

**ПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ И НЕОБРАТИМЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ
В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ПЛАВЛЕНИИ.
ТОЧЕЧНЫЙ ИСТОЧНИК ТЕПЛА**

А. М. Косевич, Л. В. Танатаров
(Харьков)

Рассматривается пластическая деформация, возникающая за счет разного удельного объема жидкой и твердой фаз вещества в результате локального плавления твердого тела. Показано, что в процессе затвердевания области расплава в жидкости может возникнуть очень большое по абсолютной величине отрицательное давление, могущее вызвать разрыв в жидкости. Последнее приводит к образованию каверн в веществе после полного затвердевания.

Под локальным плавлением понимается плавление небольшой области твердого тела, вызванное выделением некоторого количества тепла в течение короткого промежутка времени в очень малом объеме.

В настоящей работе предполагается, что тепло мгновенно выделяется в точке внутри изотропного твердого тела. Сразу же после выделения тепла вещество в бесконечно малом объеме вокруг начала координат окажется расплавленным. Сферическая (в силу симметрии задачи) граница жидкости и твердого тела радиуса r_0 с течением времени перемещается следующим образом: вначале r_0 растет со временем (плавление связанное с повышением температуры вокруг начала координат), достигает своего максимального значения r_m и затем убывает (затвердевание, связанное с уходом тепла из зоны расплава), стремясь к нулю.

Предполагается, что жидкая фаза вещества имеет удельный объем, больший удельного объема твердой фазы, и что относительное увеличение линейных размеров при плавлении ϵ_0 превышает деформацию на пределе упругости материала. Тогда в результате образования области со значительным «избыточным» удельным объемом вокруг нее возникает зона пластической деформации твердого тела. Характер деформирования будет существенно разным при расплавлении материала, когда область жидкой фазы увеличивается (нагрузка в твердом теле), и при затвердевании, когда эта область уменьшается (разгрузка в твердом теле).

В силу гистерезисного характера процесса деформирования после повторного затвердевания области расплава в материале могут возникнуть необратимые изменения, которые обсуждены ниже.

При расчете указанного явления не учитываются различные релаксационные явления, могущие происходить в твердом теле при высоких температурах, что допустимо, если время расплавления и затвердевания вещества в области радиуса r_m меньше характерного времени релаксации. Кроме того, не принимаются во внимание термические напряжения, которыми можно пренебречь при $\alpha\Delta T \ll \epsilon_0$, где α — коэффициент линейного расширения тела, а ΔT — перепад температур при локальном плавлении. Эти упрощения позволяют непосредственно воспользоваться теорией упруго-пластических деформаций,

Заметим, что все рассмотрение и результаты настоящей работы не зависят от того, заполнена ли шаровая полость жидкой фазой вещества или изотропной твердой фазой. Существенно лишь, что удельный объем новой фазы превышает удельный объем исходной фазы.

1. Деформация твердого тела при плавлении (нагрузка). Рассматривается неограниченное изотропное твердое тело, в котором имеется шаровая полость радиуса r_0 , заполненная жидкостью. Радиус полости растет

со временем, однако предполагается, что \dot{r}_0 значительно меньше скорости звука в среде. Последнее условие позволяет считать при каждом фиксированном r_0 систему жидкость — твердое тело равновесной.

В силу сферической симметрии задачи «угловые компоненты» тензоров напряжений σ_{ik} и деформаций u_{ik} совпадают

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\psi\psi} \equiv \sigma_{\varphi}, \quad u_{\varphi\varphi} = u_{\psi\psi} \equiv \varepsilon_{\varphi}$$

(r, φ, ψ — сферические координаты, центр которых выбран в центре жидкого шара), а недиагональные элементы отсутствуют¹. При этом интенсивность касательных напряжений² пропорциональна $\sigma_{\varphi} - \sigma_r$ ($\sigma_r \equiv \sigma_{rr}$), интенсивность деформаций сдвига пропорциональна $\varepsilon_{\varphi} - \varepsilon_r$ ($\varepsilon_r = u_{rr}$), и каждый элемент твердого тела испытывает простое нагружение [1].

Элементы тензора σ_{ik} связаны условием равновесия, а элементы u_{ik} — условием совместности. Что касается жидкости, то в пренебрежении силами гравитации ее давление p постоянно по объему. Тензоры σ_{ik} и u_{ik} удовлетворяют следующим граничным условиям:

1°. Бесконечно удаленная внешняя поверхность тела свободна

$$\sigma_r = 0 \quad \text{при } r = \infty \quad (1.1)$$

2°. На границе твердого тела и жидкости непрерывны поверхностные силы

$$\sigma_r = -p \quad \text{при } r = r_0 \quad (1.2)$$

и смещения

$$\varepsilon_{\varphi} = \varepsilon_0 - k_1 p \quad \text{при } r = r_0 \quad (1.3)$$

где k_1 — коэффициент объемного сжатия жидкости, а $3\varepsilon_0$ — увеличение удельного объема вещества при плавлении.

Для нахождения σ_{ik} и u_{ik} , удовлетворяющих условиям (1.1) — (1.3), необходимо установить связь тензоров σ_{ik} и u_{ik} . Используя лишь справедливое в широком интервале деформаций соотношение упругости между относительным изменением объема среды и средним гидростатическим давлением, легко получают соотношения

$$\varepsilon_{\varphi} - \varepsilon_r + 2k(\sigma_{\varphi} - \sigma_r) = \frac{C}{r^3} \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{\varphi} - k\sigma_r = \frac{C}{3r^3}, \quad C = \text{const} \quad (1.5)$$

где k — коэффициент объемного сжатия твердого тела.

Формула (1.5) позволяет установить связь между C и давлением в жидкости p , которая следует из (1.3):

$$\frac{C}{3r_0^3} = \varepsilon_0 + (k - k_1)p \quad (1.6)$$

¹ Отличные от нуля компоненты тензора u_{ik} могут быть выражены через единственную отличную от нуля радиальную составляющую вектора смещений u_r

$$u_{\varphi\varphi} = r^{-1}u_r, \quad u_{rr} = du_r/dr.$$

² Интенсивность касательных напряжений $I_2(\sigma)$ определяется как обычно:

$$I_2^2(\sigma) = \frac{1}{2} (\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{ll})^2$$

(по дважды встречающимся индексам предполагается суммирование). Интенсивность деформаций сдвига аналогичным образом определяется через тензор деформаций.

Давление в свою очередь очевидным образом выражается через интенсивность напряжений

$$p = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{\sigma_{\varphi} - \sigma_r}{r} dr \quad (1.7)$$

При записи формулы (1.7) использованы условия (1.1) и (1.2).

Очень существенно, что формулы (1.4) и (1.5) (а также полученные из них (1.6) — (1.8)) не связаны с характером зависимости интенсивности касательных напряжений от интенсивности деформаций сдвига.

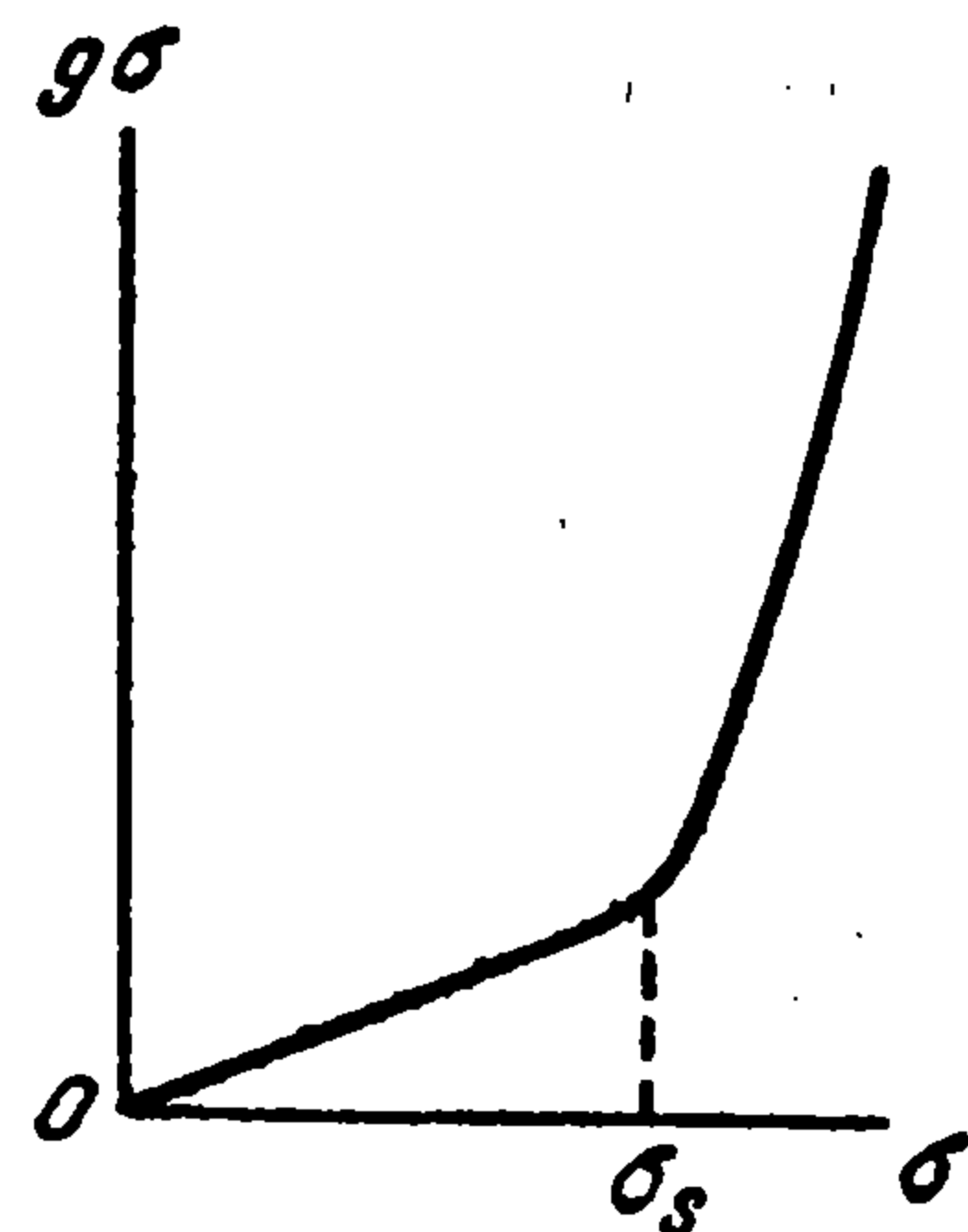
Формулы (1.6) и (1.7) можно объединить в одно уравнение для определения постоянной C

$$\frac{C}{3r_0^3} = \varepsilon_0 + 2(k - k_1) \int_{r_0}^{\infty} \frac{\sigma_{\varphi} - \sigma_r}{r} dr \quad (1.8)$$

Чтобы уравнение (1.8) имело смысл, должна быть найдена зависимость $\sigma_{\varphi} - \sigma_r$ от r , которая существенно определяется связью $\varepsilon_{\varphi} - \varepsilon_r$ и $\sigma_{\varphi} - \sigma_r$. Теория упруго-пластических деформаций [1] в случае нагрузки устанавливает эту связь в виде

$$\varepsilon_{\varphi} - \varepsilon_r = g(\sigma) \sigma, \quad \sigma = \sigma_{\varphi} - \sigma_r \quad (1.9)$$

где $g(\sigma)$ — монотонно возрастающая четная функция, имеющая при малых σ горизонтальный участок: $g(\sigma) \rightarrow 2\mu$ ($\sigma \rightarrow 0$). График функции $g(\sigma) \sigma$ схематически представлен на фиг. 1.



Фиг. 1

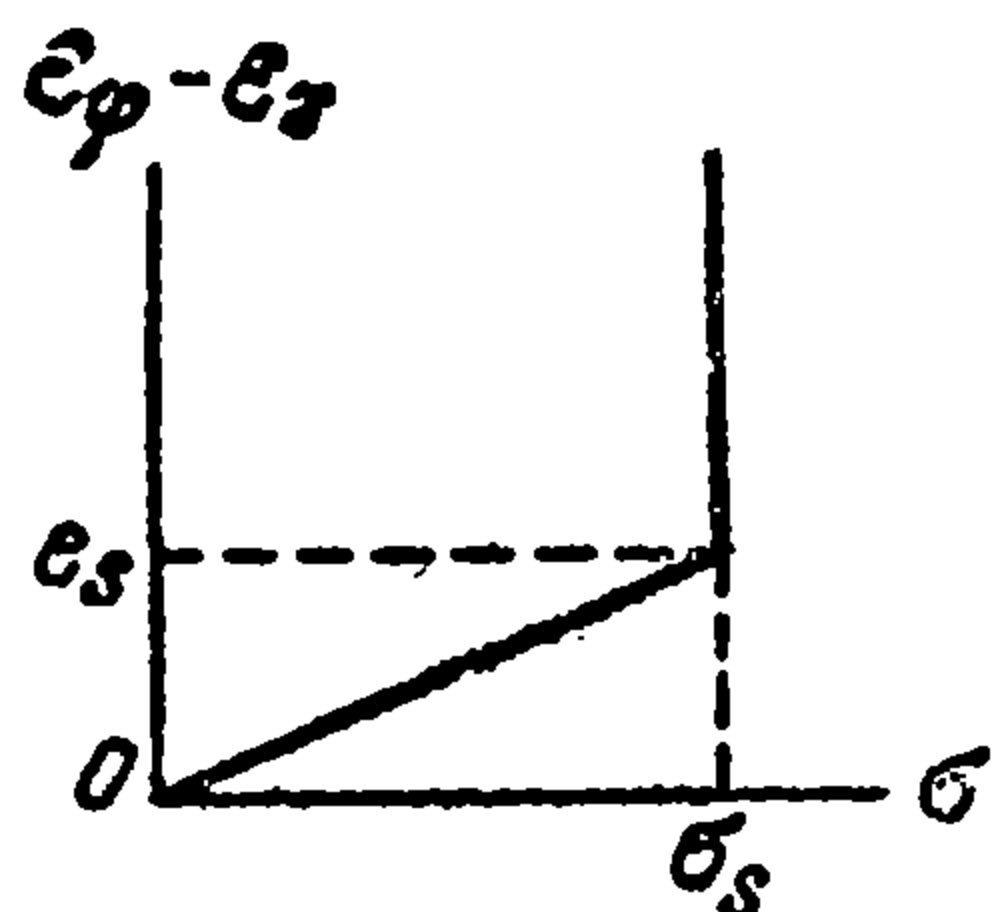
Если подставить (1.9) в (1.4), то зависимость $\sigma = \sigma(r)$ определится в неявном виде уравнением

$$G(\sigma) = \frac{C}{r^3}, \quad G(\sigma) = [2k + g(\sigma)] \sigma \quad (1.10)$$

Постоянная C , как указывалось выше, находится из (1.8).

Однако в дальнейшем оказывается удобным ввести вместо C другую постоянную — $\sigma_0 = \sigma(r_0)$, связанную с C такой формулой

$$C = r_0^3 G(\sigma_0)$$



Фиг. 2

Уравнение для σ_0 следует из (1.8) и (1.10).

Введение постоянной σ_0 позволяет представить выражение для давления в виде

$$p = \frac{2}{3} \int_0^{\sigma_0} \frac{G'(\sigma)}{G(\sigma)} \sigma d\sigma \quad (1.11)$$

Из (1.11) видно, что давление в жидкости оказывается независимым от r_0 (это является следствием автосмодельности задачи) и определяется величиной ε_0 . При $\varepsilon_0 = 0$ давление в жидкости обращается в нуль.

Если сжимаемости жидкости и твердого тела совпадают ($k = k_1$), то, напряжение σ_0 определяется уравнением

$$G(\sigma_0) = 3\varepsilon_0 \quad (1.12)$$

В случае схемы Прандтля (фиг. 2), которая предполагает, что $\varepsilon_{\varphi} - \varepsilon_r$ и $\sigma = \sigma_{\varphi} - \sigma_r$ связаны разной функциональной зависимостью ниже

и выше предела упругости (c_s, σ_s)

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi - \varepsilon_r &= 2\mu\sigma & \text{при } \sigma < \sigma_s \\ \sigma &= \sigma_s = \text{const} & \text{при } \varepsilon_\varphi - \varepsilon_r > e_s = 2\mu\sigma_s \end{aligned} \quad (1.13)$$

Давление p дается формулой

$$p = \frac{2}{3} \sigma_s \left[1 + \ln \left(\frac{a}{r_0} \right)^3 \right] \quad (1.14)$$

где a — радиус пластической зоны [1], определяемый уравнением

$$\left(\frac{a}{r_0} \right)^3 + \frac{1}{3} \frac{k_1 - k}{k + \mu} \left[1 + \ln \left(\frac{a}{r_0} \right)^3 \right] = \frac{\varepsilon_0}{2(k + \mu) \sigma_s} \quad (1.15)$$

Из (1.15) следует, что при $k = k_1$ отношение

$$\left(\frac{a}{r_0} \right)^3 = \frac{\varepsilon_0}{2\sigma_s (k + \mu)}$$

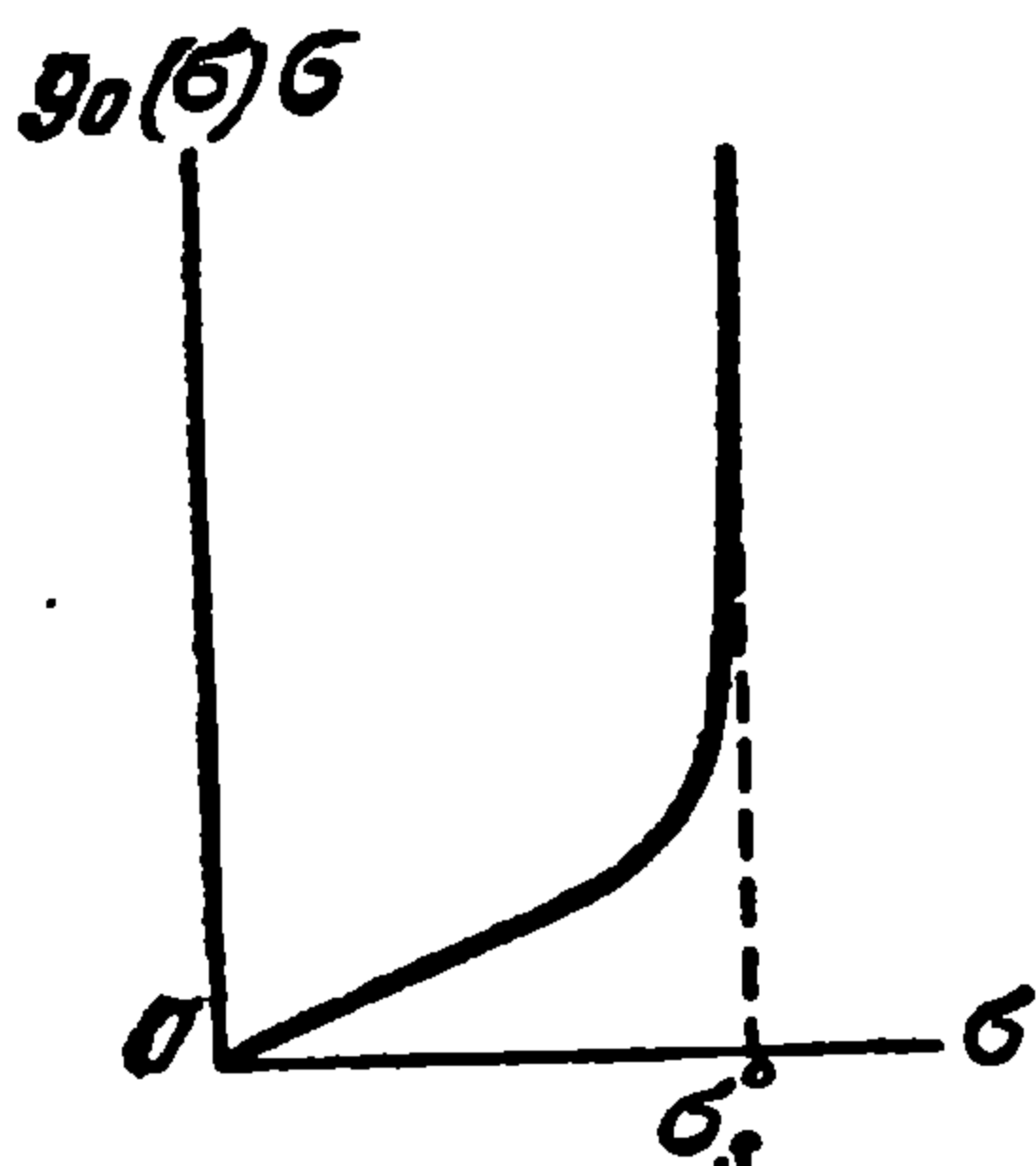
а в общем случае по порядку величины

$$\left(\frac{a}{r_0} \right)^3 \sim \frac{\varepsilon_0}{e_s}$$

2. Деформация твердого тела при затвердевании (разгрузка). После того как закончится процесс плавления и радиус жидкости достигнет своего максимального значения r_m , начнется обратный процесс затвердевания жидкости. Затвердевание жидкой фазы на границе $r = r_0$ эквивалентно нарастанию под давлением тонкого слоя твердой фазы из жидкого расплава на деформированную и напряженную подложку. При этом может быть два случая.

Случай А. Нарастающая твердая фаза переносит упругие напряжения, созданные в подложке. Тогда предполагается, что в рождающемся бесконечно тонком слое твердой фазы происходит мгновенная нагрузка, описываемая уравнением

$$\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r = g_0(\sigma) \sigma \quad (2.1)$$



Фиг. 3

где $g_0(\sigma)$ — монотонно возрастающая функция, вообще говоря, отличная от $g(\sigma)$, но обладающая сходными свойствами: 1) при малых σ функция $g_0(\sigma)$ имеет горизонтальный участок ($g_0(\sigma) \rightarrow 2\mu$ при $\sigma \rightarrow 0$), 2) с приближением σ к значению σ_s^0 функция $g_0(\sigma) \sigma$ асимптотически приближается (фиг. 3) к вертикальной прямой $\sigma = \sigma_s^0$.

В ходе затвердевания ($\dot{r}_0 < 0$) движение границы приводит к разгрузке напряженного состояния вокруг расплавленной области. Как обычно, разгрузка описывается линейной связью между изменениями тензоров деформаций и напряжений

$$d(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r) = 2\mu d\sigma \quad (2.2)$$

При переходе от дифференциальной записи (2.2) к конечным выражениям учитывается, что начало разгрузки в областях $r > r_m$ и $r < r_m$ определяется по-разному, а именно

$$\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r = 2\mu\sigma + [g(v) - 2\mu]v \quad (r > r_m) \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r = 2\mu\sigma + [g_0(\zeta) - 2\mu]\zeta \quad (r < r_m) \quad (2.4)$$

где v — значение интенсивности напряжений σ при $r_0 = r_m$; оно определяется формулами (1.10) и (1.12), в которых $r_0 = r_m$, а ζ — значение σ в области затвердевшего расплава в момент начала разгрузки, оно соответствует максимальной нагрузке в данной точке. Величина ζ определяется интенсивностью напряжений, которые имеют место в данной точке при прохождении через нее границы раздела

$$\sigma = \zeta \quad \text{при } r = r_0 \quad (2.5)$$

При помощи (1.4) соотношения (2.3) и (2.4) позволяют получить формулы для σ , аналогичные (1.10)

$$2(\mu + k)\sigma + [g(v) - 2\mu]v = \frac{C}{r^3} \quad (r > r_m) \quad (2.6)$$

$$2(\mu + k)\sigma + [g_0(\zeta) - 2\mu]\zeta = \frac{C}{r^3} \quad (r < r_m) \quad (2.7)$$

В силу непрерывности σ_r и ε_φ в точке $r = r_m$ постоянная C одна и та же в (2.6) и (2.7). Эта постоянная связана со значением функции $\zeta = \zeta(r)$ при $r = r_0$. Действительно, из (2.5) и (2.7) следует, что

$$C = r_0^3 G_0(\zeta), \quad G_0(\zeta) = [2k + g_0(\zeta)]\zeta, \quad \zeta_0 = \zeta(r_0) \quad (2.8)$$

Определив интенсивность напряжений из (2.6) и (2.7) и подставив в (1.8), получим, используя (2.8), уравнение для функции $\zeta = \zeta(r)$.

$$G_0(\zeta_0) = 3\varepsilon_0 + 6(k - k_1) \int_{r_0}^{\infty} \frac{\sigma}{r} dr \quad (2.9)$$

Интегральное соотношение (2.9) представляет собой уравнение для $\zeta(r)$; действительно функция v не зависит от r_0 , поэтому, дифференцируя (2.9) по r_0 , имеем

$$r_0 \frac{d\zeta_0}{dr_0} = \beta \frac{g_0(\zeta_0) - 2\mu\zeta_0}{G_0'(\zeta_0)} \zeta_0, \quad \beta = 3 \frac{k - k_1}{k_1 + \mu} \quad (2.10)$$

Интегрирование уравнения (2.10) дает

$$\beta \ln \frac{r}{r_m} = \int_{\zeta_m}^{\zeta} \frac{G_0'(\zeta) d\zeta}{[g_0(\zeta) - 2\mu]\zeta} \quad (2.11)$$

Формула (2.11) совместно с (2.6) и (2.7) дает распределение напряжений в твердом теле в процессе разгрузки.

По известному распределению интенсивности напряжений в твердом теле легко определяется давление в жидкости $p = p(r_0)$, которое при разгрузке оказывается зависящим от положения границы, т. е. от r_0 . Давление определяется по формуле (1.7) с использованием (2.6) — (2.9)

$$p = p_m - \frac{G_0(\zeta_m) - G_0(\zeta_0)}{3(k - k_1)} \equiv \frac{G_0(\zeta_0) - 3\varepsilon_0}{3(k - k_1)} \quad (p_m = p(r_m)) \quad (2.12)$$

Здесь p_m обозначает давление в момент начала затвердевания (давление, созданное при плавлении).

Зависимость давления от r_0 становится особенно простой, когда $k = k_1$. Тогда, как следует из (2.10), $\zeta \equiv \zeta_0^* = \text{const}$, и давление удобно определить непосредственно по формуле (1.7)

$$p = p_m + \frac{g_0(\zeta^*) - 2\mu}{k + \mu} \zeta^* \ln \left(\frac{r_0}{r_m} \right) \quad (2.13)$$

Давление в жидкости при разгрузке твердого тела уменьшается по мере затвердевания ($\dot{r}_0 < 0$). В самом деле, из свойств функции $g_0(\zeta_0)$ вытекает, что при $\zeta_0 > 0$

$$\frac{dp}{dr_0} = \frac{g_0(\zeta_0) - 2\mu}{(\mu + k_1)r_0} \zeta_0 \geq 0$$

причем равенство $dp / dr_0 = 0$ имеет место только при упругом характере зависимости (2.5), т. е. при $g_0(\zeta) = 2\mu$. Но так как при затвердевании $\dot{r}_0 < 0$, то $\dot{p} < 0$.

Легко видеть, что $p(r_0)$, убывая, переходит через нуль. Действительно, существует такое значение $r_0 > 0$ (обозначаемое ниже через ρ_0), при котором $p = 0$. Это значение r_0 удовлетворяет условию, следующему из (2.12)

$$3\varepsilon_0 = G_0(\zeta_0) \quad (2.14)$$

Соотношение (2.14) может рассматриваться как уравнение относительно ζ_0 . Если корень этого уравнения обозначить через ζ^* (естественно, что эта же величина вошла в (2.13)), то ρ_0 в явном виде определится формулой (2.11)

$$\beta \ln \frac{\rho_0}{r_m} = \int_{\zeta_m}^{\zeta^*} \frac{G_0'(\zeta) d\zeta}{[g_0(\zeta) - 2\mu] \zeta} \quad (2.15)$$

При $r_0 < \rho_0$ давление в жидкости отрицательно.

Если сжимаемость жидкости и твердого тела совпадает ($k = k_1$), то по формуле (2.13)

$$\ln \frac{\rho_0}{r_m} = - \frac{(k + \mu) p_m}{[g_0(\zeta^*) - 2\mu] \zeta^*}$$

Случай Б. Нарастающая твердая фаза в процессе своего образования «проскальзывает» по подложке, испытывая лишь всестороннее сжатие. В этом случае сдвиговые напряжения в рождающемся бесконечно тонком слое твердой фазы предполагаются отсутствующими¹

$$\sigma = 0 \quad \text{при } r = r_0 \quad (2.16)$$

Тогда связь $\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r$ с σ вместо (2.4) дается соотношением

$$\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r = 2\mu\sigma + q_0 \quad (r < r_m) \quad (2.17)$$

где q_0 — значение интенсивности деформаций $\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r$ в области затвердевания расплава в момент начала разгрузки. Величина q_0 определяется интенсивностью деформаций, которые имеют место в данной точке при прохождении через нее границы раздела.

Действительно, из (2.16) и (2.17) следует

$$\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r = q_0 \quad \text{при } r = r_0$$

Здесь функция $q_0 = q_0(r)$ подлежит определению.

Из сравнения (2.16) с (2.5) и (2.17) с (2.4) видно, что для расчета напряженного и деформированного состояния тела можно воспользоваться результатами, полученными в случае А, положив $\zeta \equiv 0$ и $g_0(\zeta) \zeta \equiv q_0$. (Необходимо только учесть, что $q_0(r)$ — это неизвестная функция r ,

¹ Формально случай Б соответствует $\sigma_s^\circ \equiv 0$ в случае А.

в то время как $g_0(\zeta)$ предполагалась известной функцией неизвестной величины ζ). Уравнение для $q_0(r)$ следует непосредственно из (2.10)

$$\frac{dq_0}{q_0} = \beta \frac{dr}{r} \quad (2.18)$$

а граничное условие при $r = r_m$ — из (2.11)

$$q_0(r_m) = 3\varepsilon_0 + 6(k - k_1) \int_{r_m}^{\infty} \frac{\sigma}{r} dr \quad (2.19)$$

где значение σ по-прежнему находится из условия (1.10). Из (2.17) и (2.18) вытекает простая зависимость для $q_0(r)$:

$$q_0(r) = [3\varepsilon_0 + 3(k - k_1)p_m] \left(\frac{r}{r_m}\right)^\beta \quad (2.20)$$

При записи (2.20) использовано выражение (1.7). Давление в жидкости получается из (2.12)

$$p = \frac{q_0(r_0) - 3\varepsilon_0}{3(k - k_1)}$$

Как и в случае A , давление обращается в нуль в точке r_0 , определяемой уравнением $q_0(r_0) = 3\varepsilon_0$, причем $\partial p / \partial r_0 > 0$ в этой точке. Следовательно, как и в случае A , при $r_0 < r_0$ давление в жидкости становится отрицательным.

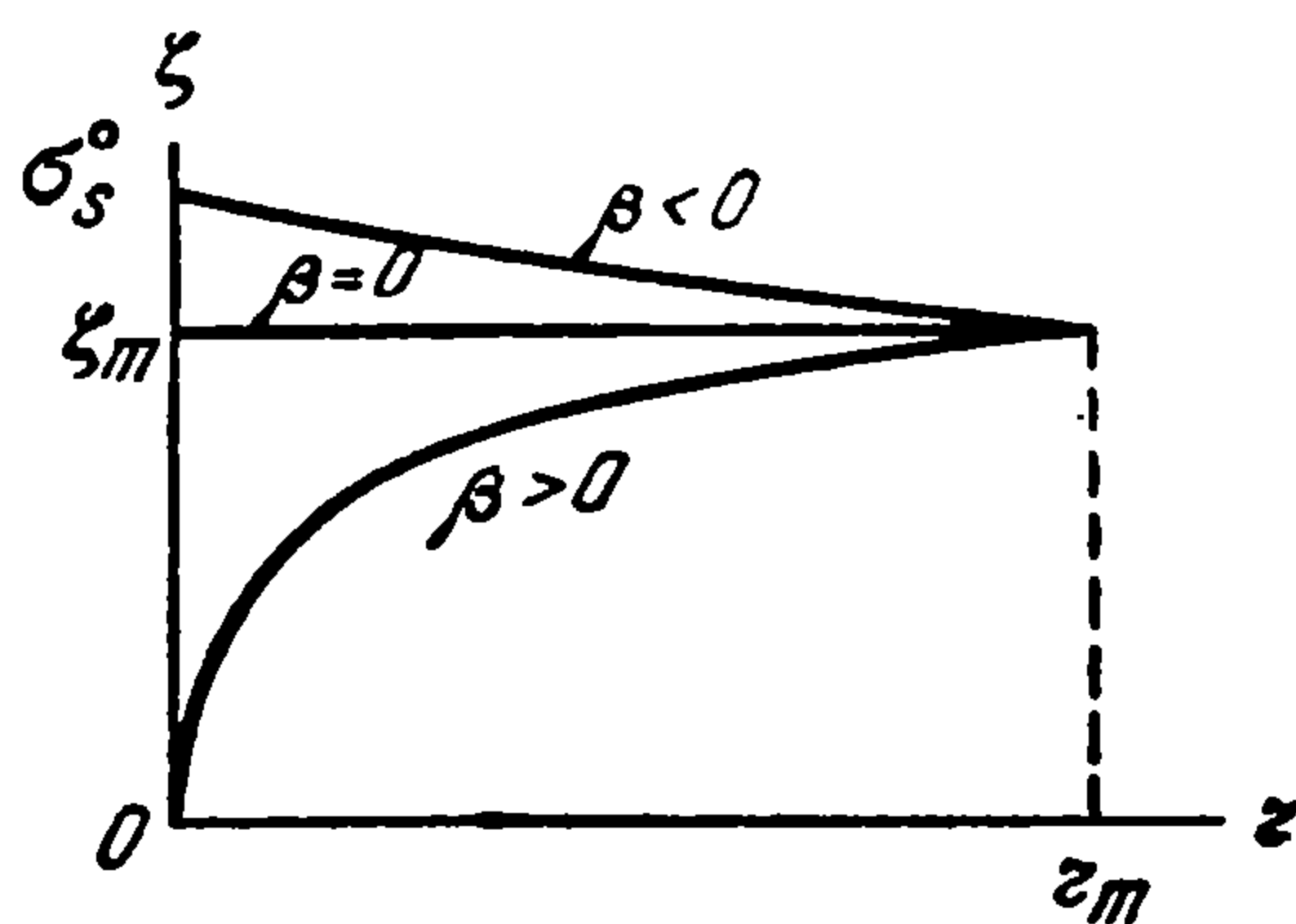
3. Анализ напряженного состояния тела при разгрузке. Для качественного исследования характера напряженного состояния твердого тела и зависимости давления в жидкости от r_0 рассматривается простейшая модель пластичности твердого тела — модель Прандтля Это, в частности, означает, что функция $g_0(\sigma)$ σ , введенная в предыдущем пункте, определяется по аналогии с (1.13), ее график имеет вид, представленный на фиг. 2, но с другим «пределом упругости» (σ_s° , e_s°).

Конкретное использование указанной схемы осуществляется различно при разных знаках β . Последнее обстоятельство связано с тем, что функция ζ , величина которой определяет интенсивность напряжений в начальный момент разгрузки, ведет себя по-разному в зависимости от знака β .

При $\beta > 0$, как видно из (2.10) величина ζ есть возрастающая функция от r , обращающаяся в нуль при $r = 0$ и проходящая через ζ_m при $r = r_m$ (фиг. 4). Если же $\beta < 0$, то ζ есть убывающая функция r , которая в силу предположенной в п. 2 особенности функции $g_0(\sigma)$ σ равна σ_s° ($\sigma_s^\circ > \zeta_m$) при $r = 0$ и проходит через ζ_m при $r = r_m$ (фиг. 4).

В случае $\beta = 0$ функция ζ сводится к постоянной $\zeta = \zeta_m$.

Роль ζ_m в предлагаемой схеме играет величина σ_s° , с которой начинается разгрузка в начальный момент затвердевания. Данная схема не допускает для вновь затвердевающих слоев твердого тела величин σ , превышающих σ_s° , поэтому при $\beta \leq 0$ начало разгрузки в любой точке r совпадает с интенсивностью напряжений σ_s° , если же $\beta > 0$, то обязательно имеется область малых r , в которой мгновенная нагрузка во вновь образовавшемся слое твердого тела не превышает «предела упругости» и поэтому началу разгрузки соответствует $\sigma < \sigma_s^\circ$.



Фиг. 4

Так как обычно коэффициент объемного сжатия жидкой фазы превышает соответствующий коэффициент для твердой фазы того же вещества ($k_1 > k$), то можно ограничиться случаем $\beta < 0$.

В этом случае вместо (2.4) следует пользоваться соотношением

$$\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r = 2\mu (\sigma - \sigma_s^\circ) + q_s(r), \quad r < r_m$$

которое совпадает с (2.17) при $\sigma_s^\circ \equiv 0$. Величина $q_s(r)$, как и в (2.17), определяется интенсивностью деформаций в точке r при прохождении через нее границы раздела. Для нахождения $q_s(r)$ снова удобно воспользоваться непосредственно результатами п. 2 случая А, заметив, что во всех формулах достаточно произвести формальную замену $\zeta \rightarrow \sigma_s^\circ$ и $g_0(\zeta) \zeta \rightarrow q_s(r)$. Тогда для $q_s(r)$ получится уравнение

$$\frac{dq_s}{q_s - 2\mu\sigma_s^\circ} = \beta \frac{dr_0}{r_0} \quad (3.1)$$

с граничным условием

$$q_s(r_m) + 2k\sigma_s^\circ = 3\varepsilon_0 + 3(k - k_1)p_m \quad (3.2)$$

Из (3.1) и (3.2) следует

$$q_s(r) - 2\mu\sigma_s^\circ = 3 \left(\frac{r}{r_m} \right)^\beta \left[\varepsilon_0 + (k - k_1)p_m - \frac{2}{3}(\mu + k)\sigma_s^\circ \right] \quad (3.3)$$

Заметим, что в (3.3) явно не входят характеристики процесса разгрузки твердого тела в области $r > r_m$, а входит только p_m , однако вид функции $q_s(r)$, так же как и уравнение (3.1), определяется линейным характером разгрузки. При помощи (3.3) и (2.14) можно получить

$$p = p_m - \frac{(r_0/r_m)^\beta - 1}{k_1 - k} \left[\varepsilon_0 + (k - k_1)p_m - \frac{2}{3}\sigma_s^\circ(\mu + k) \right] \quad (3.4)$$

Давление обращается в нуль в точке $r_0 = \rho_0$, которая находится либо из (3.4), либо непосредственно по (2.15)

$$\left(\frac{\rho_0}{r_m} \right)^{-\beta} = 1 - \frac{(k_1 - k)p_m}{\varepsilon_0 - \frac{2}{3}(k + \mu)\sigma_s^\circ} \quad (3.5)$$

Наиболее интересен случай $\varepsilon_0 \gg e_s$, так как при высоких температурах предел упругости низок, а изменение объема при плавлении велико (обычно $\varepsilon_0 \sim 10^{-2}$). В этом случае точка $r_0 = \rho_0$ очень близка к $r_0 = r_m$. Действительно, так как $\ln(a/r_0)^3$ в формуле (1.14) довольно слабо зависит от отношения ε_0/e_s , то по порядку величины $p_m \sim \sigma_s$, а следовательно, для второго слагаемого в правой части (3.5) справедлива оценка

$$\frac{(k - k_1)p_m}{\varepsilon_0 - \frac{2}{3}(k + \mu)\sigma_s^\circ} \sim \frac{e_s}{\varepsilon_0} \ll 1$$

Эта оценка позволяет записать

$$\rho_0 / r_m = 1 - \eta \quad (\eta \ll 1)$$

В линейном по η приближении из уравнения (3.5) вытекает

$$\eta = \frac{(k_1 + \mu)p_m}{3\varepsilon_0 - 2(k + \mu)\sigma_s^\circ} \approx \frac{(k_1 + \mu)p_m}{3\varepsilon_0} \quad (3.6)$$

Как и можно было ожидать, η мало чувствительна к величине σ_s° .

Если $r_0 < r_0$, то давление в жидкости становится отрицательным и с уменьшением r_0 быстро увеличивается по абсолютной величине. Легко проверить, что при удалении границы раздела от точки $r_0 = r_m$ на расстояние 2η давление по абсолютной величине достигает значения p_m

$$p = -p_m \quad \text{при } r_0 = r_m - 2\eta \quad (3.7)$$

Таким образом, уже при незначительном «вымерзании» жидкости в ней возникает очень большое по абсолютной величине отрицательное давление.

В силу того, что $\beta < 0$, при очень малых r_0 / r_m отрицательное давление, определяемое формулой (3.4), должно бы возрастать по абсолютной величине, как $(r_m / r_0)^{-\beta}$. Однако при этом интенсивность напряжений в некоторых точках по абсолютной величине оказалась бы превышающей предельное значение σ_s , т. е. материал в этих точках вышел бы за предел упругости. Последнее означает, что при малых r_0 линейная разгрузка в некоторых областях твердого тела переходит в пластическую нагрузку обратного знака. Действительно, анализ распределения интенсивности напряжений, которое находится из (2.6) и (2.7) при помощи (3.3), показывает, что при малых r_0 / r_m в области вблизи $r = r_m$ абсолютная величина σ становится очень большой и может достичь σ_s .

При выводе формул, анализируемых в настоящем параграфе, существенно предполагался линейный характер разгрузки, следовательно, не следует выходить за пределы, в которых такое предположение оправдывается. Поэтому в случае $\epsilon_0 \gg \epsilon_s$ всеми приведенными выше формулами можно пользоваться лишь при малых $(r_m - r_0) / r_m$, именно, при

$$\frac{r_m - r_0}{r_m} < \frac{\epsilon_s}{\epsilon_0}$$

Однако и при малых $(r_m - r_0) / r_m$, как следует хотя бы из (3.7), отрицательное давление в жидкости может оказаться очень большим.

Но известно [2], что состояние с отрицательным давлением неравновесно и обладает ограниченной устойчивостью. Другими словами, в таком состоянии жидкость стремится сжаться, оторвавшись от твердых стенок или образовав внутри себя полости. Эта тенденция сдерживается лишь тем, что при разрывах образуются новые поверхности, приводящие к возрастанию поверхностной энергии системы. Если же проигрыш в поверхностной энергии компенсируется уменьшением объемной энергии всестороннего растяжения, то жидкость неизбежно разорвется.

Если в жидкости объема $\sim r_m^3$ произойдет разрыв, то со звуковой скоростью давление в жидкости обратится в нуль и дальнейшее затвердевание будет происходить при $p = 0$. В результате этого в силу изменения удельного объема материала после полной кристаллизации жидкости в твердом теле образуется каверна объемом $\sim \epsilon_0 r_m^3$.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность И. М. Лифшицу за ценные дискуссии.

Поступила 9 IV 1960

Физико-технический институт АН УССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. ГИТТЛ, 1956.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. ГИТТЛ, 1951.