

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ

В. И. Ягодкин

(Москва)

Устойчивость течений вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с параллельными стенками в случае симметричных профилей скорости детально изучена в работах [1,2]. Возможны течения, профили скорости которых не являются симметричными. Такие течения возникают, например, в каналах с проницаемыми стенками, через которые подается жидкость с различными скоростями [3].

В данной работе анализируется устойчивость почти параллельных течений с несимметричными профилями скорости как в плоском, так и в кольцевом каналах методом, развитым в работе [1]. Усложнение задачи состоит в том, что несимметрия профиля скорости не позволяет рассматривать лишь симметричные или антисимметричные возмущения. В анализе используются результаты математических работ о поведении асимптотических решений уравнения Орра-Зоммерфельда [4,5].

§ 1. Проблема устойчивости параллельных течений приводится к решению уравнения Орра-Зоммерфельда для амплитуды функции тока возмущенного движения φ

$$(D^2 - \alpha^2)^2 \varphi = i\alpha R [(w - c)(D^2 - \alpha^2) - D^2 w] \varphi \quad \left(D^2 = \frac{d^2}{dy^2} \right) \quad (1.1)$$

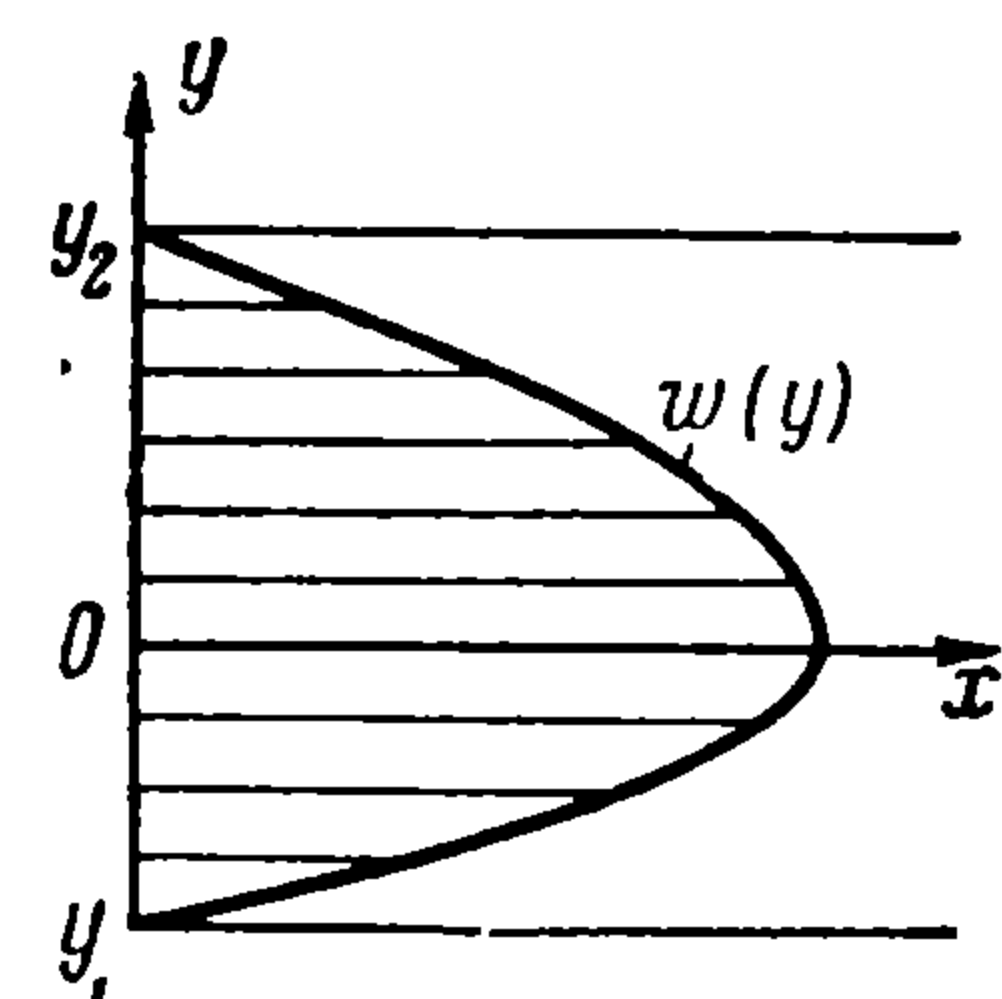
Здесь y — безразмерная координата, отсчитываемая по нормали к стенкам канала, $\alpha = 2\pi H/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны возмущения, H — ширина канала; $R = UH/\nu$ — число Рейнольдса потока, соответствующее максимальной скорости U в данном сечении канала, ν — кинематическая вязкость жидкости; $w = u/U$ — безразмерный профиль скорости; c — безразмерная волновая скорость, которую будем считать действительной величиной, рассматривая лишь нейтральные колебания.

Удовлетворяя граничным условиям

$$\varphi = \varphi' = 0 \quad \text{при } y = y_1 \text{ и } y = y_2 \quad (1.2)$$

получим уравнение собственных значений

$$\begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{21} & \Phi_{31} & \Phi_{41} \\ \Phi_{12} & \Phi_{22} & \Phi_{32} & \Phi_{42} \\ \Phi_{11}' & \Phi_{21}' & \Phi_{31}' & \Phi_{41}' \\ \Phi_{12}' & \Phi_{22}' & \Phi_{32}' & \Phi_{42}' \end{vmatrix} = 0 \quad (1.3)$$



Фиг. 1

где $\Phi_{kl} = \Phi_k(y_l)$ ($k = 1, 2, 3, 4$; $l = 1, 2$) — значения линейно-независимых решений уравнения (1.1) в точках y_1 и y_2 .

При больших значениях параметра αR два решения уравнения (1.1), которые обозначим через φ_1 и φ_2 , с достаточной точностью могут считаться решениями вырожденного уравнения

$$(w - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - w'' \varphi = 0 \quad (1.4)$$

получающегося из (1.1) при $\alpha R \rightarrow \infty$. Другие два решения — φ_3 и φ_4 существенно зависят от сил вязкости и их асимптотические выражения имеют вид

$$\varphi_3 = A(y) e^{-Y(y)}, \quad \varphi_4 = B(y) e^{Y(y)} \quad (Y(y) = \int_{y_{c1}}^y \sqrt{i\alpha R(w-c)} dy) \quad (1.5)$$

где функции $A(y)$ и $B(y)$ слабо меняются по сравнению с экспоненциальными множителями, а y_{c1} — координата критической точки, лежащей возле y_1 . Относительно функции $w(y)$ будем считать, что она монотонно возрастает (фиг. 1) от точки y_1 до $y=0$, а затем монотонно убывает до точки y_2 ; $w(y_1) = w(y_2) = 0$ и поэтому уравнение $w(y) = c$ имеет два действительных корня — y_{c1} и y_{c2} . Выражения (1.5) используем для упрощения уравнения собственных значений (1.3). Обозначим

$$P = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{i\alpha R(w-c)} dy, \quad A_l = A(y_l), \quad B_l = B(y_l) \quad (l=1,2) \quad (1.6)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{32}}{\varphi_{31}} &= \frac{A_2}{A_1} e^{-P}, & \frac{\varphi_{31}'}{\varphi_{31}} &= -\sqrt{i\alpha R(-c)} + \frac{A_1'}{A_1} \\ \frac{\varphi_{32}'}{\varphi_{31}} &= \left\{ -\sqrt{i\alpha R(-c)} \frac{A_2}{A_1} + \frac{A_2'}{A_1} \right\} e^{-P}, & \frac{\varphi_{41}}{\varphi_{42}} &= \frac{B_1}{B_2} e^{-P} \\ \frac{\varphi_{41}'}{\varphi_{42}} &= \left\{ \sqrt{i\alpha R(-c)} \frac{B_1}{B_2} + \frac{B_1'}{B_2} \right\} e^{-P}, & \frac{\varphi_{42}'}{\varphi_{42}} &= \sqrt{i\alpha R(-c)} + \frac{B_2'}{B_2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для оценки порядка величины этих отношений заметим, что действительная часть интеграла $\text{Re } P = O(\sqrt{\alpha R})$. Деля третий столбец определителя (1.3) на φ_{31} , а четвертый на φ_{42} и считая αR столь большим, что все отношения (1.7), кроме $\varphi_{31}'/\varphi_{31}$ и $\varphi_{42}'/\varphi_{42}$, очень малы, получим

$$\frac{\varphi_{31}}{\varphi_{31}'} \frac{\varphi_{42}}{\varphi_{42}'} f_4 - \frac{\varphi_{31}}{\varphi_{31}'} f_3 - \frac{\varphi_{42}}{\varphi_{42}'} f_2 + f_1 = 0 \quad (1.8)$$

Здесь

$$f_1 = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix}, \quad f_2 = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12}' \\ \varphi_{21} & \varphi_{22}' \end{vmatrix}, \quad f_3 = \begin{vmatrix} \varphi_{11}' & \varphi_{12} \\ \varphi_{21}' & \varphi_{22} \end{vmatrix}, \quad f_4 = \begin{vmatrix} \varphi_{11}' & \varphi_{12}' \\ \varphi_{21}' & \varphi_{22}' \end{vmatrix} \quad (1.9)$$

Эти величины составлены лишь из решений вырожденного уравнения (1.4).

При вычислении собственных значений из уравнения (1.8) необходимо более точно выразить отношения $\varphi_{31}/\varphi_{31}'$ и $\varphi_{42}/\varphi_{42}'$, чем из формул (1.7). Выражения функций φ_3 и φ_4 вблизи стенок получают путем разложения решений уравнения (1.1) в ряды $\varphi = \chi^{(0)} + \varepsilon \chi^{(1)} \dots$ по степеням малого параметра $\varepsilon = (\alpha R)^{-1/2}$ и заменой масштаба $\eta = (y - y_c)/\varepsilon$, где y_c — координата соответствующей критической точки. Нулевые члены разложения являются решениями уравнения Стокса

$$w_c' \eta \chi^{(0)''} + i \chi^{(0)IV} = 0 \quad (1.10)$$

где w_c' — наклон профиля скорости в критической точке.

В работах [4,5] показано, что асимптотические решения уравнения Орра-Зоммерфельда остаются справедливыми в комплексной области y , содержащей точки y_1 и y_2 , если действительная часть интеграла $Y(y)$

монотонно возрастает при изменении y от y_1 до y_2 . Таким образом, $\operatorname{Re} Y(y) \geq 0$ при $y \geq y_{c1}$ и в силу (1.5) решение φ_3 должно убывать с приближением y к y_2 , а φ_4 , наоборот, — возрастать. Поэтому в качестве приближенных решений φ_3 и φ_4 следует взять те решения уравнения (1.10), которые изменяются указанным образом. Такими решениями будут

$$\varphi_3 \approx \chi_1^{(0)}, \quad \varphi_4 \approx \chi_2^{(0)}$$

где

$$\chi_l^{(0)} = \int_{\theta}^{\eta} \int_{\theta}^{\eta} V \bar{\zeta} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (i\alpha_{0l} \zeta)^{3/2} \right] d\zeta d\eta, \quad \alpha_{0l} = (w_{cl}')^{1/3} \quad \left(\begin{array}{l} \theta = (-1)^{l+1} \infty \\ l = 1, 2 \end{array} \right) \quad (1.11)$$

Здесь $H_{1/3}^{(1)}$ — функция Ханкеля 1-го рода. Тогда получим

$$\frac{\varphi_{31}}{\varphi_{31}'} \approx \frac{\chi_{11}^{(0)}}{\chi_{11}^{(0)'}}, \quad \frac{\varphi_{42}}{\varphi_{42}'} \approx \frac{\chi_{22}^{(0)}}{\chi_{22}^{(0)'}}$$

Здесь

$$\frac{\chi_{ll}^{(0)}}{\chi_{ll}^{(0)'}} = (y_l - y_{cl}) F(z_l), \quad z_l = -\alpha_{0l} \eta_l, \quad \eta_l = \frac{y_l - y_{cl}}{\varepsilon} \quad (l = 1, 2) \quad (1.12)$$

$$F(z) = \int_{\infty}^{-z} \int_{\infty}^{\eta} V \zeta H_{1/3}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (i\zeta)^{3/2} \right] d\zeta d\eta / \left(-z \int_{\infty}^{-z} V \bar{\zeta} H_{1/3}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (i\zeta)^{3/2} \right] d\zeta \right) \quad (1.13)$$

Таблицы функции Титъенса $F(z)$ имеются в [1, 6].

Решения φ_1 и φ_2 вырожденного уравнения находятся методом разложения их в ряды по волновому числу α

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (w - c) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} h_{2n}(y), & h_{2n}(y) &= \int_0^y a^{-1} \int_0^y a h_{2n-2}(y) dy dy, & h_0 &= 1 \\ \varphi_2 &= (w - c) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} k_{2n+1}(y), & k_{2n+1}(y) &= \int_0^y a^{-1} \int_0^y a k_{2n-1}(y) dy dy \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$a = (w - c)^2, \quad k_1 = \int_0^y a^{-1} dy$$

В этих выражениях интегрирование производится по комплексной плоскости y с обходом критических точек по следующему правилу: при $w_c' > 0$ путь интегрирования проходит снизу, а при $w_c' < 0$ — сверху от критической точки (фиг. 2). Это непосредственно следует из указанного условия монотонного роста $\operatorname{Re} Y(y)$.

Приведем еще значения производных φ_1' и φ_2'

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= w' \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} h_{2n}(y) + \frac{\alpha^2}{w - c} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} h_{2n+1}(y) \\ h_{2n+1}(y) &= \int_0^y a \int_0^y a^{-1} h_{2n-1}(y) dy dy, & h_1 &= \int_0^y a dy \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2' &= w' \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} k_{2n+1}(y) + \frac{1}{w - c} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} k_{2n}(y) \\ k_{2n}(y) &= \int_0^y a \int_0^y a^{-1} k_{2n-2}(y) dy dy, & k_0 &= 1 \end{aligned} \quad (1.17)$$

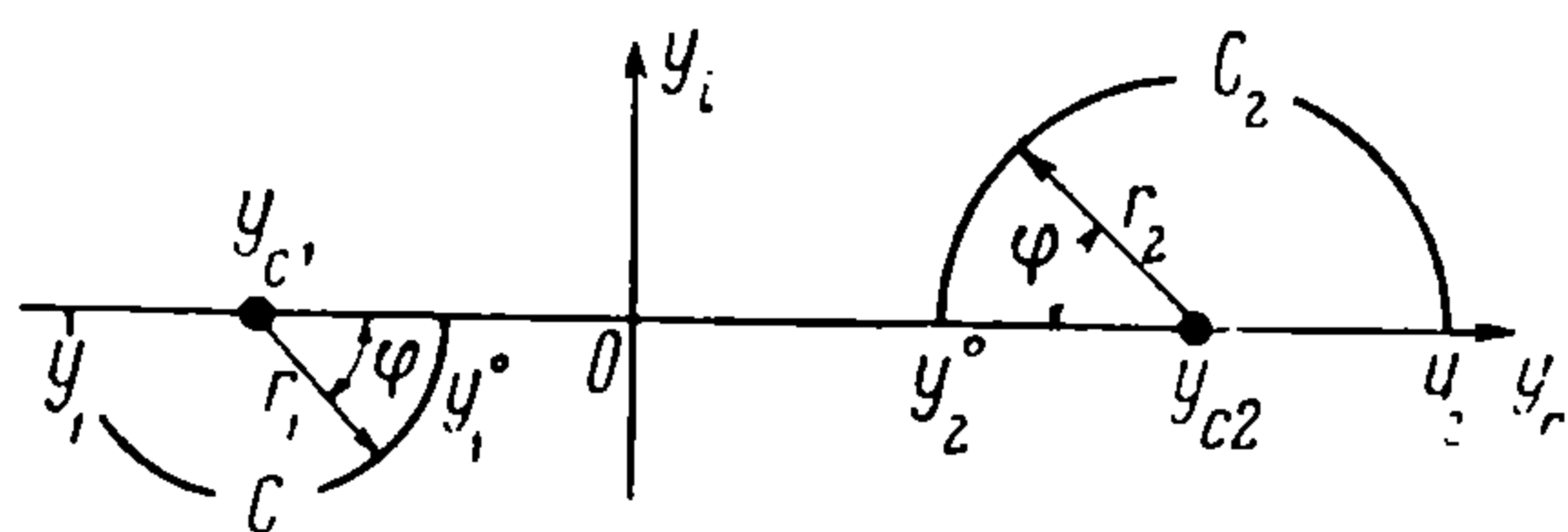
Для дальнейшего введем обозначения ($n = 0, 1, 2, \dots; l = 1, 2$)

$$h_n(y_l) = H_n^{(l)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} H_{2n}^{(l)} = H_+^{(l)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} H_{2n+1}^{(l)} = H_-^{(l)} \quad (1.18)$$

$$k_n(y_l) = K_n^{(l)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} K_{2n}^{(l)} = K_+^{(l)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} K_{2n+1}^{(l)} = K_-^{(l)} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} L_1 &= H_+^{(1)} K_-^{(2)} - H_+^{(2)} K_-^{(1)}, & L_2 &= H_+^{(1)} K_+^{(2)} - \alpha^2 H_-^{(2)} K_-^{(1)} \\ L_3 &= H_+^{(2)} K_+^{(1)} - \alpha^2 H_-^{(1)} K_-^{(2)}, & L_4 &= H_-^{(1)} K_+^{(2)} - H_-^{(2)} K_+^{(1)} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Тогда получим следующие выражения для f_k



Фиг. 2

$$\begin{aligned} f_1 &= c^2 L_1, & f_2 &= -w_2' c L_1 + L_2, \\ f_3 &= -w_1' c L_1 - L_3 \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$f_4 = w_1' w_2' L_1 - \frac{w_1'}{c} L_2 + \frac{w_2'}{c} L_3 + \frac{\alpha^2}{c^2} L_4$$

Преобразуем теперь уравнение (1.8), положив

$$y_l - y_{cl} = -\frac{c}{w_l'} (1 + \lambda_l) \quad (l = 1, 2) \quad (1.22)$$

где величины λ_l определяются заданным профилем скорости и значением c . (При малых c эти величины обычно малы по сравнению с единицей.)

Тогда вместо (1.12) можно написать

$$\frac{\chi_{ll}^{(0)}}{\chi_{ll}^{(0)'}} = -\frac{c}{w_l'} F_l \quad (F_l = (1 + \lambda_l) F(z_l)) \quad (1.23)$$

Если еще положить $\Phi_l = 1/(1 - F_l)$, то уравнение собственных значений (1.8) в результате соотношений (1.21) — (1.23) примет вид

$$c^2 w_1' w_2' L_1 + c w_1' L_2 (\Phi_2 - 1) - c w_2' L_3 (\Phi_1 - 1) + \alpha^2 L_4 (\Phi_1 - 1) (\Phi_2 - 1) = 0 \quad (1.24)$$

§ 2. Оценим входящие в L_k величины $H_+^{(l)}$, $H_-^{(l)}$, $K_+^{(l)}$ и $K_-^{(l)}$. Для этого сначала нужно оценить интегралы

$$\begin{aligned} H_{2n}^{(l)} &= \int_0^{y_l^1} a^{-1} \int_0^y a \int_0^y \dots \int_0^y a (dy)^{2n}, & H_{2n+1}^{(l)} &= \int_0^{y_l^1} a \int_0^y a^{-1} \int_0^y \dots \int_0^y a (dy)^{2n+1} \\ K_{2n}^{(l)} &= \int_0^{y_l^1} a \int_0^y a^{-1} \int_0^y \dots \int_0^y a^{-1} (dy)^{2n}, & K_{2n+1}^{(l)} &= \int_0^{y_l^1} a^{-1} \int_0^y a \int_0^y \dots \int_0^y a^{-1} (dy)^{2n+1} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уточним путь интегрирования. Будем обходить критические точки по полуокружностям C_l с радиусами $r_l = |y_l - y_{cl}|$, соответственно расположенным в нижней и верхней полуплоскостях комплексной плоскости y (фиг. 2), а остальную часть пути возьмем вдоль действительной оси. Пусть y_l^0 — точки пересечения действительной оси с полуокружностями C_l . Для оценки интегралов достаточно рассмотреть один интервал $(0, y_1)$. Пусть комплексная переменная $y = y(t)$ на пути интегрирования является функцией действительного параметра t — длины дуги вдоль пути интегрирования, отсчитываемой от начала координат. Тогда

$$\begin{aligned} t &= -y && \text{при } y_1^0 \leq y \leq 0 \\ t &= -y_1^0 - r_1 \varphi && \text{при } y - y_{c1} = r_1 e^{i\varphi}, \quad -\pi \leq \varphi \leq 0 \quad (dy/dt = -ie^{i\varphi}) \end{aligned}$$

Оценим модули интегралов. Очевидно,

$$|K_{2n}^{(1)}| \leq \int_0^{t_1} |a| \int_0^t |a^{-1}| \int_0^t \dots \int_0^t |a^{-1}| (dt)^{2n} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

так как

$$\left| \frac{dy}{dt} \right| = 1, \quad t_1 = -y_1^0 + \pi r_1, \quad r_1 = \frac{c}{w_1} (1 + \lambda_1)$$

Далее

$$\int_0^t |a^{-1}| t^k dt \leq |a^{-1}| t^{k+1} \quad (2.3)$$

Последнее соотношение очевидно при $0 \leq t \leq \vartheta_1 = -y_1^0$, так как на этом интервале величина $|a^{-1}| t^k$ возрастает. Если же $t \geq \vartheta_1$, то справедливо соотношение

$$\int_0^t |a^{-1}| t^k dt = \frac{\vartheta_1^k (1-\varphi)}{w_{c1}{}'^2 r_1} + O(|\ln r_1|) \quad (2.4)$$

которое получается путем разложения подынтегрального выражения в окрестности критической точки

$$|a^{-1}| = \frac{1}{w_{c1}{}'^2 r_1^2} \left| 1 - \frac{w_{c1}''}{w_{c1}'} r_1 e^{i\varphi} + \dots \right| \quad (t \geq \vartheta_1)$$

$$|a^{-1}| = \frac{1}{w_{c1}{}'^2 (t_{c1} - t)^2} \left[1 - \frac{w_{c1}''}{w_{c1}'} (t_{c1} - t) + \dots \right] \quad (t \leq \vartheta_1, t_{c1} = -y_{c1})$$

Из соотношения (2.2) в силу (2.3) следует

$$|K_{2n}^{(1)}| \leq \frac{t_1^{2n}}{(2n)!!} \quad (2.5)$$

Совершенно также получим

$$|K_{2n+1}^{(1)}| \leq \int_0^{t_1} |a^{-1}| \frac{t^{2n}}{(2n)!!} dt = \frac{\pi + 1}{w_{c1}{}'^2 r_1} \frac{\vartheta_1^{2n}}{(2n)!!} + O(|\ln r_1|) \quad (2.6)$$

Так как $|a| < 1$ и $\int_0^t |a| dt < 1$, то для $H_{2n+1}^{(1)}$ и $H_{2n}^{(1)}$ имеем

$$|H_{2n+1}^{(1)}| \leq \frac{t_1^{2n+1}}{(2n+1)!!} \quad (2.7)$$

$$|H_{2n}^{(1)}| \leq \int_0^{t_1} |a^{-1}| \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!!} dt = \frac{\pi + 1}{w_{c1}{}'^2 r_1} \frac{\vartheta_1^{2n-1}}{(2n-1)!!} + O(|\ln r_1|) \quad (2.8)$$

Оценим мнимые части интегралов. Так как [подынтегральные выражения комплексны лишь на C_1 , то, например,

$$\operatorname{Im} K_{2n}^{(1)} = \operatorname{Im} \int_0^{-\pi} i r_1 a e^{i\varphi} k_{2n-1} d\varphi \quad (2.9)$$

причем для k_{2n-1} можно написать

$$k_{2n-1} = k_{2n-1}(\vartheta_1) + \int_0^{\varphi} i r_1 a^{-1} e^{i\varphi} k_{2n-2} d\varphi \quad (2.10)$$

где $k_{2n-1}(\vartheta_1)$ — действительные величины, модули которых меньше модулей $|K_{2n-1}^{(1)}|$. Согласно формуле (2.10), из (2.9) следует

$$|\operatorname{Im} K_{2n}^{(1)}| < \sum_{j=1}^{2n} r_1^j |K_{2n-j}^{(1)}| |\operatorname{Im} J_j| \quad (2.11)$$

а также

$$|\operatorname{Im} K_{2n+1}^{(1)}| < \sum_{j=1}^{2n} r_1^j |K_{2n-j+1}^{(1)}| \cdot |\operatorname{Im} I_j| \quad (2.12)$$

и аналогично

$$|\operatorname{Im} H_{2n}^{(1)}| < \sum_{j=1}^{2n} r_1^j |H_{2n-j}^{(1)}| \cdot |\operatorname{Im} I_j| \quad (2.13)$$

$$|\operatorname{Im} H_{2n+1}^{(1)}| < \sum_{j=1}^{2n} r_1^j |H_{2n-j+1}^{(1)}| \cdot |\operatorname{Im} J_j| \quad (2.14)$$

где

$$J_j = i^j \int_0^{-\pi} a e^{i\varphi} \int_0^{\varphi} a^{-1} e^{i\varphi} \int_0^{\varphi} \dots \int_0^{\varphi} a^{(-1)^{j+1}} e^{i\varphi} (d\varphi)^j \quad (2.15)$$

$$I_j = i^j \int_0^{-\pi} a^{-1} e^{i\varphi} \int_0^{\varphi} a e^{i\varphi} \int_0^{\varphi} \dots \int_0^{\varphi} a^{(-1)^j} e^{i\varphi} (d\varphi)^j \quad (2.16)$$

Разлагая выражения a и a^{-1} в ряды, нетрудно получить

$$\operatorname{Im} J_1 = 0, \quad \operatorname{Im} I_1 = \frac{\pi}{r_1} \frac{w_{c1}''}{w_{c1}'^3}, \quad \operatorname{Im} J_2 = \operatorname{Im} I_2 = -\pi r_1 \frac{w_{c1}''}{3w_{c1}'} + O(r_1^2) \quad (2.17)$$

Кроме того, ясно, что

$$|J_3| = O(r_1^2), \quad |J_j| \leq O(1), \quad |I_j| \leq O(r_1^{-2}) \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (2.18)$$

Из формул (2.17) и оценок (2.18) получим следующие оценки рядов (2.11) — (2.14) по их главным членам

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} K_{2n}^{(1)}| &= O(r_1^3), & |\operatorname{Im} K_{2n+1}^{(1)}| &= O(1) \\ |\operatorname{Im} H_{2n}^{(1)}| &= O(1), & |\operatorname{Im} H_{2n+1}^{(1)}| &= O(r_1^3) \end{aligned} \quad (2.19)$$

В дальнейшем для приближенных расчетов понадобится формула

$$H_2^{(1)} = K_1^{(1)} H_1^{(1)} + O(\ln r_1) + iO(r_1^3) \quad (2.20)$$

которую можно получить, оценив модуль и мнимую часть интеграла

$$H_2^{(1)} - K_1^{(1)} H_1^{(1)} = \int_0^{y_1} a^{-1} \int_{y_1}^y a dy dy$$

методом, аналогичным приведенному выше.

Полученные результаты можно использовать для упрощения уравнения собственных значений (1.24), оставляя в нем члены заданного порядка [величины]. Рассмотрим наиболее простой случай, когда действительная часть уравнения (1.24) вычисляется с точностью $O(r_1)$, а мнимая — $O(r_1^2)$. При этом здесь будем предполагать, что $\alpha^2 = O(r_1)$, а $\Phi = O(1) + iO(r_1)$, как в случае симметричного профиля скорости [2].

Тогда для заданной точности следует положить

$$\begin{aligned} H_+^{(l)} &= 1 + \alpha^2 K_1^{(l)} H_{10}^{(l)}, & H_{10}^{(l)} &= \int_0^{y_l} w^2 dy \\ H_-^{(l)} &= H_{10}^{(l)}, & K_+^{(l)} &= 1, & K_-^{(l)} &= K_1^{(l)} \quad (l = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Причем действительная и мнимая части интеграла $K_1^{(l)}$ равны

$$K_{1r}^{(l)} = \frac{1}{w_l' c}, \quad K_{1i}^{(l)} = \pi \frac{w_{cl}''}{w_{cl}'^3}. \quad (2.22)$$

Используя эти выражения для вычисления величин L_k , соответственно из действительной и мнимой частей уравнения (1.24) окончательно получим

$$\frac{\alpha^2 H_{10}}{c} = \frac{w_1' \Phi_{2r} - w_2' \Phi_{1r}}{\Phi_{1r} \Phi_{2r}}, \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{w_2'}{w_1'} \left(\frac{\Phi_{1r}}{\Phi_{2r}} \right)^2 \quad (2.23)$$

где $H_{10} = H_{10}^{(2)} - H_{10}^{(1)}$, $Z_l = \Phi_{li} + c w_l' K_{li}^{(l)}$, Φ_{lr} и Φ_{li} — действительные и мнимые части функций Φ_l ($l = 1, 2$). В случае симметричного профиля скорости ($w_2' = -w_1'$, $\Phi_2 = \Phi_1$) эти формулы переходят в формулы, выведенные в работе [2]

$$\frac{\alpha^2 H_{10}}{2c} = \frac{w_1'}{F_{1r}}, \quad Z_1 = 0 \quad (2.24)$$

§ 3. В качестве примера расчета устойчивости течений с несимметричными профилями скорости в канале рассмотрим течение (фиг. 1)

$$w = \cos \frac{\pi}{2} \frac{y}{y_1} \quad (0 \geq y \geq y_1) \quad (y_1 + y_2 = 1) \quad (3.1)$$

$$w = \cos \frac{\pi}{2} \frac{y}{y_2} \quad (0 \leq y \leq y_2)$$

Такое течение образуется при втекании жидкости в канал через проницаемые стенки с постоянными скоростями v_{01} и v_{02} ($v_{01}/v_{02} = -y_2/y_1$) при условии, что величины $v_{01}H/\nu$ и $v_{02}H/\nu$ велики по сравнению с единицей. Аргументы функции Титьенса в этом случае равны

$$z_1 = y_1^{2/3} z, \quad z_2 = y_2^{2/3} z \quad \left(z = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{2/3} c \sqrt[3]{aR} \right) \quad (3.2)$$

Здесь ради упрощения считается, что наклон профиля скорости в критической точке равен наклону на соответствующей стенке канала, $w_{ci}' \approx w_i'$ (т. е. $\lambda_l = 0$, или $c^2 \ll 1$). Из уравнений (2.23) следует

$$\alpha^2 = \pi c \frac{y_1 \Phi_{1r} - y_2 \Phi_{2r}}{y_1 \Phi_{1r} y_2 \Phi_{2r}} \quad (3.3)$$

$$\pi c^2 = \frac{y_1 \Phi_{1r}^2 \Phi_{2i} - y_2 \Phi_{2r}^2 \Phi_{1i}}{y_1 F_{1r}^2 - y_2 F_{2r}^2}$$

Система уравнений (3.2) — (3.3) определяет нейтральную кривую в плоскости параметров α , R . Наибольший практический интерес представляет вычисление критического числа Рейнольдса R_* , при котором впервые происходит потеря устойчивости течения. Оценка величины R_* может быть получена без построения всей нейтральной кривой, если в соответствии с (3.2) приближенно считать, что R достигает минимума, когда величина c , рассматриваемая как функция z , — максимальна.

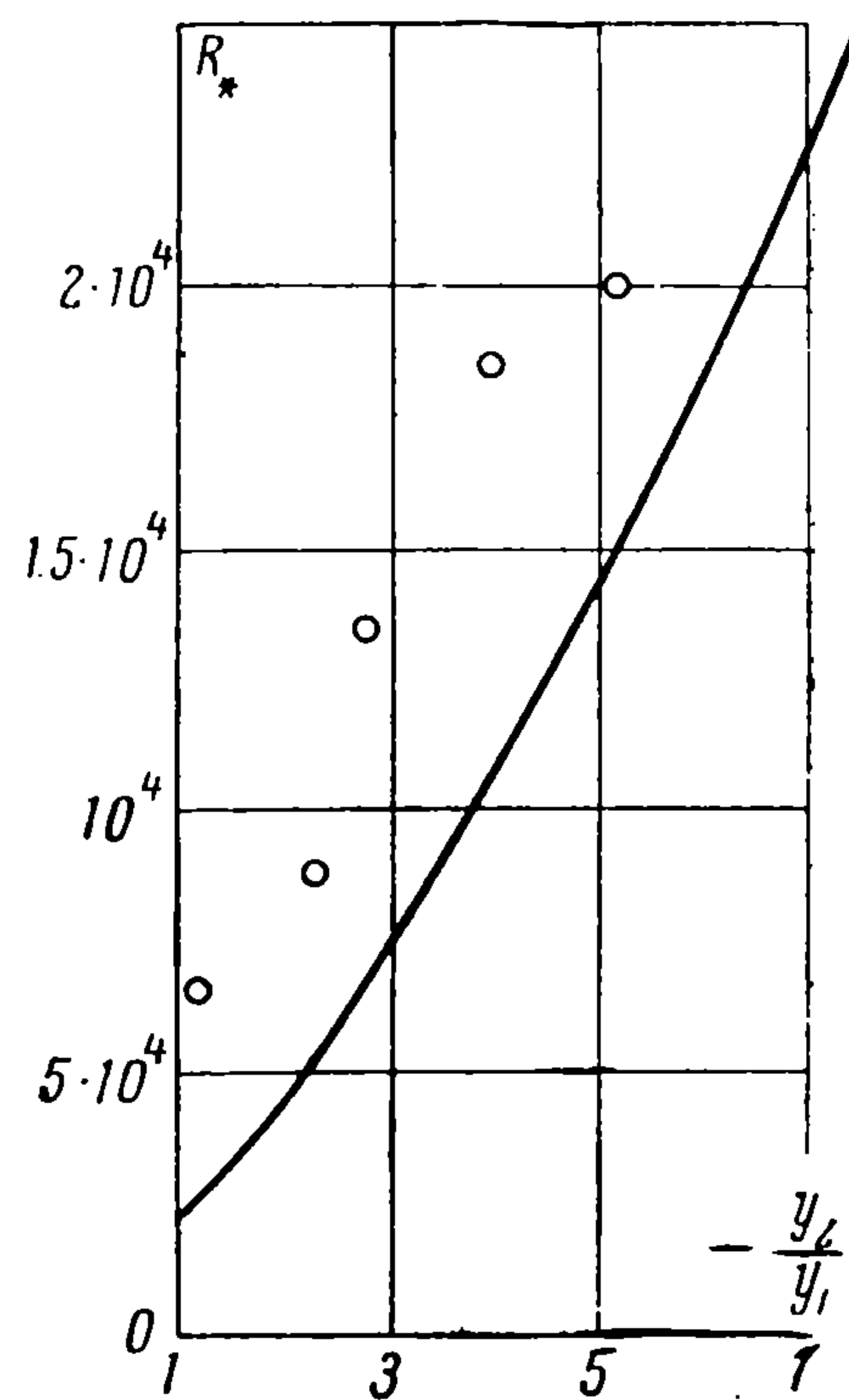
Для симметричного профиля ($-y_1 = y_2 = 1/2$) такой расчет дает $R_* = 2150$. Если же $y_1 = -0,4$, то $R_* = 2900$.

Наконец, рассмотрим предельный случай $y_1 \rightarrow 0$. Как следует из свойств функции Титьенса, $\Phi_i(z)$ и $\Phi_r(z)$ стремятся к нулю при $z \rightarrow 0$. Тогда при $y_1 \rightarrow 0$ имеем для $c = c_{\max}$

$$\pi c^2 = \Phi_{1i}^2 = 0.58, \quad z_1 = 3.21, \quad \alpha^2 = \frac{-\pi c}{y_1 y_2 \Phi_{1r}}, \quad \Phi_{1r} = 1.50 \quad (3.4)$$

и

$$R_* = 1075 \sqrt{-\frac{y_2}{y_1} \left(1 - \frac{y_2}{y_1} \right)} \quad (3.5)$$



Фиг. 3

Например, $R_* = 27400$ при $y_1 = -1/9$, т. е. несимметричное течение рассматриваемого типа сильно стабилизируется.

Вывод о стабилизации течений при увеличении отношения $-y_2/y_1$ ($-y_2/y_1 > 1$) был проверен автором экспериментально. Для этого в модели плоского канала создавались течения с профилями скорости, подчиняющимися соотношению (3.1). Две противоположные стенки канала были выполнены из сеток, другие две стенки и дно канала были непроницаемы. Отношение скоростей подачи воздуха через стенки изменялось путем изменения сопротивления сеток. Для уменьшения внешних возмущений воздух отсасывался из канала через критическое сечение. Начало перехода к турбулентному режиму отмечалось по возникновению колебаний в потоке. По измеренному профилю скорости определялись значения R_* и y_2/y_1 . Полученные значения числа Рейнольдса нанесены на фиг. 3. Здесь же проведена теоретическая кривая $R_*(y_2/y_1)$ согласно формуле (3.5) (которая при y_1 , близких к $-1/2$, удовлетворительно аппроксимирует значения R_* , вычисленные по формулам (3.33) без предельного перехода $y_1 \rightarrow 0$). Результаты измерений подтверждают вывод, полученный из теории.

§ 4. Изложенный выше метод без особых изменений можно использовать для решения задачи об устойчивости осевых течений в кольцевом канале, если принять, что величина внутреннего радиуса кольцевого канала не мала по сравнению с шириной канала.

Дифференциальное уравнение для амплитуды возмущений осесимметричного типа в этом случае имеет вид

$$(P^2 - \alpha^2)^2 \varphi = i\alpha R [(w - c)(P^2 - \alpha^2) - P^2 w] \varphi \quad \left(P^2 = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \quad (4.1)$$

$$\varphi = \varphi' = 0 \quad \text{при } r = r_1 \text{ и } r = r_2 \quad (w(r_1) = w(r_2) = 0)$$

Решения вырожденного уравнения в этом случае имеют тот же вид, что и в плоской задаче, за тем исключением, что во всех интегралах величина a должна быть равна

$$a = \frac{(w - c)^2}{r} \quad (4.2)$$

а нижний предел интегрирования — r_m (r_m — точка, соответствующая максимуму скорости в канале). Интегрирование производится по комплексной плоскости r с обходом критических точек снизу или сверху в соответствии со знаком w_c' (> 0 или < 0). Решение уравнения для φ_3 и φ_4 — то же самое, что в плоской задаче (y всюду заменяется на r).

Приближенные соотношения типа (2.23) в этом случае имеют вид

$$\frac{\alpha^2 H_{10}}{c} = \frac{w_1' r_2 \Phi_{2r} - w_2' r_1 \Phi_{1r}}{r_1 \Phi_{1r} r_2 \Phi_{2r}}, \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{w_2'}{w_1'} \left(\frac{\Phi_{1r}}{\Phi_{2r}} \right)^2 \frac{r_1}{r_2} \quad (4.3)$$

Здесь

$$H_{10} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{w^2}{r} dr, \quad Z_l = \Phi_{li} + c w_l' \frac{K_{li}^{(l)}}{r_l}, \quad K_{li}^{(l)} = \pi \frac{r_{cl}^2}{w_{cl}^3} \left(\frac{w'}{r} \right)'_{r=r_{cl}} \quad (l=1,2) \quad (4.4)$$

Поступила 9 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Lin C. C. On the stability of two-dimensional parallel flows. Quart. Appl. Math., 1945—46, vol. 3.
2. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. ИИЛ, М., 1958.
3. Yuan S. W. Further investigation of laminar flow in channels with porous walls. J. Appl. Phys., 1956, vol. 27, № 3.
4. Wasow W. The complex asymptotic theory of a fourth order differential equation of hydrodynamics. Ann. Math., 1948, 49.
5. Foot J. R., Lin C. C. Some recent investigations in the theory of hydrodynamic stability. Quart. Appl. Math., 1950, 8.
6. Holstein H. Ueber die äussere und innere Reibungsschicht bei Störungen laminarer Strömungen. Z. angew. Math. und Mech., 1950, Bd. 30, № 1—2.