Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ОСНОВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ ОДНОРОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ТРЕЩИНОВАТЫХ ПОРОДАХ

Г. И. Баренблатт, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина

(Москва)

В основе современной теории фильтрации лежит представление о пористой среде, состоящей из непроницаемых зерен, разделенных порами. Сопоставление результатов теоретических и лабораторных исследований неустановившихся движений жидкости в пластах с натурными данными приводит к выводу о недостаточности обычных представлений о пористой среде. В действительности для всех естественных пластов характерна развитая в той или иной степени трещиноватость. Описание *неустановившихся* движений жидкости в трещиноватых пластах при помощи обычных уравнений теории фильтрации может в некоторых случаях привести к несоответствиям качественного характера.

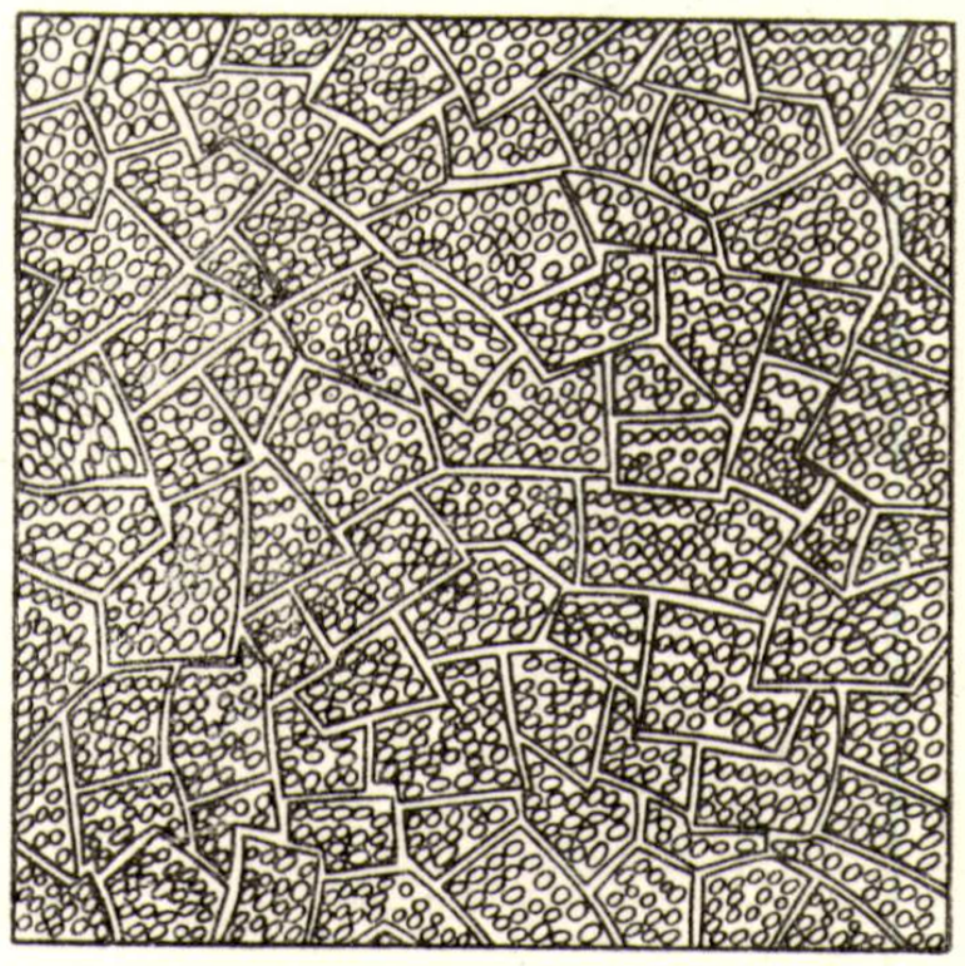
На первый взгляд кажется, что неустановившуюся фильтрацию в трещиноватых породах можно исследовать, задавая конфигурацию имеющейся в пласте регулярной в той или иной степени системы трещин. По-видимому, для изучения фильтрации в трещиноватых породах такой путь не является перспективным. В самом деле, если бы даже было возможно преодолеть огромные математические трудности, связанные с решением задач неустановившейся фильтрации в пласте с системой трещин достаточно общего вида, все равно, находясь на поверхности, нельзя достоверно судить о конфигурации этой системы. Сведения, получаемые при анализе кернов,— образцов породы, извлекаемых при бурении на поверхность,— дают очень неполную информацию о системе трещин. Возникающее здесь положение в известной мере аналогично тому, которое имеет место при исследовании движений жидкости в обычной пористой среде,— даже если бы удалось преодолеть все трудности, связанные с интегрированием уравнений движения вязкой жидкости в порах, все равно пойти по такому пути исследования фильтрации было бы нельзя, так как конфигурация пор нам неизвестна. Различные модели пористой среды, основанные на том или ином упорядочении систем пор и зерен и изучении движений жидкости в таких упорядоченных системах (идеальный грунт, фиктивный грунт, и т. д. [1]) оказались пригодными лишь для качественного исследования фильтрационных явлений. Теория фильтрации пошла по пути, характерному для механики сплошных сред вообще,— по пути введения осредненных характеристик среды и движения (пористость, проницаемость, давление, скорость фильтрации и т. д.) и формулировки основных законов в терминах этих осредненных характеристик.

Такой подход, применимый независимо от того, упорядочена ли система трещин в реальном пласте, оказывается наиболее целесообразным и при исследовании фильтрации в трещиноватых породах.

В предлагаемой работе излагаются основные представления о движении жидкости в трещиноватых породах. Вводятся осредненные характеристики, причем осреднение, естественно, проводится по масштабам, большим сравнительно с размерами отдельных блоков. Отличие развиваемой здесь схемы от обычной схемы фильтрации в пористой среде состоит во введении в каждой точке пространства двух давлений жидкости — давления жидкости в порах и давления жидкости в трещинах — и учете обмена жидкостью между трещинами и порами. При определенных предположениях получается выражение для интенсивности этого обмена. Выводятся основные уравнения филь-

рации жидкости в трещиноватой породе и более общие уравнения фильтрации жидкости в пористой среде с двойной пористостью. Эти уравнения, естественно, содержат качестве частного случая уравнения фильтрации жидкости в обычной пористой среде; в работе даются оценки, показывающие, в каких случаях можно пользоваться последними уравнениями и когда следует вносить предлагаемые здесь уточнения. Рассматриваются постановки основных краевых задач для уравнений фильтрации в трещиноватых породах. Обсуждаются некоторые характерные особенности неустановившихся фильтрационных движений в трещиноватых породах, в частности, возможность возникновения при некоторых условиях скачка давления внутри области и на границах, аналогичного «промежутку высачивания» в безнапорной фильтрации [2]. Выводятся условия на скачках, указываются особенности в формулировках краевых задач при наличии скачков. Приводятся решения некоторых конкретных задач неустановившейся фильтрации в трещиноватых породах.

§ 1. Основные физические представления. Трещиноватая порода состоит из пористых и проницаемых, вообще говоря, блоков, отделенных один от другого системой трещин (фиг. 1). Размер блоков может колебаться для различных пород в весьма широких пределах, в зависимости от того насколько развитой является трещиноватость породы. При этом поперечные размеры трещин значительно превосходят характерные размеры пор, так что проницаемость системы трещин значительно превосходит проницаемость системы пор в отдельных блоках. В то же время для трещиноватых пород характерно, что трещины занимают гораздо меньший объем, нежели поры, так что коэффициент трещиноватости породы m_1 — отношение объема пустого пространства, занятого трещинами, к общему объему породы — существенно меньше пористости отдельных блоков m_2. Многочисленные фактические данные по трещиноватым породам можно найти в работах [3-9]; особенно отметим обширную статью Пирсона [4], где изложено качественное описание строения среды с двойной пористостью, близкое к принимаемому в настоящей работе.



Фиг. 1

Если система трещин достаточно развита, то исследование движения жидкости в трещиноватой породе можно проводить следующим образом. В каждой точке пространства введем не одно давление жидкости, как в классической теории фильтрации, а два давления жидкости: p_1 и p_2. Давление p_1 представляет собой среднее давление жидкости в *трещинах* в окрестности данной точки, а давление p_2 — среднее давление жидкости *в порах* в окрестности данной точки. Для получения надежных средних масштаб осреднения должен охватывать достаточное количество блоков, поэтому нужно считать, что любой бесконечно малый объем охватывает не только большое количество пор, как в классической теории фильтрации, но и большое количество блоков. Это условие позволяет использовать при исследовании трещиноватых пород методы анализа бесконечно малых.

Аналогичным путем в каждой точке пространства можно определить две скорости фильтрации жидкости: $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$. Вектор $\mathbf{V}_1$ скорости фильтрации жидкости по трещинам определяется следующим образом: проекция этого вектора на некоторое направление равна потоку жидкости через сечения трещин малой площадкой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному направлению, поделенному на плотность жидкости и *полную* площадь площадки. Точно так же, проекция вектора $\mathbf{V}_2$ скорости фильтрации жидкости по порам на некоторое данное направление равна потоку жидкости через сечения блоков упомянутой малой площадкой, также поделенному на плотность жидкости и полную площадь площадки.

Для трещиноватых пород характерно, что течение жидкости осуществляется в основном по трещинам, так что скорость фильтрации жидкости по блокам пренебрежимо мала сравнительно со скоростью фильтрации жидкости по трещинам.

Если мысленно сделать границу трещин и блоков непроницаемой, то трещиноватую породу можно рассматривать как укрупненную пористую среду, в которой роль пор играют трещины, а роль зерен — блоки. Если, далее, трещины достаточно узки, а скорости движения жидкости достаточно малы, то движение жидкости по трещинам — безынерционное и выполняется закон Дарси:

$$\mathbf{V}_1 = -\frac{k_1}{\mu}\operatorname{grad} p_1 \tag{1.1}$$

где k_1 — проницаемость системы трещин, а μ — вязкость жидкости. Принятие закона Дарси для фильтрации по системе трещин не является принципиальным; при желании можно учесть инерционность движения, взяв более сложный нелинейный закон.

Характерной особенностью неустановившихся движений жидкости в трещиноватых породах является наличие обмена жидкостью между блоками и трещинами. Поэтому при исследовании фильтрации жидкости в трещиноватых породах, в отличие от классической теории фильтрации, необходимо учитывать приток жидкости из «зерен» — блоков в «поры» — трещины.

Процесс обмена жидкостью пор и блоков происходит в основном при достаточно плавном изменении давления, поэтому можно считать этот процесс квазистационарным, т. е. не зависящим явно от времени. Очевидно, в таком случае, что при движении однородной жидкости в трещиноватой породе объем жидкости v, вытекающей из блоков в трещины за единицу времени на единицу объема породы, зависит: (1) от вязкости жидкости μ, (2) от перепада давления между порами и трещинами $p_2 - p_1$ и (3) от некоторых характеристик породы, которые могут быть только геометрическими, т. е. могут иметь размерность длин, площадей, объемов и т. п. или быть безразмерными. Из соображений анализа размерностей [10] получаем выражение для v в виде

$$v = \frac{\alpha}{\mu}(p_2 - p_1) \tag{1.2}$$

где α — некоторая новая безразмерная характеристика трещиноватой породы. Таким образом, для массы q жидкости, вытекающей из пор в трещины за единицу времени на единицу объема породы получается соотношение

$$q = \frac{\rho\alpha}{\mu}(p_2 - p_1) \tag{1.3}$$

где ρ — плотность жидкости.

Отметим, что в несколько иной форме зависимость (1.3) для интегральной оценки перетока по пласту в целом была принята в работе [11].

§ 2. Уравнения движения однородной жидкости в трещиноватых породах. Закон сохранения массы жидкости, находящейся в трещинах, записывается в соответствии со сказанным выше в виде:

$$\frac{\partial m_1\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{V}_1 - q = 0 \tag{2.1}$$

Ввиду малости объема трещин первый член, выражающий собой изменение массы жидкости за счет сжатия жидкости в трещинах и изменения объема трещин в некотором элементе породы, мал сравнительно со вторым членом, выражающим изменение массы жидкости за счет притока жидкости по трещинам через границы этого элемента. Поэтому первым членом в соотношении (2.1) можно пренебречь. Подставляя в уравнение (2.1) выражение (1.1) закона Дарси, и имея в виду, что жидкость является слабосжимаемой, так что

$$\rho = \rho_0 + \beta\delta p \tag{2.2}$$

(ρ_0 — плотность жидкости при некотором стандартном давлении, например начальном давлении в пласте, β — коэффициент сжимаемости жидкости, δp — изменение давления сравнительно со стандартным), получаем, считая среду однородной и отбрасывая малые высшего порядка,

$$k_1\triangle p_1 + \alpha(p_2 - p_1) = 0 \qquad (\triangle\text{ — оператор Лапласа}) \tag{2.3}$$

Далее, уравнение сохранения массы жидкости, находящейся в порах, имеет вид[1]:

$$\frac{\partial m_2\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{V}_2 + q = 0 \tag{2.4}$$

так как количество жидкости, втекающей в трещины, равно количеству жидкости, вытекающей из блоков.

Заметим, что ввиду малой проницаемости блоков вторым членом уравнения (2.4), выражающим собой изменение массы жидкости, заключенной в порах в некотором элементе породы, за счет притока жидкости по порам через границы элемента, можно пренебречь сравнительно с первым членом, представляющим изменение массы жидкости в порах за счет ее расширения, а также изменения объема пор. Поэтому уравнение (2.4) переписывается в виде:

$$\frac{\partial m_2\rho}{\partial t} + q = 0 \tag{2.5}$$

---

[1] Строго говоря, в уравнении (2.4) под m_2 следует понимать не пористость блоков, а отношение объема пор ко всему объему породы, включая сюда и объем трещин. Однако, ввиду малости относительного объема трещин сравнительно с относительным объемом пор, можно считать m_2 за пористость отдельных блоков.

Далее, пористость блоков m_2 при постоянном давлении вышележащей толщи горных пород на кровлю пласта зависит, вообще говоря, от давления жидкости в трещинах p_1 и давления жидкости в порах p_2. Однако объем трещин в породе значительно меньше объема пор. Можно считать, что жидкость, находящаяся в трещинах, в отличие от жидкости, находящейся в порах, не участвует в поддержании вышележащей толщи горных пород. Поэтому влиянием на пористость блоков давления жидкости в трещинах p_1 можно пренебречь по сравнению с влиянием давления жидкости в порах p_2 и можно принять

$$dm_2 = \beta_{c2} dp_2 \tag{2.6}$$

где β_{c2} — коэффициент сжимаемости блоков. Имея в виду также соотношения (1.3) и (2.2) и отбрасывая малые величины высших порядков, получаем

$$(\beta_{c2} + m_0\beta)\frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{\alpha}{\mu}(p_2 - p_1) = 0 \tag{2.7}$$

где m_0 — величина пористости блоков при стандартном давлении. Уравнения (2.3) и (2.7) описывают движение жидкости в трещиноватых породах. Исключая из этих уравнений p_2, для давления жидкости в трещинах p_1, получаем уравнение

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \eta\frac{\partial \triangle p_1}{\partial t} = \varkappa \triangle p_1 \qquad \left(\varkappa = \frac{k_1}{\mu(\beta_{c2} + m_0\beta)}, \quad \eta = \frac{k_1}{\alpha}\right) \tag{2.8}$$

Коэффициент $\varkappa$ представляет собой коэффициент пьезопроводности трещиноватой породы; любопытно, что он соответствует проницаемости системы трещин k_1, но пористости и сжимаемости блоков. Коэффициент η представляет собой новую, специфическую характеристику трещиноватой породы. При стремлении η к нулю, что соответствует уменьшению размеров блоков и возрастанию степени развитости трещиноватости породы, уравнение (2.8), естественно, стремится к совпадению с обычным уравнением фильтрации жидкости при упругом режиме.

Сделаем примерные оценки возможных значений коэффициента η. Безразмерный коэффициент α, характеризующий интенсивность обмена жидкостью блоков и трещин, зависит от проницаемости блоков k_2 и степени развитости трещиноватости породы, в качестве меры которой естественно взять удельную поверхность трещин σ, т. е. поверхность трещин, приходящуюся на единицу объема породы. Величина σ имеет размерность обратной длины. Из соображений анализа размерностей следует, что

$$\alpha \sim k_2\sigma^2 \tag{2.9}$$

Отсюда и из (2.8) находим:

$$\eta \sim \frac{k_1}{k_2\sigma^2} \sim \frac{k_1}{k_2} l^2$$

где l — средний размер отдельного блока (удельная поверхность трещин обратно пропорциональна среднему размеру отдельного блока). Оценки показывают, что параметр η для разных пород принимает значения в весьма широких пределах — от нескольких *см*^{2} до величины порядка 10^{10} *см*^{2}.

Определение параметра η должно производиться по данным о неустановившихся движениях жидкости в трещиноватых породах. При этом, коль скоро речь идет о естественных пластах, определение этого параметра должно производиться только по данным исследования работы пласта на неустановившихся режимах, а не по тем или иным испытаниям извлекаемых на поверхность образцов породы.

§ 3. Уравнения движения однородной жидкости в среде с двойной пористостью. Система уравнений (2.3), (2.7) представляет собой частный случай системы уравнений движения однородной жидкости в среде с двойной пористостью. В некоторых случаях последние уравнения могут представить интерес, поэтому остановимся на их выводе.

Итак, рассматривается движение однородной жидкости в «двойной» пористой среде: первая пористая среда состоит из сравнительно широких пор первого порядка — трещин, и блоков; относительный объем пор первого порядка, пористость первого порядка, равен m_1. Блоки сами по себе являются пористыми, они состоят из зерен, разделенных мелкими порами второго порядка, и в совокупности составляют вторую пористую среду. Пористость этой среды,— пористость второго порядка,—будем обозначать через m_2. Заметим, что m_2, вообще говоря, нельзя считать равным пористости блоков, так как m_2 представляет собой отношение объема пор второго порядка к полному объему элемента породы, в котором известное место занимают трещины — поры первого порядка. При постоянном давлении на кровлю пласта вышележащей толщи горных пород обе пористости — m_1 и m_2 зависят от давлений жидкости в порах первого и второго порядка — p_1 и p_2, так что

$$dm_1 = \beta_{c1} dp_1 - \beta_* dp_2, \qquad dm_2 = \beta_{c2} dp_2 - \beta_{**} dp_1 \tag{3.1}$$

где β_{c1}, β_{c2}, β_*, β_{**} — положительные постоянные коэффициенты.

Уравнения сохранения массы жидкости для обеих сред имеют, соответственно, вид (2.1) и (2.4). Считая, что движение жидкости в первой среде (и, тем самым, заведомо во второй среде) является безынерционным, получаем выражения закона Дарси для обеих сред:

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{k_1}{\mu}\operatorname{grad} p_1, \qquad \mathbf{v}_2 = -\frac{k_2}{\mu}\operatorname{grad} p_2 \tag{3.2}$$

где k_1 — проницаемость системы пор первого порядка, а k_2 — проницаемость системы пор второго порядка.

Подставляя в уравнения (2.1) и (2.4) соотношения (3.2), выражение (1.3) для перетока жидкости из одной среды в другую (которое, очевидно, остается справедливым и в этом, более общем случае), соотношение (2.2) для плотности жидкости и соотношения (3.1) для дифференциалов пористости и отбрасывая малые величины высших порядков для давлений жидкости в обеих средах p_1 и p_2, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{k_1}{\mu}\Delta p_1 &= (\beta_{c1} + m_{10}\beta)\frac{\partial p_1}{\partial t} - \beta_*\frac{\partial p_2}{\partial t} - \frac{\alpha}{\mu}(p_2 - p_1) \\
\frac{k_2}{\mu}\Delta p_2 &= (\beta_{c2} + m_{20}\beta)\frac{\partial p_2}{\partial t} - \beta_{**}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\alpha}{\mu}(p_2 - p_1)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где m_{10} и m_{20} — значения пористости первого и второго порядка при стандартном давлении.

При изменении давления p_2 в сторону, например, уменьшения, при постоянном давлении на кровлю вышележащей толщи горных пород пористость первого порядка, с одной стороны, увеличивается за счет сжатия блоков, а с другой стороны — уменьшается за счет сдавливания вышележащими горными породами. Эти эффекты, по-видимому, в какой-то мере взаимно компенсируются. Аналогичное обстоятельство имеет место и для пористости второго порядка m_2 при изменении давления p_1. Представляется целесообразным поэтому рассмотреть модель двойной пористой среды, для которой пористость каждого порядка зависит только от соответствующего давления, так что можно коэффициенты β_* и β_{**} в формулах (3.1) считать малыми и соответствующими членами в уравнениях (3.1) пренебречь.

Уравнения (3.3) для такой модели пористой среды с двойной пористостью принимают вид, аналогичный уравнениям теплопередачи в гетерогенной среде, рассмотренным Л. И. Рубинштейном [12]

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{\mu}\Delta p_1 &= (\beta_{c1} + m_{10}\beta)\frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{\alpha}{\mu}(p_2 - p_1) \\ \frac{k_2}{\mu}\Delta p_2 &= (\beta_{c2} + m_{20}\beta)\frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{\alpha}{\mu}(p_2 - p_1) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Пренебрегая в уравнениях (3.3) членами, представляющими собой изменение массы жидкости за счет сжимаемости первой среды и сжатия жидкости в порах первого порядка и изменение массы жидкости за счет фильтрационного притока по порам второго порядка мы снова приходим к уравнениям движения жидкости в трещиноватой пористой среде (2.3) и (2.7).

§ 4. Основные краевые задачи теории неустановившейся фильтрации в трещиноватых породах. Уравнение (2.8), которому удовлетворяет распределение давления жидкости в трещинах p_1, можно представить в виде:

$$\beta_0\frac{\partial p_1}{\partial t} - \operatorname{div}\left[\frac{k_1}{\mu}\operatorname{grad} p_1 + \eta\beta_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad} p_1\right] = 0 \tag{4.1}$$

где β_0 — суммарный коэффициент сжимаемости, равный $\beta_{c2} + m_0\beta$. Такая форма записи основного уравнения показывает, что движение в системе трещин можно рассматривать как движение жидкости в пористой среде с суммарным коэффициентом сжимаемости β_0, выражение для скорости фильтрации жидкости в которой имеет вид:

$$\mathbf{V} = -\frac{k_1}{\mu}\operatorname{grad} p_1 - \eta\beta_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad} p_1 \tag{4.2}$$

К уравнению (2.8) необходимо присоединить начальное и граничное условия. Как и в теории фильтрации в пористой среде, здесь наибольший интерес представляют стационарные начальные условия (т. е. гармонические начальные распределения p_1, удовлетворяющие уравнению (4.1)). Из возможных типов граничных условий наиболее важными представляются следующие:

(1) задание на границе рассматриваемого объема породы S давления p_1 (первая краевая задача):

$$p_1|_S = f(S, t) \tag{4.3}$$

(2) задание на границе S потока жидкости (вторая краевая задача); в соответствии со сказанным выше при этом на граничной поверхности S задается величина

$$-\left\{\frac{k_1}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial n} + \eta\beta_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p_1}{\partial n}\right)\right\}\Big|_S = f(S, t) \tag{4.4}$$

($\partial/\partial n$ — производная по нормали к поверхности S), и, наконец,

(3) задание на границе линейной комбинации давления и потока жидкости с переменными, вообще говоря, коэффициентами A и B (смешанная задача):

$$\left\{Ap_1 + B\left[\frac{k_1}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial n} + \eta\beta_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p_1}{\partial n}\right)\right]\right\}\Big|_S = f(S, t) \tag{4.5}$$

Если начальное распределение давления непрерывно и граничные условия согласованы с начальным (т. е. предельные значения начального распределения при подходе к точкам границы равны граничным значениям соответствующих функций в начальный момент), то решения поставленных выше краевых задач будут обычными классическими решениями (4.1). Однако если начальное распределение давления разрывно, или же, если начальное и граничное условия несогласованы, то получающееся текущее распределение также будет разрывным, классического решения сформулированных выше краевых задач не существует — необходимо искать их обобщенное решение в смысле С. Л. Соболева [13]. Для дальнейшего необходимо вывести условия на разрывах. При этом достаточно рассмотреть одномерный случай, поскольку вблизи данной точки поверхность разрыва можно считать плоскостью. Итак, пусть в достаточно малых окрестностях по обе стороны изолированной поверхности разрыва $x=0$ (x — направление нормали к поверхности разрыва) функция p_1 непрерывна, имеет непрерывные соответствующие производные и удовлетворяет уравнению

$$Lp_1 = \beta_0 \frac{\partial p_1}{\partial t} - \eta\beta_0 \frac{\partial^3 p_1}{\partial x^2 \partial t} - \frac{k_1}{\mu}\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = 0 \tag{4.6}$$

В области $G(-h \leqslant x \leqslant h,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$, где h — некоторое малое число, слагаемые выражения Lp_1 кусочно-непрерывны. Интегрируя почленно Lp_1 по области G, получаем

$$\int_G Lp_1\, dx\, dt = \beta_0 \int_{-h}^{h} \Big\{p_1(x,T) - p_1(x,0)\Big\}\, dx - \int_0^T \left\{\eta\beta_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x \partial t} + \frac{k_1}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial x}\right\}\Bigg|_{x=-h}^{x=h} dt = 0 \tag{4.7}$$

При $h \to 0$ первый интеграл стремится к нулю и предыдущее равенство дает:

$$\int_0^T \left[\eta\beta_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x \partial t} + \frac{k_1}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial x}\right] dt = 0 \tag{4.8}$$

где знаком [ ] обозначается, как обычно, разность значений функции по обе стороны поверхности разрыва. Поскольку T произвольно и подынтегральное выражение — непрерывная функция времени, отсюда вытекает равенство нулю подынтегрального выражения:

$$\left[\eta\beta_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p_1}{\partial n}\right) + \frac{k_1}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial n}\right] = \eta\beta_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial p_1}{\partial n}\right] + \frac{k_1}{\mu}\left[\frac{\partial p_1}{\partial n}\right] = 0 \tag{4.9}$$

т. е. условие непрерывности на поверхности разрыва полного потока жидкости ($\partial/\partial x$ мы заменили на $\partial/\partial n$). Для получения второго условия умножаем (4.6) на x и интегрируем по этой же области G

$$\int_G xLp_1\, dx\, dt = \beta_0 \int_{-h}^{h} \Big\{p_1(x,T) - p_1(x,0)\Big\}\, x dx -$$

$$- \int_0^T \left\{\eta\beta_0 x \frac{\partial^2 p_1}{\partial x \partial t} + \frac{k_1}{\mu} x \frac{\partial p_1}{\partial x}\right\}\Bigg|_{-h}^{h} dt - \int_0^T \left\{\eta\beta_0 \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{k_1}{\mu} p_1\right\}\Bigg|_{-h}^{h} dt = 0$$

При $h \to 0$ первый и второй интегралы обращаются в нуль, отсюда имеем:

$$\int_0^T \left[\eta\beta_0 \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{k_1}{\mu} p_1\right] dt = 0 \tag{4.10}$$

так что второе условие на поверхности разрыва получается в виде

$$\left[\eta\beta_0 \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{k_1}{\mu} p_1\right] = \eta\beta_0 \frac{\partial [p_1]}{\partial t} + \frac{k_1}{\mu}[p_1] = 0 \tag{4.11}$$

При $\eta = 0$ основные условия на поверхности разрыва (4.9) и (4.11) переходят в хорошо известные из теории теплопроводности и теории фильтрации в пористой среде условия непрерывности функции и ее производной по нормали на любой поверхности, т. е. условия отсутствия разрывов [1].

Интегрируя (4.9) и (4.11), получаем условия на разрывах в виде:

$$[p_1] = [p_1]_{t=0}\, e^{-\varkappa t/\eta}, \qquad \left[\frac{\partial p_1}{\partial n}\right] = \left[\frac{\partial p_1}{\partial n}\right]_{t=0} e^{-\varkappa t/\eta} \tag{4.12}$$

так что возникающие благодаря разрывным или несогласованным начальным условиям скачки давления и его нормальной производной не уничтожаются мгновенно, как в пористой среде (и как скачки температуры и потока тепла в теории теплопроводности), а убывают по закону $e^{-\varkappa t/\eta}$. Это свойство является характерной качественной особенностью математического описания неустановившейся фильтрации в трещиноватых породах сравнительно с фильтрацией в пористой среде.

§ 5. Некоторые конкретные задачи неустановившейся фильтрации в трещиноватых породах. Общие качественные выводы.

1°. Неустановившаяся фильтрация жидкости к галерее. Из литературы хорошо известно значение, которое имеет для исследований неустановившейся фильтрации задача о притоке к дренажной галерее. Эта задача ставится следующим образом: в начальный момент давление жидкости в полубесконечном пласте ($0 \leqslant x < \infty$) P_0 постоянно; давление на границе $x = 0$ внезапно принимает значение P_1, отличное от P_0, которое затем остается постоянным. Задача определения возникающего фильтрационного движения приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \eta \frac{\partial^3 p_1}{\partial x^2 \partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} \tag{5.1}$$

при несогласованных начальном и граничном условиях:

$$p_1(x, 0) = P_0, \qquad p_1(-0, t) = P_1 \tag{5.2}$$

(граничное давление задается непосредственно слева от границы $x = 0$). В начальный момент на границе имеет место скачок давления, равный $(P_0 - P_1)$; согласно (4.12), в момент t этот скачок равен $(P_0 - P_1)\, e^{-\varkappa t/\eta}$,

---

[1] При получении второго закона сохранения в среде с переменным коэффициентом проницаемости k_1 следует умножать обе части уравнения (4.6) на

$$\int \frac{1}{k_1} dx$$

так что давление жидкости непосредственно справа от границы равно

$$p_1(+0, t) = P_1 + (P_0 - P_1)\, e^{-\varkappa t/\eta} \tag{5.3}$$

Для отыскания распределения давления в произвольный момент времени t воспользуемся преобразованием Лапласа по времени t. Полагаем

$$p_1(x, t) = P_0 - (P_0 - P_1)\, u(x, t) \tag{5.4}$$

Тогда для определения $u(x, t)$ $(t \geqslant 0,\ 0 \leqslant x < \infty)$ получаем краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \eta \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(+0, t) = 1 - e^{-\varkappa t/\eta}, \quad u(x, 0) = 0 \tag{5.5}$$

Обозначим

$$U(x, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(x, t)\, dt$$

Подвергая (5.5) преобразованию Лапласа, находим

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{\lambda}{\varkappa + \lambda\eta} U = 0, \qquad U(0, \lambda) = \frac{1}{\lambda(\varkappa + \lambda\eta)}, \qquad U(\infty, \lambda) = 0 \tag{5.6}$$

$$U = \frac{1}{\lambda(\varkappa + \lambda\eta)} \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa + \lambda\eta}}\, x\right)$$

Отсюда, по известному правилу обращения [14] получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa + \lambda\eta}}\, x\right) \frac{d\lambda}{\lambda(\varkappa + \lambda\eta)} \tag{5.7}$$

Вычисление интеграла, стоящего в правой части предыдущего равенства, дает

$$2\pi i - 2i \int_0^1 e^{-\sigma t} \sin\left(\sqrt{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\, x\right) \frac{d\sigma}{\sigma(1-\sigma)} \tag{5.8}$$

Подставляя это выражение в (5.7) и делая в интеграле замену переменных $\sigma/(1-\sigma) = \nu^2$, находим

$$u(x, t) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\nu} \sin \nu x \exp\left(-\frac{\nu^2 \varkappa t}{1 + \nu^2 \eta}\right) d\nu = 1 - \exp\left(-\frac{\varkappa t}{\eta}\right) -$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\nu} \sin \nu x \left\{\exp\left(-\frac{\nu^2 \varkappa t}{1 + \nu^2 \eta}\right) - \exp\left(-\frac{\varkappa t}{\eta}\right)\right\} d\nu \tag{5.9}$$

Отсюда и из (5.4) получаем окончательно

$$p_1(x, t) = P_1 + \frac{2(P_0 - P_1)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \nu x}{\nu} \left\{\exp\left(-\frac{\nu^2 \varkappa t}{1 + \nu^2 \eta}\right) - \exp\left(-\frac{\varkappa t}{\eta}\right)\right\} d\nu + \tag{5.10}$$

$$+ (P_0 - P_1) \exp\left(-\frac{\varkappa t}{\eta}\right)$$

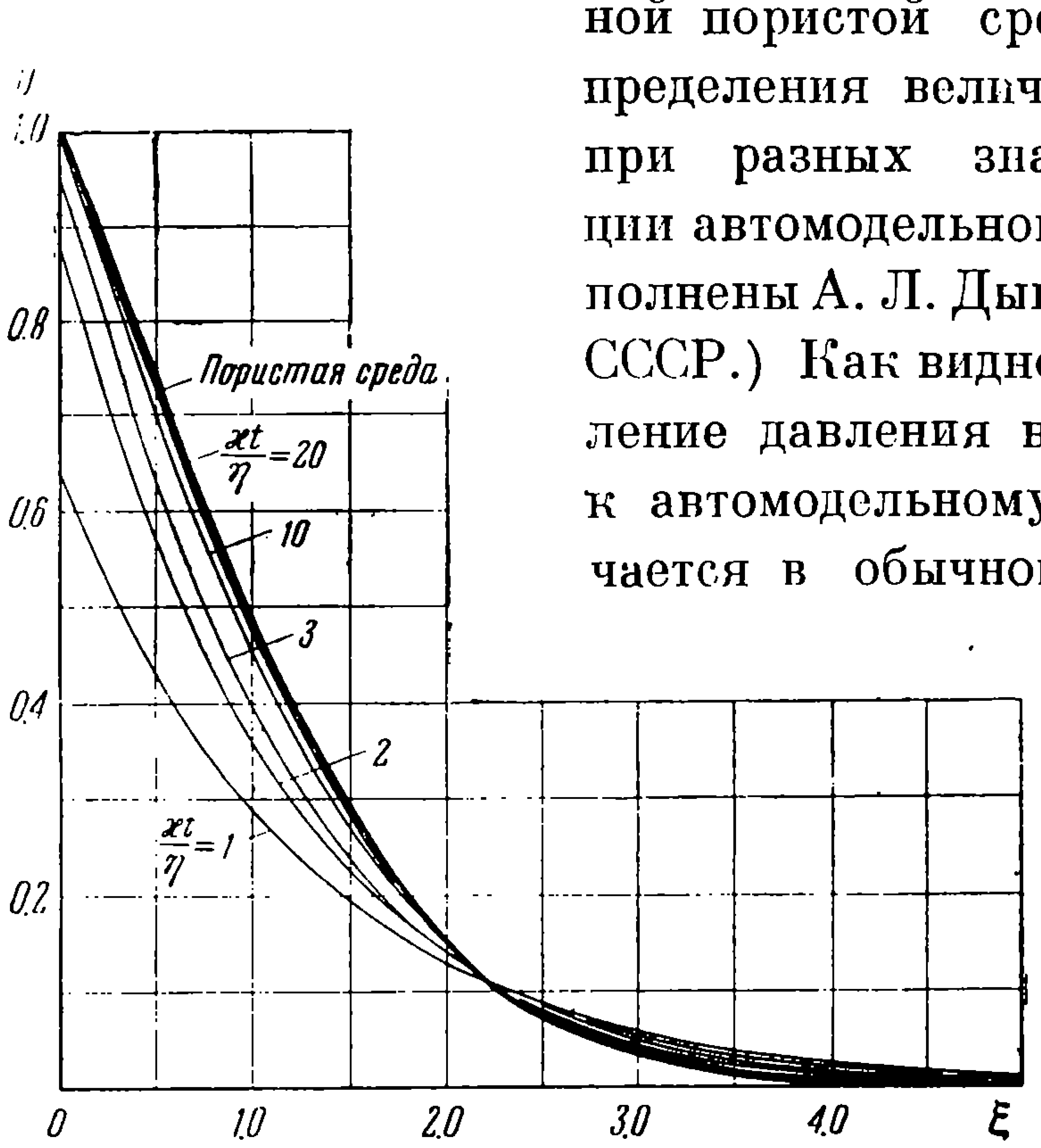
Ввиду равномерной сходимости входящего в выражение (5.10) интеграла, а также интеграла, получающегося его дифференцированием по x под знаком интеграла, можно дифференцировать этот интеграл и переходить в нем к пределу по параметру x. Отсюда и из (5.10) получаем выражение для потока жидкости, протекающей через границу пласта $x = 0$:

$$q = -\frac{k_1}{\mu}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)_{x=+0} = -\frac{2(P_0 - P_1)k_1}{\pi\mu}\int_0^\infty \left\{\exp\left(-\frac{\nu^2 \varkappa t}{1+\eta\nu^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \exp\left(-\frac{\varkappa t}{\eta}\right)\right\} d\nu = -\frac{2(P_0 - P_1)k_1}{\pi\mu\sqrt{\eta}} \exp\left(-\frac{\varkappa t}{\eta}\right) \times$$
$$\times \int_0^\infty \left\{\exp\left(\frac{\varkappa t}{\eta(1+\zeta^2)}\right) - 1\right\} d\zeta \tag{5.11}$$

Любопытно сравнить полученное решение с решением соответствующей задачи теории фильтрации в пористой среде. Это хорошо известное автомодельное решение получается из (5.10) при $\eta = 0$:

$$p_1(x,t) = P_1 + \frac{2}{\pi}(P_0 - P_1)\int_0^{{}^1/_2\,\xi} e^{-\beta^2} d\beta = P_1 + (P_0 - P_1)\,\Phi\left(\frac{1}{2}\,\xi\right)$$
$$\left(\xi = \frac{x}{\sqrt{\varkappa t}}\right) \tag{5.12}$$

где Φ — символ функции Крампа. Для сравнения распределений давления (5.10) и (5.12), отвечающих, соответственно, трещиноватой и обычной пористой среде, на фиг. 2 построены распределения величины $u(x,t) = (p_1 - P_1)/(P_0 - P_1)$ при разных значениях параметра $\varkappa t/\eta$ в функции автомодельной переменной ξ. (Вычисления выполнены А. Л. Дышко в Вычислительном центре АН СССР.) Как видно, при возрастании $\varkappa t/\eta$ распределение давления в трещиноватой породе стремится к автомодельному распределению, которое получается в обычной пористой среде.



Фиг. 2

2°. *Неустановившаяся фильтрация жидкости от скважины, работающей с постоянным расходом.* Наряду с задачей, рассмотренной в предыдущем пункте, важное значение имеет задача о неустановившейся фильтрации жидкости от скажины пренебрежимо малого радиуса, работающей с постоянным расходом (дебитом). Она формулируется следующим образом. Бесконечный горизонтальный пласт постоянной мощности (толщины) h вскрывается вертикальной скважиной пренебрежимо малого радиуса. В начальный момент давление жидкости в пласте постоянно и равно P; через скважину начинает отбираться (или закачиваться) жидкость с постоянным объемным расходом Q.

Давление жидкости в трещинах $p_1(r,t)$ (r — расстояние от оси скважины) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \eta\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial p_1}{\partial r} = \varkappa\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial p_1}{\partial r} \tag{5.13}$$

при начальном условии

$$p_1(r, 0) = P \tag{5.14}$$

Граничное условие, в соответствии с (4.4), записывается в виде:

$$Q = -2\pi h \left\{\frac{k_1}{\mu}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) + \eta\beta_0\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right)\right\}_{r=0}$$

Отсюда получаем

$$-\frac{Q\mu}{2\pi k_1 h} = \left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right)_{r=+0} + \frac{\eta}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right)_{r=+0}$$

Интегрируя последнее соотношение и используя условие

$$(r\partial p_1/\partial r)_{r=+0} = 0 \quad \text{при } t = 0$$

получаем окончательную форму граничного условия:

$$\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right)_{r=+0} = -\frac{Q\mu}{2\pi k_1 h}(1 - e^{-\varkappa t/\eta}) \tag{5.15}$$

Полагая

$$p_1(r, t) = P + \frac{Q\mu}{2\pi k_1 h}u(r, t) \tag{5.16}$$

получаем для определения функции $u(r, t)$ краевую задачу

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} - \eta\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} = \varkappa\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} \\ u(r, 0) = 0, \qquad \left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=+0} = -(1 - e^{-\varkappa t/\eta})\end{gathered} \tag{5.17}$$

Для решения краевой задачи (5.17) снова прибегнем к преобразованию Лапласа. Соотношения (5.17) при этом приводятся к виду

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dU}{dr} - \frac{\lambda}{\varkappa + \lambda\eta}U = 0, \quad \left(r\frac{dU}{dr}\right)_{r=0} = -\frac{\varkappa}{\lambda(\varkappa + \lambda\eta)} \tag{5.18}$$

Имея в виду также условие $U(\infty, \lambda) = 0$, получаем

$$U(r, \lambda) = \frac{\varkappa}{\lambda(\varkappa + \lambda\eta)}K_0\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa + \lambda\eta}}r\right) \tag{5.19}$$

(K_0 — символ функции Макдональда), откуда, в силу общего правила обращения [14], имеем

$$u(r, t) = \frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda(\varkappa + \lambda\eta)}K_0\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa + \lambda\eta}}r\right)d\lambda \tag{5.20}$$

Вполне аналогично предыдущему, вычисляя интеграл и возвращаясь к переменной p_1, получаем распределение давления в виде:

$$p_1(r, t) = P + \frac{Q\mu}{2\pi k_1 h}\int\limits_0^\infty\frac{J_0(\nu r)}{\nu}\left[1 - \exp\left(-\frac{\nu^2\varkappa t}{1 + \nu^2\eta}\right)\right]d\nu \tag{5.21}$$

Известное автомодельное решение соответствующей задачи теории фильтрации в пористой среде находится из (5.21) при $\eta = 0$:

$$p_1(r, t) = P + \frac{Q\mu}{2\pi k_1 h}\int\limits_0^\infty\frac{J_0(\nu r)}{\nu}(1 - e^{-\nu^2\varkappa t})\,d\nu = P - \frac{Q\mu}{4\pi k_1 h}\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right) \tag{5.22}$$

Как и в предыдущей задаче, здесь получается, что при возрастании $\varkappa t/\eta$ решение (5.21) задачи фильтрации в трещиноватой породе асимптотически стремится к решению (5.22) задачи фильтрации в пористой среде.

Как видно из рассмотренных примеров, наиболее характерным свойством неустановившихся движений жидкости в трещиноватых породах является некоторое запаздывание переходных процессов; характерное время этого запаздывания составляет

$$\tau = \eta/\varkappa \tag{5.23}$$

Таким образом, можно сделать следующий общий вывод: при рассмотрении процессов неустановившейся фильтрации в трещиноватых породах можно пользоваться обычными уравнениями неустановившейся фильтрации в пористой среде только если характерные времена рассматриваемого процесса велики сравнительно со временем запаздывания τ. Если же характерные времена процесса сравнимы с τ, то следует пользоваться схемой и основными уравнениями, предложенными в настоящей работе. Как показывают проведенные оценки, учет трещиноватости оказывается необходимым во многих случаях при исследовании таких процессов, как восстановление давления в остановленных скважинах и, вообще, переходные процессы при изменении режима работы скважин.

В заключение работы авторы искренне благодарят А. П. Крылова за внимание к работе, А. А. Абрамова, М. Г. Нейгауз и А. Л. Дышко за ценные замечания и проведенные вычисления.

Поступила 20 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. ГИТТЛ, М., 1947.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, М., 1952.
3. Wilkinson W. M. Fracturing in Spraberry Reservoir, West Texas. Bull. Amer. Assoc. Petrol. Geologists, 1953, vol. 37, № 2.
4. Pirson S. J. Performance of Fractured Oil Reservoirs. Bull.Amer. Assoc. Petrol. Geologists, 1953, vol. 37, № 2.
5. Трофимук А. А. К вопросу об оценке емкости трещиноватых нефтяных коллекторов. Нефт. х-во, 1955, № 7.
6. Дж. Беркс. Теоретические исследования по нефтеотдаче из трещиноватых пластов известняка при вытеснении нефти водой или газом. IV Международный нефтяной конгресс, 1956, Гостоптехиздат, т. III.
7. Котяхов Ф. И. Приближенный метод определения запасов нефти в трещиноватых породах. Нефт. х-во, 1956, № 4.
8. Смехов Е. М., Гмид Л. П., Ромашова М. Г. и Ромм Е. С. Вопросы методики изучения трещиноватых пород в связи с их коллекторскими свойствами. Тр. ВНИГРИ, 1958, вып. 121.
9. Gibson H. S. The Production of Oil from the Fields of Southwestern Iran. J. Inst. of Petroleum, vol. 34, June, 1948.
10. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. ГИТТЛ, 1954.
11. Pollard P. Evaluation of Acid Treatments from Pressure Build-Up Analysis. J. Petr. Techn. March, 1959.
12. Рубинштейн Л. И. К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах. Изв. АН СССР, сер. геогр., № 1, 1948.
13. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. ГИТТЛ, М., 1954.
14. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. ГИФМЛ, М., 1958.