» для расходящихся, а «минус» для сходящихся волн.

Третье условие на ударной волне выполняется автоматически в силу близости ударной адиабаты и изэнтропы для слабых скачков.

При $r = 0$ имеем граничное условие: $v(0, t) = 0$, означающее отсутствие источника или стока.

На фиг. 2 кривые S_1 и S_2 изображают характеристики — фронты проходящей и отраженной волн, уравнения которых $x = 0$, $x = 1$ (см. (2.6)), а 1, 2 и 3 — области в плоскости rt , в которых нужно найти решение.

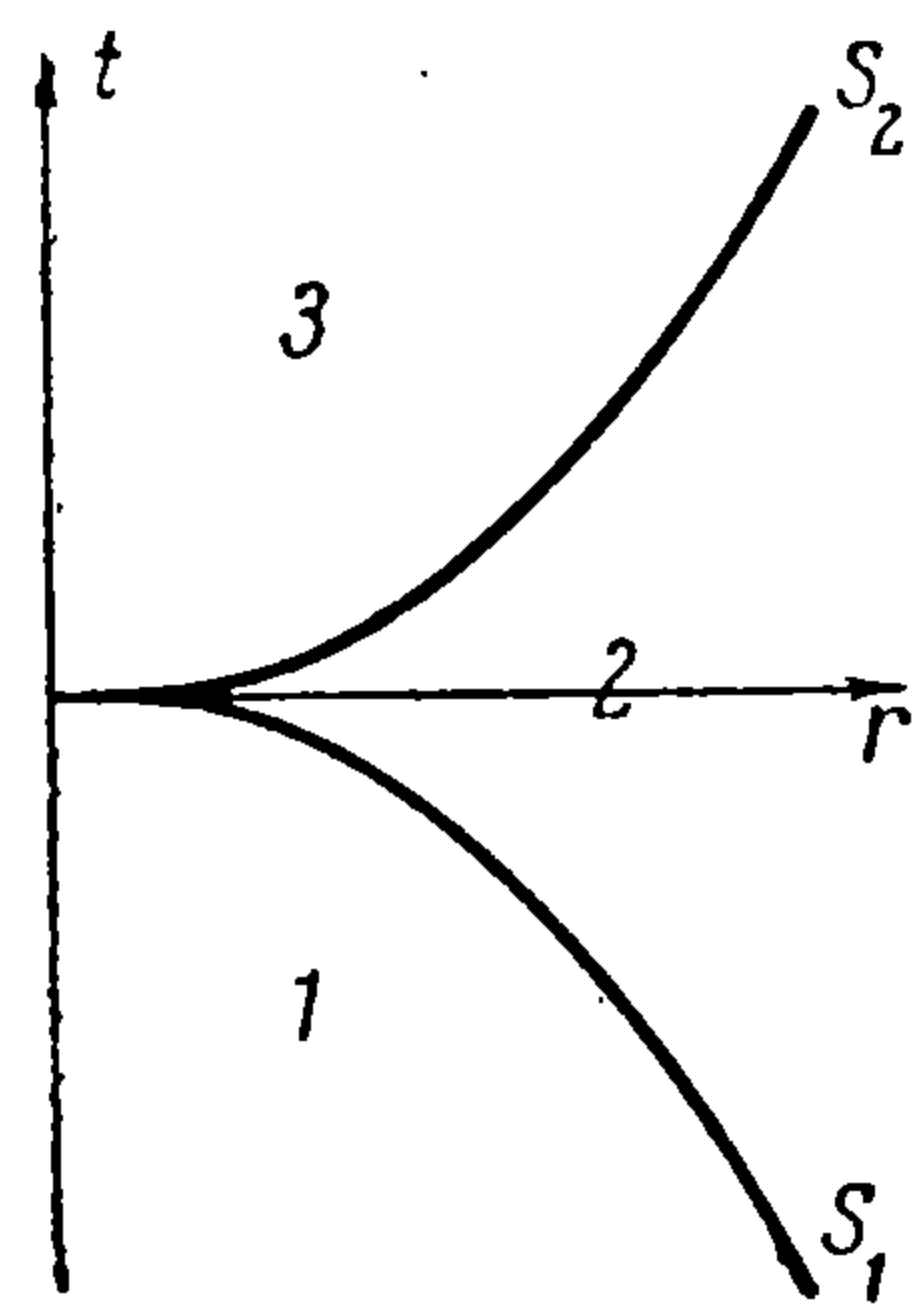
Из формул (2.7), (2.8) следует, что при условии непрерывности смещения на проходящем и отраженном фронтах соотношения (2.12) выполняются на них автоматически.

До прихода возмущений, при $-\infty < x \leq 0$ (область 1 на фиг. 2) имеем

$$w_1 = q_1 = \sigma_1 \equiv 0$$

Смещение на фронте сходящейся волны (при $x = 0$) меняется непрерывно, а скорость и давление испытывают конечный скачок. Не нарушая общности (в силу линейности уравнений), требуем

$$w_2(0) = 0, \quad w_2'(0) = 1 \quad (2.13)$$



Фиг. 2

Для определения движения в области 2 (при $0 \leq x \leq 1$) необходимо построить решение гипергеометрического уравнения (2.9) с параметрами (2.10) при начальных условиях (2.13); величина k пока оставалась неопределенной. Точка $x = 0$ является особой для гипергеометрического уравнения, и рассмотрение его линейно-независимых решений в окрестности этой точки [3] при разных θ показывает, что удовлетворить обоим условиям (2.13) можно лишь при $\theta = 0$. Таким образом,

$$k = \frac{2+s}{4} - \frac{\nu}{2} = \frac{2+s}{2} m \quad (2.14)$$

Можно рассматривать и решения с $\theta \neq 0$; при этом давление и скорость на фронте сходящейся волны будут обращаться в 0 или ∞ .

При $\theta = 0$ решение уравнения (2.9), удовлетворяющее условиям (2.13), единственно и имеет вид (с учетом значений α, β, k):

$$w_2 = xF(1 - m, m; 2; x) \quad (2.15)$$

где F — гипергеометрический ряд, сходящийся абсолютно при $|x| \leq 1$.

Функции $q_2(x)$ и $\sigma_2(x)$ определяются при помощи (2.8); удобнее, однако, воспользоваться тем, что они удовлетворяют гипергеометрическому уравнению с параметрами (2.11). Решения этих уравнений с начальными условиями $q_2(0) = 1, \sigma_2(0) = 1$, вытекающими из (2.13) и (2.8),

имеют вид:

$$q_2 = F(1 - m, m; 1; x), \quad \sigma_2 = F(-m; 1 + m; 1; x) \quad (2.16)$$

Чтобы определить движение в области 3 (при $1 \leq x < \infty$), нужно найти такое решение уравнения (2.9), при котором $v(0, t) = 0$. Из двух линейно-независимых решений гипергеометрического уравнения [4] в окрестности особой точки $x = \infty$ только одно удовлетворяет этому условию, а именно:

$$w_3 = Ex^m F(-m, 1 - m; 2 - 2m; x^{-1}) \quad (2.17)$$

причем ряд в (2.17) сходится абсолютно при $|x| \geq 1$.

На фронте отраженной волны смещение меняется непрерывно, поэтому $w_2(1) = w_3(1)$, откуда находится постоянная

$$E = \frac{\Gamma(1 - m)}{\Gamma(1 + m)\Gamma(2 - 2m)} \quad (2.18)$$

Применяя те же соображения, что и при получении формул (2.16), определим $q_3(x)$ и $\sigma_3(x)$:

$$\begin{aligned} q_3 &= Emx^{m-1} F(1 - m, 1 - m; 2 - 2m; x^{-1}) \\ \sigma_3 &= 2E(1 - 2m)x^m F(-m, -m; -2m; x^{-1}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Таким образом, функции w , q , σ определены во всех областях, а вместе с тем найдено решение поставленной задачи об отражении сходящейся волны. Из формул, описывающих решение в областях 2, 3, следует, что условия линеаризации уравнений, то есть условия $|u| \ll r$, $|v| \ll c_1$, $|p^\circ| \ll p_0$, выполняются при $r \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$, если $s > 2(\nu - 1)$ и $k > 0$. Нарушение этих условий происходит лишь при x , близких к 1 (отраженный фронт), так как ряды (2.16) и (2.19) расходятся при $x = 1$.

Исследуем поведение решения на некоторых характерных линиях в плоскости rt .

1. На фронте сходящейся волны ($x = 0$) имеем

$$u = 0, \quad v = C \frac{2+s}{4} \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\omega}} r^{k-1/2s}, \quad p^\circ = -\gamma p_0 C \frac{2+s}{4} r^k$$

Хотя скорость за скачком растет неограниченно при $r \rightarrow 0$, но отношения v/c_1 и p°/p_0 являются при этом бесконечно малыми при $s > 2(\nu - 1)$. Это позволяет считать сходящуюся волну слабой вблизи $r = 0$ и оправдывает применение на ней приближенных соотношений (2.12).

2. Найдем распределение величин при $t = 0$. Чтобы вычислить необходимые для этого значения гипергеометрических рядов в (2.15) и (2.16) при $x = 1/2$, воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} F\left(\alpha, \beta; \frac{\alpha+\beta+1}{2}; \frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)} \\ F\left(\alpha+1, -\alpha; 2; \frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)} \end{aligned}$$

Первая из этих формул имеется в [5], а вторая может быть получена как ее предельный случай при $(\alpha + \beta + 1) \rightarrow 0$. Определяя теперь $w_2(1/2)$, $q_2(1/2)$, $\sigma_2(1/2)$, из (2.6) и (2.7) найдем u , v и p° при $t = 0$:

$$u = \frac{C \sqrt{\pi} r^{1+k}}{4\Gamma(1 + 1/2m) \Gamma(3/2 - 1/2m)}$$

$$v = \frac{C(2+s) \sqrt{\pi} \sqrt{\gamma p_0} r^{k-s/2}}{4\sqrt{\omega} \Gamma(1/2 + 1/2m) \Gamma(1 - 1/2m)}$$

$$p^\circ = - \frac{\gamma p_0 C (2\nu + 2 + s) \sqrt{\pi} r^k}{16\Gamma(1 + 1/2m) \Gamma(3/2 - 1/2m)}$$

3. На фронте отраженной волны (при $x = 1$) смещение является конечным и одинаковым с обеих сторон от скачка. Вычисляя $w_2(1)$, из (2.6) найдем u на отраженном фронте:

$$u = \frac{C}{\pi} \cos\left(\frac{\pi\nu}{2+s}\right) \frac{4r^{1+k}}{1 - [2\nu/(2+s)]^2}$$

Для оценки q и σ вблизи $x = 1$ применим равенство, имеющееся в книге [5]:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{F(\alpha, \beta; \alpha + \beta; x)}{\ln(1-x)} = - \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}$$

Отсюда видно, что скорость и давление обращаются логарифмически в бесконечность вблизи отраженного фронта, причем оказывается, что коэффициенты при логарифмическом члене одинаковы с обеих сторон от фронта. Имеют место формулы

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{v}{\ln|1-x|} = - C \frac{2+s}{4\pi} \cos \frac{\pi\nu}{2+s} \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\omega}} r^{k-1/2s} \quad (2.20)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{p^\circ}{\ln|1-x|} = - \gamma p_0 C \frac{2+s}{4\pi} \cos \frac{\pi\nu}{2+s} r^k$$

Очевидно, что вблизи отраженного фронта условия линеаризации нарушаются.

4. Величины u , v , p° вблизи центра (оси, или плоскости) симметрии после отражения волны определяются асимптотическими формулами:

$$u = brt^m, \quad v = bmr t^{m-1}, \quad p^\circ = - \gamma p_0 bvt^m \quad \left(b = C \left(\frac{2+s}{4} \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\omega}} \right)^m E \right) \quad (2.21)$$

полученными из решения в области \mathcal{Z} при $r \rightarrow 0$ (или $x \rightarrow \infty$). Если сходящаяся волна является волной сжатия, $C < 0$; из формул (2.20), (2.21) следует, что вблизи отраженного фронта (с обеих сторон от него) имеет место разрежение ($p^\circ < 0$), а при $r = 0$ — сжатие.

Если m , определяемое (2.4), является целым, то общее решение уравнения (2.3) находится в замкнутом виде. При этом все параметры гипергеометрических рядов (2.15), (2.16), (2.17), (2.19) оказываются целыми, и эти ряды являются полиномами от x . В этом случае логарифмическая расходимость на фронте отраженной волны (формулы (2.20)) отсутствует, так как $\cos[\pi\nu/(2+s)] = 0$.

При $s \geq 2(\nu - 1)$ число m может быть равным только одному целому числу — нулю, что имеет место при $s = 2(\nu - 1)$. В этом случае $w_2 = x$, $w_3 = E = 1$.

Подставляя эти равенства в (2.6) — (2.8), найдем решение в простой форме

$$u_2 = \frac{C}{2} r \left(1 + \nu \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\omega} \frac{t}{r^\nu}} \right), \quad v_2 = \frac{C}{2} \nu \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\omega}} r^{1-\nu}$$

$$p_2^\circ = -\frac{C}{2} \gamma p_0 \nu, \quad u_3 = Cr, \quad v_3 = 0, \quad p_3^\circ = -C \gamma p_0 \nu$$

Эти формулы обобщают решение задачи об отражении плоской акустической волны ($\nu = 1$).

Построенные решения удовлетворяют линейным уравнениям (2.1) и при $s < 2(\nu - 1)$. Так, в случае сферических волн в однородном газе, т. е. при $s = 0$, $\nu = 3$, получим

$$w_2 = x(1 - x), \quad E = 0, \quad w_3 = 0$$

Решение имеет вид

$$u_2 = \frac{C}{4} \left(1 - \frac{\gamma p_0}{\omega} \frac{t^2}{r^2} \right), \quad v_2 = -\frac{C}{2} \frac{\gamma p_0}{\omega} \frac{t}{r^2}$$

$$p_2^\circ = -\frac{C}{2} \frac{\gamma p_0}{r} \quad u_3 = 0, \quad v_3 = 0, \quad p_3^\circ = 0$$

Волна сжатия отражается как волна разрежения (и наоборот), после чего восстанавливается невозмущенное состояние.

Решение задачи о сходящихся цилиндрических акустических волнах в однородном газе получится, если в формулах (2.6) — (2.8), (2.14) — (2.19) положить $s = 0$, $\nu = 2$. Этот случай был рассмотрен в работах [6] и [7]. В [6] решение уравнения, сводимого к гипергеометрическому, находится в виде ряда, а в [7] сходящаяся цилиндрическая волна строится путем суперпозиции плоских волн. Выражения для давления, найденные Я. Б. Зельдовичем [7] в форме интегралов, зависящих от параметра, получаются из (2.16) и (2.19) при помощи интегрального представления гипергеометрических функций [3]

$$F(\alpha, \beta; \theta; x) = \frac{\Gamma(\theta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\theta - \beta)} \int_0^1 z^{\beta-1} (1-z)^{\theta-\beta-1} (1-zx)^{-\alpha} dz \quad (\theta > \beta > 0)$$

Однако при $s < 2(\nu - 1)$ имеем $k < 0$, и условия линеаризации уравнений нарушаются вблизи $r = 0$. Интенсивность сходящейся волны при этом согласно линейному решению растет неограниченно, что противоречит предположению о применимости формул (2.12). Поэтому в случае $s < 2(\nu - 1)$ рассмотренные линейные решения несправедливы вблизи $r = 0$. В частности, акустическое приближение для сходящихся сферических и цилиндрических волн в однородном газе становится неверным при приближении волны к центру (оси) симметрии; здесь имеют место нелинейные решения, построенные Гудерлесом [1].

Заметим, что рассмотренные решения справедливы асимптотически при $r \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$ и при несколько более общих, чем (1.1), предположениях относительно невозмущенного состояния. Так, величины ω и p_0 могут быть непрерывными функциями времени, это не скажется на процессе отражения волны вблизи $r = 0$, $t = 0$. Начальная скорость частиц может быть и не нулевой, но если при $r \rightarrow 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} v(r, 0) &= o(r^{-1/2s}) \quad \text{для } s < 2(\nu - 1), \\ v(r, 0) &= o(r^{1/2-1/4s-1/2\nu}) \quad \text{для } s \geq 2(\nu - 1) \end{aligned}$$

то ею можно пренебречь по сравнению со скоростью за скачком, и решения останутся верными.

Итак, если плотность идеального газа вблизи центра (оси или плоскости) симметрии распределена по степенному закону, то поведение сходящихся ударных волн в нем может быть различным, в зависимости от величины s . При $s < 2(\nu - 1)$ ударные волны усиливаются или сохраняют определенную постоянную интенсивность вблизи $r = 0$, а при $s > 2(\nu - 1)$ — ослабляются. Первый случай может быть изучен при помощи автомодельных движений, а второй — на основе линеаризованных уравнений, причем линеаризация для сходящейся волны является корректной.

Считаю своим долгом выразить глубокую благодарность С. С. Григоряну за руководство при выполнении этой работы.

Поступила 18 V 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. G u d e r l e y G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse. Luftfahrtforschung, 1942, Bd. XIX, № 9.
2. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехтеоретиздат, М., 1957.
3. Р ы ж и к И. М. и Г р а д ш т е й н И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1951.
4. С м и р н о в В. И. Курс высшей математики, т. III, ч. 2. Физматгиз, М., 1958.
5. У и т т е к е р Е. Т. и В а т с о н Г. Н. Курс современного анализа, ч. II. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1934.
6. З а б а б а х и н Е. И., Н е ч а е в М. Н. Ударные волны поля и их кумуляция. ЖЭТФ, 1957, т. XXXIII, вып. 2 (8).
7. З е л ь д о в и ч Я. Б. Цилиндрические автомодельные акустические волны. ЖЭТФ, 1957, т. XXXIII, вып. 3 (9).