Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

СВЕРХЗВУКОВОЕ ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗА ИЗ СОПЛА В ОБЛАСТЬ ПОНИЖЕННОГО ДАВЛЕНИЯ

Г. А. Домбровский
(Харьков)

Рассмотрим плоскую сверхзвуковую струю идеального газа, вытекающую из сопла в область пониженного давления при равномерном распределении скорости на выходе.

Теоретическое изучение такого газового потока при дополнительных условиях стационарности и незавихренности впервые проводилось Прандтлем [1]. Пользуясь методом малых возмущений, Прандтль подтвердил экспериментальный результат о периодической структуре струи при малых перепадах давления.

Позже решение Прандтля уточнялось в ряде работ. В большинстве случаев полученные при этом приближенные решения снова имели периодическую структуру и не содержали ни поверхностей разрыва, ни особенностей, приводящих к необходимости введения таких поверхностей. В частности, в работе [2] непрерывное периодическое решение получено методом, аналогичным методу С. А. Христиановича [3].

Вместе с тем в литературе указывалось, что более точные решения должны обязательно содержать поверхности разрыва, так как в противном случае на некотором расстоянии от среза сопла возникнут предельные линии [4]. Аналитическое доказательство этого утверждения можно найти в статье [5]. Методом Лина [6], здесь было показано, что при условии достаточной малости перепадов давления действительно в струе образуются предельные линии как огибающие прямолинейных характеристик, которые сходятся прежде, чем смогут достичь свободной поверхности. Течение в такой струе, очевидно, должно носить явно апериодический характер.

Заметим, кстати, что для расчетного случая сверхзвукового истечения невозможность непрерывного течения на достаточно большом расстоянии от среза сопла и апериодичность струи были установлены в работе [7].

В настоящей статье задача Прандтля о сверхзвуковом истечении газа из плоского сопла в область пониженного давления решается методом, предложенным в работе [8]. Рассматриваются вопросы, связанные с возникновением в струе ударных волн.

1. Возьмем уравнения для потенциала скорости φ и функции тока ψ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = -\sqrt{K_1}\,\frac{\partial\psi}{\partial\xi}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \sqrt{K_1}\,\frac{\partial\psi}{\partial\eta} \qquad \left(\begin{array}{l} \xi = {}^1/_2\,(t-\theta) \\ \eta = {}^1/_2\,(t+\theta) \end{array}\right) \tag{1.1}$$

Здесь $K_1(t)$ — функция Чаплыгина, ξ, η — характеристические переменные, t — переменная величина вместо модуля скорости, θ — угол наклона вектора скорости к оси x. Если принять

$$K_1(t) = (n \operatorname{tg} mt)^4 \tag{1.2}$$

то для φ и ψ получаем общие решения в виде

$$\varphi = n\,\{-m\,[f_1(\xi) + f_2(\eta)] + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg} m\,(\xi+\eta)\,[f_1{}'(\xi) + f_2{}'(\eta)]\}$$

$$\psi = n^{-1}\,\{m\,[-f_1(\xi) + f_2(\eta)] + \tfrac{1}{2}\operatorname{ctg} m\,(\xi+\eta)\,[-f_1{}'(\xi) + f_2{}'(\eta)]\} \tag{1.3}$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ — произвольные функции, подлежащие определению из граничных данных, n и m — произвольные постоянные [8].

При условии (1.2) для скорости v, плотности ρ и числа M имеем

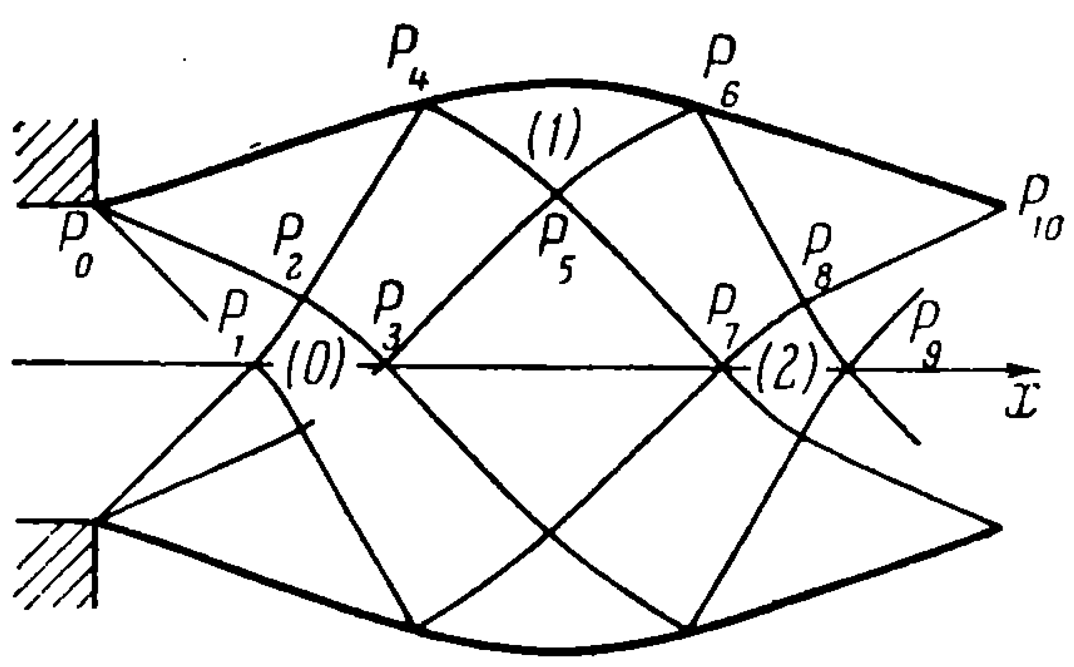
$$v(t)=\frac{Bn^2 \operatorname{tg} mt}{A(m \operatorname{tg} mt \sin t+\cos t)+(m \operatorname{tg} mt \cos t-\sin t)} \tag{1.4}$$

$$\rho(t)=\frac{A(m \operatorname{tg} mt \sin t+\cos t)+(m \operatorname{tg} mt \cos t-\sin t)}{n^2 \operatorname{tg} mt\,[A(\operatorname{tg} mt \sin t+m\cos t)+(\operatorname{tg} mt \cos t-m\sin t)]} \tag{1.5}$$

$$M(t)=\sqrt{1+\rho^2 K_1} \tag{1.6}$$

где A и B — дополнительные произвольные постоянные, свободу выбора которых, как и свободу выбора постоянных m и n, можно с успехом использовать для получения достаточно высоких приближений [8].

Из (1.4), (1.5) и (1.6) устанавливаем, что $\rho=0$, $M=\infty$ и максимальное значение скорости достигаются при $t=\pi/2m$.



Фиг. 1

Отметим еще положительность производной dv/dt. В этом проще всего можно убедиться из общего соотношения [9]

$$dv/dt=v/\rho\sqrt{K_1} \tag{1.7}$$

Рассматриваемое течение является симметричным относительно оси x, проходящей через центр выходного отверстия параллельно направлению стенок сопла на выходе. Поэтому достаточно ограничиться изучением только верхней его половины.

Характерные области, в которых необходимо последовательно определять искомые функции $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$, в физической плоскости течения представлены на фиг. 1, в плоскости переменных $t\theta$ — на фиг. 2; для соответствующих точек на фиг. 1 и фиг. 2 приняты одинаковые обозначения. В плоскости $t\theta$ эти области ограничены отрезками прямых $\theta=0$ и $t=t_2$ и отрезками характеристик

$$\begin{aligned}\xi=\xi_1={}^1/_2(t_2-\theta_2)={}^1/_2 t_1, \qquad \eta=\eta_1={}^1/_2(t_2+\theta_2)={}^1/_2 t_3\\ \xi=\xi_2={}^1/_2(t_2+\theta_2)={}^1/_2 t_3, \qquad \eta=\eta_2={}^1/_2(t_2-\theta_2)={}^1/_2 t_1\end{aligned} \tag{1.8}$$

где t_1 — значение переменной величины t на выходе из сопла, t_2 — постоянное значение t на поверхности струи и в областях $P_0P_2P_4$ и $P_6P_8P_{10}$ и t_3 — постоянное значение t в области $P_3P_5P_7$; θ_2 — угол, характеризующий направление течения в области $P_0P_2P_4$.

Характерные области на фиг. 1 и фиг. 2 показаны для течений, параметры t_1 и t_2 которых удовлетворяют условию

$$2t_2-t_1<\pi/2m \qquad (t_3=2t_2-t_1) \tag{1.9}$$

Ограничимся вначале рассмотрением течений, удовлетворяющих условию (1.9).

2. Приступая к решению задачи, обратимся прежде всего к результату статьи [10], в которой рассмотрен вопрос об определении функции тока на поперечной характеристике в простой волне. Этот результат сводится к следующему: если на некоторой поперечной характеристике в простой волне известна функция ψ^*, то значения ψ на другой поперечной характеристике выражаются по формуле

$$\psi = \psi^* + \mu K_1^{-1/4} \qquad (2.1)$$

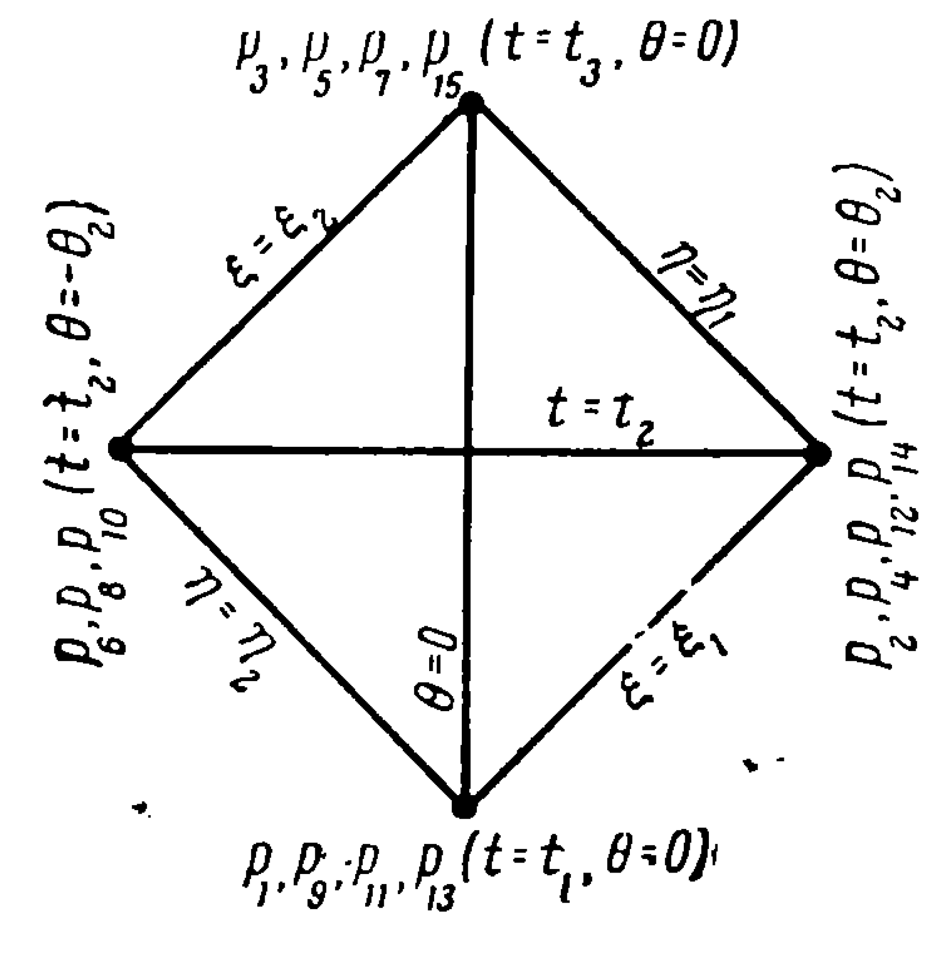
где μ — величина, сохраняющая постоянное значение вдоль каждой характеристики; непрерывный переход от одной характеристики к другой влечет за собой непрерывное изменение μ. Если простая волна является к тому же центрированной, то на поперечной характеристике

$$\psi = Q + \mu K_1^{-1/4} \qquad (2.2)$$

где Q — значение функции тока в центре.

По условию, давление во внешнем пространстве ниже, чем давление на выходе из сопла. Поэтому на краю сопла возникают центрированные волны разрежения. Полагая в точке P_0 и на поверхности струи $\psi = Q$, а на оси симметрии $\psi = 0$, получаем согласно (2.2) и (1.2) значение функции тока на поперечной характеристике P_1P_2 в виде

$$\psi_{P_1P_2} = Q\left(1 - \frac{\operatorname{tg} mt_1}{\operatorname{tg} m(\xi_1 + \eta)}\right) \qquad (2.3)$$



Фиг. 2

Следующим шагом является определение $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ в области $P_1P_2P_3$ (область (0)) по известным значениям (2.3) функции ψ на характеристике P_1P_2 и условию $\psi = 0$ на оси симметрии. Решение этой граничной задачи для принятой согласно (1.2) функции $K_1(t)$ можно найти в [11]. В рассматриваемом случае получаем (2.4)

$$f_1^{(0)}(\xi) = f(\xi), \quad f_2^{(0)}(\eta) = f(\eta) \quad \left(f(\xi) = -q\cos 2m(\xi + \eta_2), \quad q = \frac{nQ}{2m\cos^2 mt}\right)$$

Переходим далее к области $P_4P_5P_6$ (область (1)), ограниченной в плоскости $t+\theta$ отрезками характеристик $\xi = \xi_2$, $\eta = \eta_1$ и отрезком прямой $t = t_2$. Здесь необходимо удовлетворить двум условиям: во-первых, на поперечной характеристике P_4P_5 функция ψ должна принимать значения, определяемые по формуле (2.1), и, во-вторых, на свободной поверхности P_4P_6 должно выполняться равенство $\psi = Q$.

Решение граничной задачи с заданными условиями на характеристике и свободной поверхности также дано в статье [11]. Согласно результату этой работы естественно представить искомое решение в виде

$$\begin{gathered} f_1^{(1)}(\xi) = f(\xi) \\ f_2^{(1)}(\eta) = -f(t_2 - \eta) + 2k_2 e^{-k_2\eta} \int_{\eta_1}^{\eta} f(t_2 - \eta) e^{k_2\eta}\, d\eta + C_1 e^{-k_2\eta} + C_2 \end{gathered} \qquad (2.5)$$

где для сокращения записи $k_2 = 2m \operatorname{tg} mt_2$ и C_1 и C_2 — постоянные, которые определяются из граничных условий.

Удовлетворяя на свободной поверхности условию $\psi = Q$, а затем условию на характеристике P_4P_5, находим

$$C_2 = 2q\cos^2 mt_1, \qquad C_1 = -qe^{k_2\eta_1}(\cos 2mt_1 + 2\cos^2 mt_1 + \cos 2mt_2) \qquad (2.6)$$

В результате интегрирования функцию $f_2^{(1)}(\eta)$ представляем в виде

$$f_2^{(1)}(\eta) = q\{\cos 2m\,(\eta_2 - \eta) - \\ - 4e^{k_2(\eta_1-\eta)}\cos mt_1 \cos mt_2 \cos m\,(t_2 - t_1) + 2\cos^2 mt_1\} \tag{2.7}$$

В области $P_7P_8P_9$ (область (2)), учитывая симметрию относительно оси x, без труда получаем

$$f_1^{(2)}(\xi) = f_2^{(1)}(\xi), \qquad f_2^{(2)}(\eta) = f_2^{(1)}(\eta) \tag{2.8}$$

При этом между значениями ψ на поперечных характеристиках P_5P_6 и P_7P_8 осуществляется связь (2.1).

Ниже будет показано, что решение для простой волны по данным на поперечной характеристике P_8P_9 всегда содержит особенность — предельную линию, наличие которой указывает на невозможность дальнейшего продолжения непрерывного потенциального течения в струе. Однако в плоскости $t\theta$ при этом никаких особенностей, как известно, не появляется. Поэтому можно формально продолжить решение, исходя из условий $\psi(t, 0) = 0$, $\psi(t_2, \theta) = Q$ и соотношения (2.1) для функции ψ.

В области $P_{10}P_{11}P_{12}$ (область (3)) по аналогии с (2.5) получаем

$$f_1^{(3)}(\xi) = f_1^{(2)}(\xi), \qquad f_2^{(3)}(\eta) = f(\eta) + C_3e^{-k_2\eta} + C_4 \tag{2.9}$$

где

$$C_4 = 4q\cos^2 mt_1, \qquad C_3 = -4qe^{k_2\eta_1}\cos mt_1 \cos mt_2 \cos m\,(t_2 - t_1) \tag{2.10}$$

В области $P_{13}P_{14}P_{15}$ (область (4)) искомые функции $f_1^{(4)}(\xi)$ и $f_2^{(4)}(\eta)$ определяются так же легко, как и функции (2.8) в области $P_7P_8P_9$

$$f_1^{(4)}(\xi) = f(\xi) + C_3e^{-k_2\xi}, \qquad f_2^{(4)}(\eta) = f(\eta) + C_3e^{-k_2\eta} \tag{2.11}$$

Сопоставляя (2.4) и (2.11), убеждаемся, что полученное решение во всяком случае не является периодическим, так как $C_3 \neq 0$.

3. Покажем теперь, что в струе всегда образуются предельные линии. Для этой цели рассмотрим решение в области, примыкающей к характеристикам P_8P_9 и P_8P_{10}, где появление предельной линии является наиболее вероятным.

Течение в выделенной области представляет собой простую волну, так что обычный способ исследования, состоящий в изучении якобиана $\Delta = \partial(\varphi, \psi)/\partial(v, \theta)$, здесь не применим. В этом случае следует воспользоваться другим условием существования предельной линии, которое было получено специально для простой волны в работе [12]. Оно состоит в выполнении равенства

$$\psi_\xi'(\xi, \eta) = 0 \tag{3.1}$$

в точках плоскости $\xi\eta$, образы которых в физической плоскости течения газа как раз и находятся на предельной линии.

Чтобы проверить выполнение условия (3.1), найдем значения функции $\psi_\xi'(\xi, \eta)$ в точках P_9 ($\xi = \xi_1$, $\eta = \eta_2$), P_{10} ($\xi = \xi_2$, $\eta=\eta_2$) и P_{11} ($\xi=\xi_1$, $\eta=\eta_2$). Если окажется, что две из определенных таким образом величин имеют разные знаки, то выполнение условия (3.1) и, следовательно, наличие предельной линии будут гарантированы.

На характеристиках P_8P_9 и $P_{10}P_{11}$ функция $\psi_\xi'(\xi, \eta)$ не имеет разрывов, поэтому для определения значения этой функции в P_9 воспользуемся (2.8) и для определения значений в P_{10} и P_{11} — решением (2.9).

Выражение для $\psi_\xi'(\xi, \eta)$ на основании (1.3) представим в удобном виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = -\frac{1}{2n\sin^2 mt}\left[mf_2'(\eta) - m\cos 2mtf_1'(\xi) + \frac{\sin 2mt}{2}f_1''(\xi)\right] \qquad (3.2)$$

Выражение для производной в точке P_9 имеем в виде

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)_{P_9} = \frac{2m^2q}{n}\operatorname{ctg} mt_1\left[1 + 2e^{k_2(\eta_1-\eta_2)}\operatorname{tg} mt_2 \sin 2m(t_2 - t_1)\right] \qquad (3.3)$$

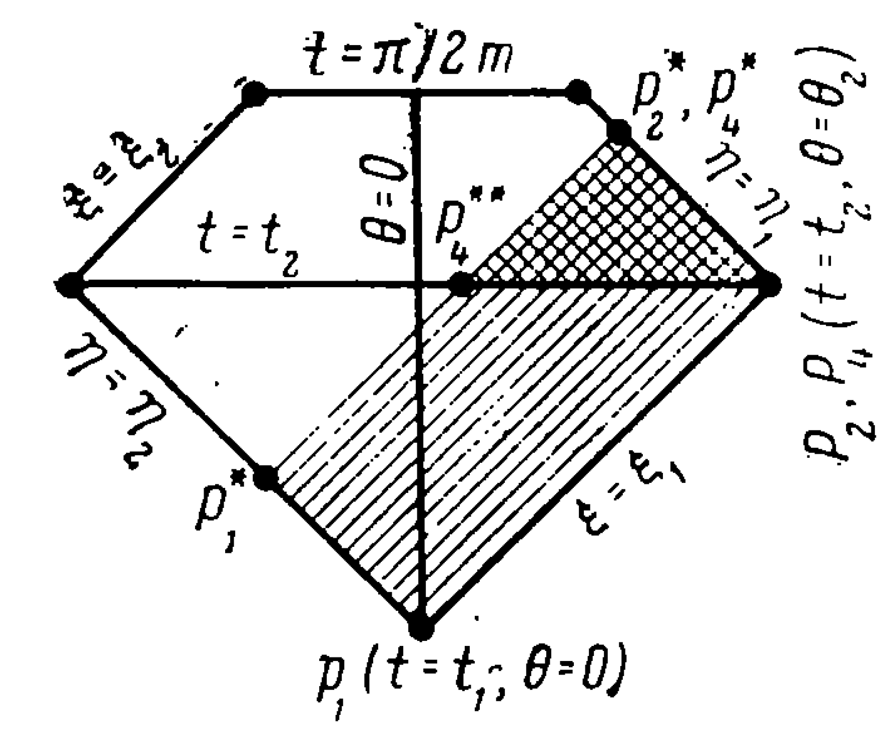
Отсюда видно, что исследуемая функция в P_9 всегда положительна ($t_2 > t_1$). В точке P_{11} имеем

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)_{P_{11}} = \frac{4m^2q}{n}e^{k_2(\eta_1-\eta_2)}\operatorname{ctg} mt_1 \operatorname{tg} mt_2 \sin 2m(t_2 - t_1) \qquad (3.4)$$

Это выражение принимает только положительные значения по той же причине, что и (3.3). В точке P_{10} имеем

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)_{P_{10}} = -\frac{4m^2q}{n}\,\frac{\cos mt_1\cos m(t_2 - t_1)}{\sin mt_2}\left[e^{k_2(\eta_1-\eta_2)} - 1\right] \qquad (3.5)$$

В отличие от (3.3) и (3.4) производная в точке P_{10} принимает существенно отрицательные значения, так как $\eta_1 > \eta_2$.



Фиг. 3

Проведенный анализ показывает, что условие существования предельной линии в простой волне с поперечной характеристикой P_8P_9 выполняется и, следовательно, непрерывное потенциальное течение на некотором конечном расстоянии от среза сопла становится невозможным. Этот вывод верен как при малых перепадах давления, так и при больших его значениях. Таким образом, условие работы [5] о малости перепадов давления снимается — оно было связано только с принятым в этой статье методом доказательства.

Следует, однако, заметить, что при больших перепадах полученные непрерывные решения могут потерять физический смысл еще раньше. В качестве примера рассмотрим решение в области $P_4P_5P_6$ и покажем, что при достаточно большом значении t_2 на некоторой линии в этой области обязательно будет выполняться условие существования предельной линии $\Delta = 0$.

Якобиан Δ с помощью основных уравнений [9]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \sqrt{K_1}\,\frac{\partial\psi}{\partial t}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \sqrt{K_1}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad (3.6)$$

которые равносильны системе (1.1), можно представить в форме

$$\Delta = \left[K_1^{1/2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2 - K_1^{-1/2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2\right]\frac{dt}{dv} \qquad (3.7)$$

Отсюда следует, что $\Delta \leqslant 0$ на P_4P_6, где $\psi = \mathrm{const}$.

Пользуясь далее решением (2.5), найдем значение якобиана в точке P_5. Для этого преобразуем выражение для Δ к удобному виду

$$\Delta = \frac{1}{\sin^2 2mt}\left[mf_1'(\xi) - m\cos 2mtf_2'(\eta) + \frac{\sin 2mt}{2}f_2''(\eta)\right]\times$$
$$\times\left[mf_2'(\eta) - m\cos 2mtf_1'(\xi) + \frac{\sin 2mt}{2}f_1''(\xi)\right]\frac{dt}{dv} \qquad (3.8)$$

После подстановки (2.5) в (3.8) получаем: (3.9)

$$\Delta_{P_5} = \frac{4m^4q^2}{\sin^2 2mt_3}[\sin 2mt_2 - \cos 2mt_3(\sin 2mt_1 + \sin 2mt_2) - \sin 2mt_3(\cos 2mt_1 + 2\sin 2mt_1 \operatorname{tg} mt_2 + 2\sin^2 mt_2)][\sin 2mt_1 + \sin 2mt_2 + \sin 2m(t_3 - t_2)]\frac{dt}{dv}$$

Если зафиксировать t_1 и увеличивать t_2, то t_3 также возрастает. При $t_3 \to \pi/2m$ последний член в первой квадратной скобке (3.9) становится сколько угодно малым, а второй член отрицательным. Следовательно, при t_3, достаточно близком к $\pi/2m$, якобиан в точке P_5 — величина положительная. Так как Δ в области $P_4P_5P_6$ — функция непрерывная, то на некоторой линии она меняет знак, а это значит, что условие существования предельной линии в рассматриваемой области выполняется.

4. Если параметры t_1 и t_2 не удовлетворяют неравенству (1.9) и

$$t_2 \geqslant \frac{\pi}{4m} + \frac{t_1}{2} \qquad \left(t_1 < \frac{\pi}{2m}\right) \tag{4.1}$$

то справа от характеристики P_4P_5 предельная линия образуется всегда.

Для доказательства выделим область $P_4P_4^*P_4^{**}$, ограниченную отрезком прямой $P_4P_4^{**}$ $(t = t_2)$ и отрезками характеристик $P_4P_4^*$ и $P_4^*P_4^{**}$, причем характеристика $P_4^*P_4^{**}$ проведена так, чтобы в P_4^* значение переменной t было достаточно близким к $\pi/2m$ (фиг. 3).

Искомыми функциями, определяющими решение в выделенной области, будут функции (2.5). К этому результату придем, если вначале решим краевую задачу в области $P_1P_2P_2^*P_1^*$ по данным (2.3), а затем определим значения ψ на поперечной характеристике в простой волне.

Пользуясь (2.5), можно найти значение якобиана Δ в точке P_4^*. Если t в P_4^* достаточно близка к $\pi/2m$, то легко убедиться, что в этой точке Δ будет величиной положительной. Принимая во внимание, что на $P_4P_4^{**}$ (свободная поверхность) Δ имеет противоположный знак ($\Delta < 0$), убеждаемся в выполнении на некоторой линии условия $\Delta = 0$.

Поступила 19 V 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Prandtl L. Uber die stationären Wellen in einem Gasstrahl. Phys. Zeits, 1904, 5, N 19.
2. Hasimoto Z. Plane Jet of Gas emitted from a Nozzle with Supersonic Velocity. J. Phys. Soc. Japan, 1953, Vol., 8, N 3.
3. Христианович С. А. Приближенное интегрирование уравнений сверхзвуковых течений газа. ПММ, 1947, т. XI, вып. 2.
4. Курант Г., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. ИИЛ, 1950.
5. Похожаев С. И. Об одном вопрсе сверхзвукового истечения. Труды Моск. физико-технич. ин-та. «Исследования по механике и прикл. математике», вып. 1, Оборонгиз, 1958.
6. Lin C. C. On a perturbation theory based on the method of characteristics. J. Math. and Phys., 1954, vol. 33, № 2.
7. Домбровский Г. А. О периодичности струи, выходящей из симметричного сопла на расчетном режиме. ДАН, 1957, 113, № 1.
8. Домбровский Г. А. К вопросу об интегрировании уравнений плоскопараллельного установившегося потенциального движения сжимаемой жидкости. ДАН, 1955, 103, № 1.
9. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, 1950.
10. Hasimoto Z. A note on cross Mach lines in simple waves in the plane supersonic flow. J. Phys. Soc. Japan, vol. 8, № 2, 1953.
11. Домбровский Г. А. Приближенное аналитическое решение плоской задачи сверхзвуковой газовой динамики. Сб. ст. под ред. Л. И. Седова «Теоретическая гидромеханика», Оборонгиз, 1954, № 12, вып. 4.
12. Hasimoto Z. On the limiting line in a simple wave. J. Phys. Soc. Japan, 1953, vol. 8, № 2.