Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБТЕКАНИЕ КРЫЛЬЕВ, ЛЕТЯЩИХ СО СКОЛЬЖЕНИЕМ

М. Ф. Притуло

(Москва)

Дается метод определения дополнительной нагрузки, вызванной скольжением. Метод основан на исследовании нелинейного уравнения для потенциала скоростей. Разобран случай, когда при $M > 1$ метод малого параметра приводит во втором приближении к решению с бесконечно большими первыми производными. Решен ряд задач об обтекании крыльев, летящих со скольжением.

При расчете давления на скользящем крыле, летящем со сверхзвуковой скоростью, обычно решается линеаризированное уравнение для потенциала. Для линеаризации уравнения достаточно только предположить, что угол атаки крыла мал. Никаких ограничений на величину угла скольжения не налагается. При этом задача несколько более сложна, чем задача об обтекании без скольжения крыла, симметричного относительно продольной оси. Однако, как правило, интересны те случаи, когда порядки величин угла скольжения и угла атаки одинаковы. Тогда при малом угле атаки дополнительное давление, обусловленное скольжением, является величиной второго порядка малости по сравнению с давлением на крыле, обтекаемом без скольжения. При определении дополнительного давления это позволяет рассматривать малые изменения формы обтекаемого тела. Такое упрощение граничных условий существенно при определении решения только в том случае, когда решение в явном виде может быть записано как функция местных углов атаки. В тех же случаях, когда это невозможно (например, при исследовании обтекания крыла с дозвуковыми передними кромками), предположение малости углов скольжения не может упростить задачу.

При одинаково малых углах атаки и скольжения возможен и другой путь. Так, можно попытаться сохранить области, в которых заданы граничные условия, такими, как и в задаче об обтекании крыла без скольжения. Это достигается выбором системы координат, связанной с обтекаемым телом. Дифференциальное уравнение, определяющее решение задачи, может при этом измениться.

1. Уравнение для добавочного потенциала и граничные условия в системе координат, связанной с крылом. Пренебрегая малыми третьего порядка, будем считать течение потенциальным не только при дозвуковых, но и при сверхзвуковых скоростях. Пусть Φ — потенциал скоростей. Определяя добавочный потенциал скоростей φ равенством

$$\varphi = \frac{1}{U_\infty}(\Phi - Ux) - \alpha y - \beta z$$

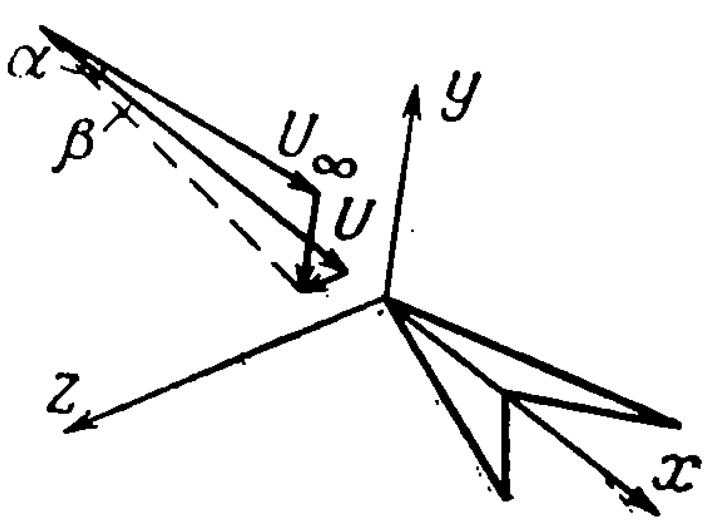
(условные обозначения показаны на фиг. 1), получим для него следующее уравнение:

$$(M^2 - 1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -M^4(\varkappa + 1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 2M^2(M^2 - 1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} -$$

$$- 2M^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - 2M^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - 2M^2\alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - 2M^2\beta\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z} \qquad (1.1)$$

В уравнении (1.1) число M соответствует скорости набегающего потока U_∞.

С той же точностью запишем граничные условия на крыле. Поверхность крыла является только частью плоскости $y = 0$. Условие непротекания газа через эту поверхность имеет вид:



Фиг. 1

$$\alpha + \partial\varphi / \partial y = 0 \tag{1.2}$$

Видно, что граничные условия на крыле не зависят от угла скольжения.

Применяя к уравнению (1) метод малого параметра, положим $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_2' + \ldots$ (индекс внизу указывает порядок величины). Величины второго порядка малости представлены суммой двух членов, один из которых — φ_2 равен величине второго порядка малости в потенциале скоростей вокруг крыла, обтекаемого без скольжения; функции φ_1, φ_2 и φ_2' удовлетворяют следующим уравнениям:

$$(M^2 - 1)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} = 0 \tag{1.3}$$

$$(M^2 - 1)\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2} = -M^4(\varkappa + 1)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} +$$

$$+ 2M^2(M^2 - 1)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - 2M^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - 2M^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - 2M^2\alpha\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y} \tag{1.4}$$

$$(M^2 - 1)\frac{\partial^2\varphi_2'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi_2'}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi_2'}{\partial z^2} = -2M^2\beta\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial z} \tag{1.5}$$

На поверхности крыла

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = -\alpha, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_2'}{\partial y} = 0 \tag{1.6}$$

Вместе с дифференциальным уравнением для добавочного потенциала φ в системе координат, связанной с крылом, изменится и формула для вычисления давления. С точностью до малых второго порядка включительно

$$p^0 = \frac{p - p_\infty}{{}^1/_2\,\rho_\infty U_\infty{}^2} = -2\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (M^2 - 1)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 - 2\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial y} - 2\beta\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.7}$$

В первом приближении

$$p^\circ = -2\partial\varphi_1 / \partial x \tag{1.8}$$

Из (1.3), первой ф-лы (1.6) и (1.8) следует, что наличие малого угла скольжения приводит к изменению скоростей и давления на малые второго порядка. Сумма $\varphi_1 + \varphi_2$ есть решение задачи об обтекании крыла без скольжения. Добавочное давление, обусловленное скольжением, определяется формулой

$$p_\beta{}^0 = -2\frac{\partial\varphi_2'}{\partial x} - 2\beta\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \tag{1.9}$$

Формула (1.9) показывает, что на вихревой пелене, соответствующей крылу, обтекаемому без скольжения

$$\frac{\partial \varphi_2'}{\partial x} = -\beta \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \tag{1.10}$$

т. е. производная $\partial\varphi_2'/\partial x$ терпит разрыв при переходе через вихревую пелену.

Если решение задачи об обтекании крыла без скольжения известно, то для определения дополнительного давления, вызванного скольжением, необходимо решить неоднородное уравнение (1.5) при условиях третьей ф-лы (1.6) и (1.10).

2. Определение при $M > 1$ потенциала, обладающего конечными первыми производными. При сверхзвуковых скоростях набегающего потока задача отыскания решения уравнения (1.5) осложняется тем, что член, стоящий в правой части уравнения, в целом ряде случаев вблизи некоторых поверхностей принимает бесконечно большие значения. Так, на треугольном крыле с дозвуковыми передними кромками при приближении к характеристической поверхности, отделяющей возмущенный поток от невозмущенного, вторые производные потенциала φ стремятся к бесконечности как

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-(M^2-1)(y^2+z^2)}}$$

Вследствие этого оказывается сомнительным предположение о том, что $\beta\partial^2\varphi_1/\partial x\partial z$ является малой величиной второго порядка, которое существенно при выводе уравнения (1.5). То же самое надо сказать и о первых производных φ_2' — дополнительных скоростях, возникающих при скольжении, которые в целой области течения могут принимать очень большие значения.

Особенности такого рода были рассмотрены Лайтхиллом. Им был дан усовершенствованный метод малого параметра, который пригоден в тех случаях, когда обычный процесс является расходящимся. Как это и делается в работе [1], введем новые координаты

$$x_1 = x + \nu_1(x, y, z), \quad y_1 = y + \nu_2(x, y, z), \quad z_1 = z + \nu_3(x, y, z) \tag{2.1}$$

где ν_1, ν_2, ν_3 — малые величины первого порядка. В дальнейшем ограничимся рассмотрением только первых двух членов ряда по малому параметру, представляющего собой решение уравнения (1.1). Цель преобразований (2.1) — так выбрать ν_1, ν_2 и ν_3, чтобы при применении в новых координатах к уравнению для φ метода малого параметра правая часть уравнения, определяющего второе приближение, была бы всюду конечной величиной.

Одновременно с преобразованием (2.1) введем вместо потенциала функцию ψ по формуле

$$\psi = \varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\nu_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\nu_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\nu_3 \tag{2.2}$$

Заменяя в уравнении (1.1) производные φ по x, y, z производными ψ по x_1, y_1, z_1 и отбрасывая члены третьего и более высоких порядков, вместо уравнения (1.1) получим

$$(M^2-1)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y_1^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z_1^2}=-M^4(\varkappa+1)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+$$
$$+2M^2(M^2-1)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+2M^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial y_1}\frac{\partial\psi}{\partial y_1}-$$
$$-2M^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial z_1}\frac{\partial\psi}{\partial z_1}-2M^2\alpha\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial y_1}-2M^2\beta\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial z_1} \qquad (2.3)$$

Инвариантность уравнения (1.1) относительно преобразований (2.1) и (2.2) указывает на связь между частными решениями уравнений (1.4) и (1.5) и такими преобразованиями независимых переменных, которые в новой системе координат приводят уравнение для потенциала к линейному. Если

$$\nu_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\nu_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\nu_3\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\varphi_2' \qquad (2.4)$$

то в уравнении (1.1), записанном в новых переменных, последний член пропадет. (Под $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$ и $\partial\varphi/\partial z$ следует подразумевать величины только первого порядка малости, которые уже найдены при решении уравнения (1.3).) Первые и вторые производные ν_1, ν_2 и ν_3 особенностей иметь не должны. Появление особенностей при дифференцировании левой части (2.4) связано с разрывами величин вторых производных φ_1. Функции ν_1, ν_2 и ν_3 можно также выбрать из условия

$$\nu_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\nu_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\nu_3\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-(\varphi_2+\varphi_2')$$

В методе Лайтхилла преобразования (2.1) определяются из условия обращения в ноль правой части уравнения для φ_2 только на поверхности разрыва производных потенциала. Это приводит к росту числа членов в правой части уравнения для ψ_2. Только что записанные условия позволяют определить такие преобразования, которые упрощают задачу определения решения, обладающего конечными производными. Кроме того, инвариантность уравнения (1.1) относительно преобразований (2.1) и (2.2) позволяет дать, отправляясь от решений уравнений (1.3), (1.4), (1.5), простой способ определения потенциала скоростей, который излагается ниже.

Пусть в первом приближении скорости в некоторой области непрерывны, а их производные разрывны. Тогда дополнительно к условиям (1.6) необходимо удовлетворить только условию непрерывности потенциала. Может оказаться, что потенциал задан как раз на поверхности разрыва вторых производных. Этот последний случай является и общим, так как в рассмотренных до сих пор задачах поверхностями разрыва вторых производных были характеристические поверхности уравнения (1.3), что позволяет рассматривать их как границу области, в которой определяется решение. Итак, рассмотрим задачу об определении решения уравнения (1.1) внутри некоторой области, вся граница которой или ее часть являются областями разрыва вторых производных первого приближения к точному решению. На границе области задано только значение потенциала. Обозначим через φ_1, φ_2 и φ_2' решения уравнений (1.3), (1.4), (1.5) при заданных граничных условиях. Пусть, далее, φ есть решение уравнения для добавочного потенциала в системе координат x_1, y_1, z_1, выбранной так, что первые производные добавочного потенциала, определенного методом малого параметра, конечны. В сумме решений уравнений (1.3), (1.4), (1.5) изменим условные обозначения — вместо x, y, z напишем x_1, y_1, z_1. Тогда эта сумма будет решением уравнения (2.3), т. е.

$$\varphi_1(x_1, y_1, z_1) + \varphi_2(x_1, y_1, z_1) + \varphi_2'(x_1, y_1, z_1) = \psi(x_1, y_1, z_1)$$

По формуле (2.2) имеем

$$\varphi = \psi(x_1\, y_1, z_1) - \nu_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \nu_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \nu_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \tag{2.5}$$

В первом приближении в системе координат, определенной формулами (2.1), уравнение для φ_1 и граничные условия имеют один и тот же вид. Это и позволяет записать в правой части равенства (2.5)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \quad \text{вместо} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Определенный равенством (2.5) потенциал φ удовлетворяет уравнению для добавочного потенциала и обладает конечными первыми производными. Покажем, что φ удовлетворяет тем же граничным условиям, что и $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_2'$. Для этого в тех областях, где производные φ_1, φ_2 и φ_2' конечны, разложим эти величины в ряд по степеням ν_1, ν_2, ν_3. Пренебрегая малыми третьего порядка и выше, получим, что

$$\varphi = \varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, y, z) + \varphi_2'(x, y, z) \tag{2.6}$$

Первая производная правой части (2.5) конечна при любых x_1, y_1, z_1. Поэтому соотношение (2.6) будет справедливо и на поверхности разрыва вторых производных. Таким образом, φ действительно является решением поставленной задачи, а формула (2.5) дает простой способ его определения через решение полученное обычным методом малого параметра. Следует отметить, что в только что разобранном случае при выборе ν_1, ν_2 и ν_3 на эти величины можно наложить те же условия, что и в работе [1], т. е. потребовать, чтобы правая часть уравнения для потенциала второго порядка исчезала бы только на поверхности разрыва. Преобразования (2.1) определяются единственным образом только вблизи этих поверхностей и только вблизи этих поверхностей формула (2.5) дает для величины скоростей значения, существенно отличающиеся от первых производных потенциала, полученного обычным методом малого параметра.

3. Примеры. *1°. Сверхзвуковые скорости.* Рассмотрим крыло с прямолинейными дозвуковыми передними кромками (фиг. 2). Задние кромки крыла будем считать сверхзвуковыми, и условие (1.10) поэтому принимать во внимание не будем. Легко видеть, что решением уравнения (1.5) при условии (1.6) и $\varphi_2' = 0$ на поверхности $x^2 = (M^2 - 1)(y^2 + z^2)$ является

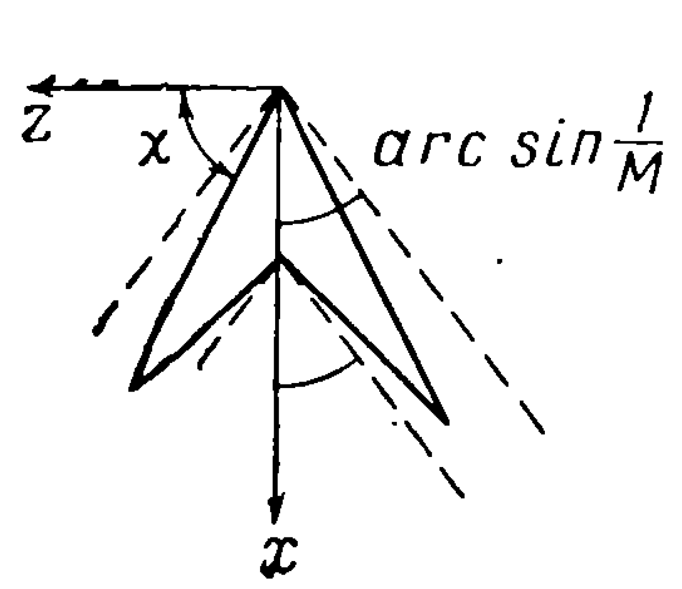
$$\varphi_2' = \frac{M^2\beta}{\operatorname{tg}^2\chi - M^2 + 1}\left(x\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \operatorname{tg}^2\chi \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} z\right) \tag{3.1}$$

Как это и следует из предыдущего раздела, значения φ_2', определяемые формулой (3.1), могут быть непосредственно использованы для расчета давления на крыле. При $y = 0$, $\varphi_2' = 0$.

Используя решение (3.1), нетрудно найти также преобразование координат, приводящее уравнение (1.5) к однородному. Очевидно, для этого нужно положить

$$\nu_1 = \frac{M^2\beta \operatorname{tg}\chi}{\operatorname{tg}^2\chi - M^2 + 1} z, \qquad \nu_2 = 0, \qquad \nu_3 = \frac{M^2\beta}{\operatorname{tg}^2\chi - M^2 + 1} x$$

Граничные условия (1.6) и $\varphi_2' = 0$ при $x = \sqrt{(M^2 - 1)(y^2 + z^2)}$ в переменных x, y, z имеют тот же вид. Следовательно, $\varphi_2'(x_1, y_1, z_1) = 0$ и $\varphi(x_1, y_1, z_1)$ есть решение задачи об обтекании того же крыла без скольжения. (Преобразования (2.1) в этом случае не изменяют величину угла стреловидности передних кромок.) При переходе от координат x_1, y_1, z_1 к физическим в потенциале появляется член, зависящий от β. Величина его совпадает с φ_2', определяемым формулой (3.1).



Фиг. 2

2°. *Дозвуковые скорости.* Пусть передняя кромка крыла является отрезком прямой, совпадающей с осью z. В несжимаемой жидкости ($M = 0$) φ_2' определяется однородным уравнением и граничными условиями (1.6) и (1.10). Решением этого уравнения является

$$\varphi_2' = -\beta \int_0^x \frac{\partial\varphi(\xi, y, z)}{\partial z} d\xi$$

Условие $\partial\varphi_2'/\partial x = -\beta\partial\varphi_1/\partial z$ выполнено не только на вихревой пелене, но и на крыле. Поэтому в несжимаемой жидкости дополнительное давление на поверхности крыла равно нулю.

В сжимаемом газе к только что записанному выражению для φ_2' необходимо добавить член

$$\frac{M^2}{1 - M^2}\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \int_0^x \frac{\partial\varphi}{\partial z} d\xi\right),$$

который является решением уравнения (1.5) с нулевыми граничными условиями на крыле и вихревой пелене.

Изменение направления вихревой пелены на угол β приводит к изменению местных углов атаки на величину порядка $\alpha_i\beta$ (α_i — индуктивный угол атаки). При обтекании крыльев большого удлинения несжимаемой жидкостью, пренебрегая малыми порядка α_i, β, можно положить $\varphi_2' \approx 0$. Это приведет к известным формулам подсчета распределения нагрузки по размаху крыльев, летящих со скольжением [2]. С той же точностью для крыльев с прямолинейными передними кромками частное решение (3.1) позволяет учитывать влияние сжимаемости воздуха.

Поступила 24 XI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. J. The Shock Strength in Supersonic Conical Fields. Philos. Mag., 1949, vol. 40, № 311.
2. Queijo M. J. Theoretical span load distributions and rolling moments for sideslipping wings of arbitarary plan form in incompressible flow. NACA Report, 1956. № 1269.