

КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

В. В. Болотин

(Москва)

Ряд технических задач требует исследования колебаний тонкостенных элементов типа оболочек при высокочастотном возбуждении. Если волновые числа достаточно велики, то для форм колебаний могут быть построены соответствующие асимптотические выражения. Эти выражения пригодны всюду, кроме областей, примыкающих к контуру или к другим линиям искажения; граничным условиям асимптотические выражения, вообще говоря, не удовлетворяют. Между тем, опыт показывает, что вибрирующие тонкостенные элементы разрушаются от усталости чаще всего именно вблизи линий искажения. Поэтому возникает мысль об отыскании таких решений, которые удовлетворяли бы всем граничным условиям на линии искажения и стремились бы к асимптотическим выражениям для форм колебаний при удалении во внутреннюю область. Найденные таким образом решения для пограничной области во многом напоминают решения, описывающие простой краевой эффект при статическом расчете оболочек. По аналогии со статическим краевым эффектом отклонение от асимптотических выражений для форм колебаний, имеющее место вблизи линий искажения, будем называть *динамическим краевым эффектом*. Мы увидим в дальнейшем, что эта аналогия имеет глубокий смысл.

Расчленив решения уравнений колебаний оболочек на асимптотическое решение для внутренней области и на решение, описывающее динамический краевой эффект, мы получим эффективный метод решения различных динамических задач теории пластин и оболочек. Он может быть применен как для анализа спектра собственных колебаний, так и для оценки напряжений, возникающих вблизи линий искажения при вынужденных колебаниях. Погрешность этого метода оказывается тем меньше, чем выше порядок частоты колебаний¹. В этом отношении асимптотический метод успешно дополняет обычно применяемые для решения задач теории оболочек прямые вариационные методы, дающие надежные результаты лишь для низших частот и форм колебаний.

Понятие о динамическом краевом эффекте при упругих колебаниях пластин было введено в работе [1]. В этой работе концепция динамического краевого эффекта была успешно применена для определения частот и форм собственных колебаний пластин, прямоугольных в плане, а также для оценки прочности пластин при вынужденных колебаниях со сплошным спектром возбуждения. В статье [2] дано приложение асимптотического метода для изучения спектра собственных частот различных типов пластин, и дано сопоставление с другими методами.

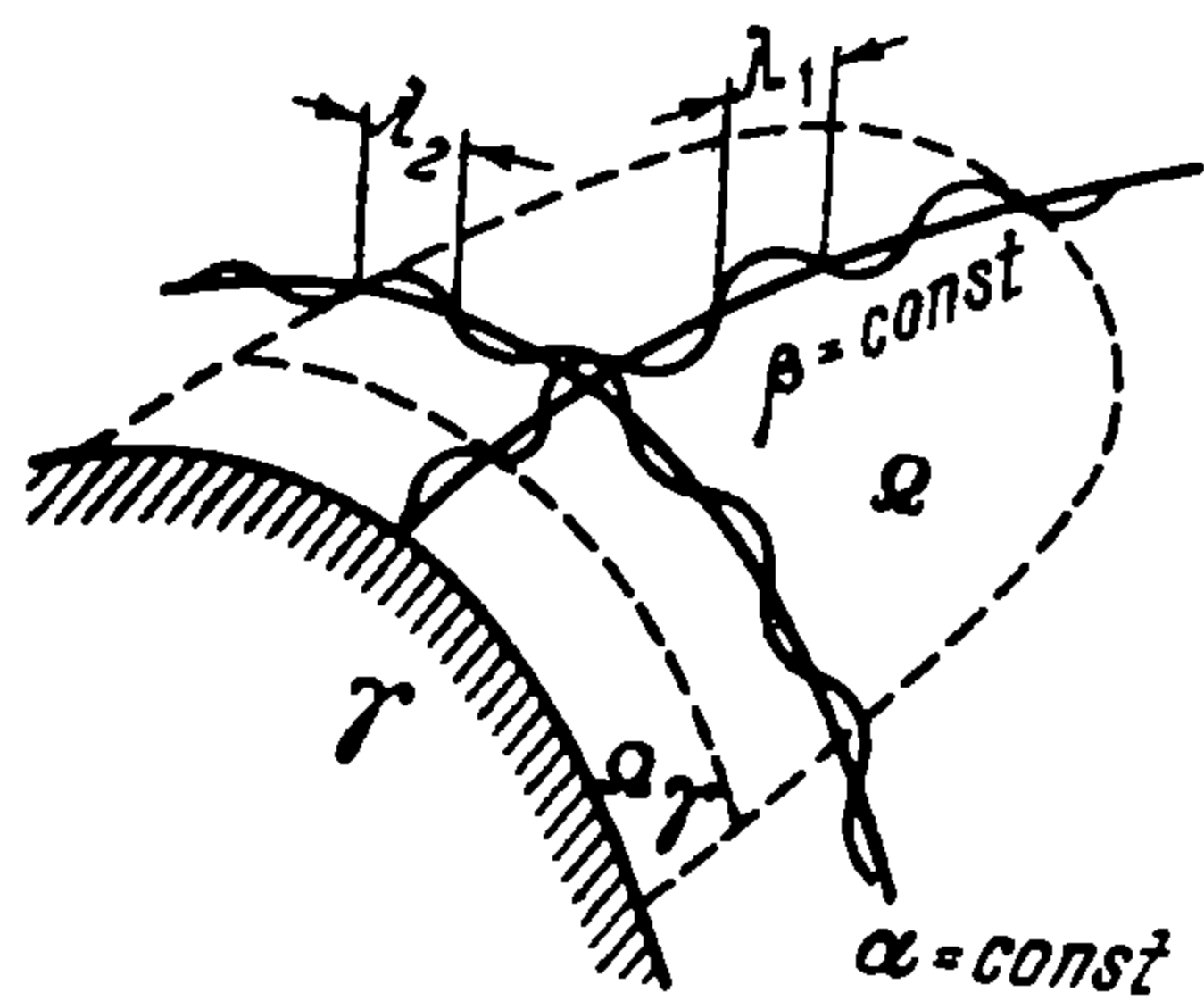
Ниже излагается теория динамического краевого эффекта в оболочках, дается классификация различных типов краевого эффекта для оболочек положительной, нулевой и отрицательной гауссовой кривизны и даются методы вычисления характеристик краевого эффекта вблизи линий искажения по известному решению для внутренней области. В работе используется вариант уравнений теории оболочек для состояний с большим показателем изменчивости [3] и широко применяется терминология работы [3].

¹ Вместе с тем, необходимо иметь в виду, что при колебаниях с высокими частотами уравнения классической теории пластин и оболочек могут оказаться непригодными и должны быть заменены уточненными уравнениями, учитывающими эффекты типа деформаций сдвига и инерции вращения.

1. Основные положения. Рассмотрим тонкую оболочку, совершающую свободные упругие колебания достаточно малой амплитуды. Отнесем срединную поверхность оболочки к ортогональной криволинейной системе координат α , β и предположим, что линии искажения γ (например, границы контура или оси подкрепляющих элементов) совпадают с линиями $\alpha = \text{const}$ или $\beta = \text{const}$. Ограничимся рассмотрением таких форм колебаний, которым соответствуют большие значения показателя изменчивости (большие волновые числа). Для таких форм уравнения теории оболочек могут быть взяты в виде

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta w - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{B}{A} \frac{1}{R_2} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta} \frac{A}{B} \frac{1}{R_1} \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \right) &= q \\ \frac{1}{Eh} \Delta\Delta\varphi + \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{B}{A} \frac{1}{R_2} \frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta} \frac{A}{B} \frac{1}{R_1} \frac{\partial w}{\partial\beta} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь w — нормальный прогиб, φ — функция тангенциальных усилий, q — интенсивность нормальной нагрузки, E — модуль упругости, h — толщина оболочки, D — цилиндрическая жесткость, A и B — коэффициенты Ляме для срединной поверхности, R_1 и R_2 — радиусы кривизны линий $\beta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$ соответственно, Δ — оператор Лапласа для срединной поверхности



Фиг. 1

$$\Delta = \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta} \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial\beta} \right)$$

Будем искать решения системы (1.1) для некоторой области Ω , примыкающей к линии искажения γ . Размеры области Ω будем считать малыми, чтобы изменения метрики срединной поверхности внутри этой области можно было пренебречь, полагая $A \approx \text{const}$, $B \approx \text{const}$, $R_1 \approx \text{const}$, $R_2 \approx \text{const}$. В то же время область Ω должна быть достаточно большой, чтобы в ее пределах укладывалось достаточно большое число полуволн (фиг. 1). Для форм колебаний с высокими значениями показателя изменчивости эти требования будут выполняться всегда.

Введя новые переменные $A d\alpha = dx_1$, $B d\beta = dx_2$, получим вместо (1.1) систему уравнений

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta w - \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{1}{Eh} \Delta\Delta\varphi + \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

В первое уравнение вместо q подставлена интенсивность нормальных сил инерции (γ — объемный вес материала оболочки, g — ускорение силы тяжести; тангенциальными составляющими сил инерции для форм колебаний с большими показателями изменчивости можно пренебречь).

Подстановка в уравнения (1.2) выражений

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, t) &= w_*(x_1, x_2) \exp(i\omega t) \\ \varphi(x_1, x_2, t) &= \varphi_*(x_1, x_2) \exp(i\omega t) \end{aligned}$$

где $w_*(x_1, x_2)$ и $\varphi_*(x_1, x_2)$ — формы колебаний, ω — вещественная частота, приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta w_* - \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \varphi_*}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \varphi_*}{\partial x_2^2} \right) - \frac{\gamma h \omega^2}{g} w_* &= 0 \\ \frac{1}{Eh} \Delta\Delta \varphi_* + \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_2^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Второе уравнение будет удовлетворено, если положить

$$w_* = \Delta\Delta \psi_*, \quad \varphi_* = -Eh \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \psi_*}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \psi_*}{\partial x_2^2} \right) \quad (1.4)$$

Тогда первое уравнение примет вид

$$\Delta\Delta\Delta\Delta\psi_* + \frac{Eh}{D} \left(\frac{1}{R_2^2} \frac{\partial^4 \psi_*}{\partial x_1^4} + \frac{2}{R_1 R_2} \frac{\partial^4 \psi_*}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{1}{R_1^2} \frac{\partial^4 \psi_*}{\partial x_2^4} \right) - \frac{\gamma h \omega^2}{gD} \Delta\Delta\psi_* = 0 \quad (1.5)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (1.5) имеет решение

$$\psi_* = \psi_0 \sin k_1 (x_1 - x_1^\circ) \sin k_2 (x_2 - x_2^\circ) \quad \left(k_1 = \frac{\pi}{\lambda_1}, k_2 = \frac{\pi}{\lambda_2} \right) \quad (1.6)$$

Здесь λ_1 и λ_2 — длины полуволн в направлении линий $\beta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$ (фиг. 1), x_1° и x_2° — некоторые предельные фазы, ψ_0 — нормировочная постоянная. Выражение (1.6) при определенных условиях, которые будут установлены ниже, и при определенном выборе предельных фаз x_1° и x_2° можно рассматривать как асимптотическое выражение для формы собственных колебаний, пригодное всюду, кроме областей Ω_γ , примыкающих к линиям искажения γ (оно удовлетворяет условиям на линии искажения лишь в том случае, если линия искажения представляет собой опертый край). Соответствующее асимптотическое выражение для частоты колебаний ω имеет вид

$$\omega^2 = \frac{gD}{\gamma h} \left[(k_1^2 + k_2^2)^2 + \frac{Eh}{D} \frac{(k_1^2 / R_2 + k_2^2 / R_1)^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \right] \quad (1.7)$$

Будем искать такие решения уравнения (1.5), которые удовлетворяют всем условиям на линии искажения γ и асимптотически приближаются к решению (1.6) при углублении во внутреннюю область Ω_0 . Если такие решения существуют, то это значит, что существует динамический краевой эффект. В противном случае будем говорить о *вырождении* динамического краевого эффекта.

Допустим, что линия искажения совпадает с линией $x_1 = 0$. Решения для окрестности линии искажения ищем в виде

$$\psi_*(x_1, x_2) = \Psi(x_1) \sin k_2 (x_2 - x_2^\circ) \quad (1.8)$$

где $\Psi(x_1)$ — неизвестная пока функция. Подстановка в (1.5) дает

$$\begin{aligned} \Psi^{\text{VIII}} - 4k_2^2 \Psi^{\text{VI}} + 6k_2^4 \Psi^{\text{IV}} - 4k_2^6 \Psi'' + k_2^8 \Psi + \\ + \frac{Eh}{D} \left(\frac{1}{R_2^2} \Psi^{\text{IV}} - \frac{2k_2^2}{R_1 R_2} \Psi'' + \frac{k_2^4}{R_1^2} \Psi \right) - \frac{\gamma h \omega^2}{gD} (\Psi^{\text{IV}} - 2k_2^2 \Psi'' + k_2^4 \Psi) = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Полагая, что $\Psi = C e^{sx_1}$, где C и s — константы, приходим к характеристическому уравнению

$$\begin{aligned} \Delta(s^2) = s^8 - 4k_2^2 s^6 + \left(6k_2^4 + \frac{Eh}{R_2^2 D} - \frac{\gamma h \omega^2}{gD} \right) s^4 - \\ - \left(4k_2^6 + \frac{2Eh k_2^2}{R_1 R_2 D} - 2k_2^2 \frac{\gamma h \omega^2}{gD} \right) s^2 + k_2^8 + \frac{k_2^4 Eh}{R_1^2 D} - k_2^4 \frac{\gamma h \omega^2}{gD} = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Если частота ω определяется по формуле (1.7), то, как следует из выражения (1.6), уравнение (1.10) содержит два чисто мнимых корня $s_{1,2} = \pm ik_1$. Эти корни целесообразно с самого начала отделить. Непосредственным делением убеждаемся в том, что

$$\Delta(s^2) = \Delta_1(s^2)(s^2 + k_1^2)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1(s^2) = & s^6 - (k_1^2 + 4k_2^2)s^4 + \\ & + k_2^2 \left\{ 2k_1^2 + 5k_2^2 - \frac{Eh}{D(k_1^2 + k_2^2)^2} \left[2k_1^2 \left(\frac{1}{R_1 R_2} - \frac{1}{R_2^2} \right) + k_2^2 \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) \right] \right\} s^2 - \\ & - k_2^4 \left\{ k_1^2 + 2k_2^2 - \frac{Eh}{D(k_1^2 + k_2^2)^2} \left[k_1^2 \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) + 2k_2^2 \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_1 R_2} \right) \right] \right\} = 0 \quad (1.11) \end{aligned}$$

Уравнение (1.11) является основным уравнением, которое полностью определяет свойства динамического краевого эффекта при колебаниях с волновыми числами k_1 и k_2 .

2. Классификация типов динамического краевого эффекта. а) Предположим, что все корни s^2 уравнения (1.11) различные, действительные и положительные. Тогда среди характеристических показателей s окажется три различных отрицательных и действительных показателя. Обозначим их $s_3 = -\alpha_1$, $s_4 = -\alpha_2$, $s_5 = -\alpha_3$. Отбрасывая в общем интеграле уравнения (1.9) члены, возрастающие с увеличением x_1 , получим

$$\Psi(x_1) = C_1 \sin k_1 x_1 + C_2 \cos k_1 x_1 + C_3 e^{-\alpha_1 x_1} + C_4 e^{-\alpha_2 x_1} + C_5 e^{-\alpha_3 x_1} \quad (2.1)$$

Имея это выражение, мы можем удовлетворить всем четырем условиям на краю $x_1 = 0$. В качестве недостающего пятого условия может быть взято условие нормировки или начальное условие. Если решение для внутренней области (1.6) нормировано, то в качестве пятого условия возьмем предельное соотношение

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \Psi(x_1) = \psi_0 \sin k_1 (x_1 - x_1^0) \quad (2.2)$$

Из этого условия может быть найдена предельная фаза x_1^0 .

Итак, если все корни s^2 различны, действительны и положительны, то решение типа динамического краевого эффекта существует и описывается последними тремя членами в выражении (2.1). Так как эти члены затухают, не осциллируя, будем называть такой эффект *неосциллирующим*.

б) При наличии кратных действительных положительных корней краевой эффект остается неосциллирующим. Так, если $\alpha_2 = \alpha_3$, то решение для области, примыкающей к краю $x_1 = 0$, имеет вид

$$\Psi(x_1) = C_1 \sin k_1 x_1 + C_2 \cos k_1 x_1 + C_3 e^{-\alpha_1 x_1} + C_4 e^{-\alpha_2 x_1} + x_1 C_5 e^{-\alpha_2 x_1} \quad (2.3)$$

в) Допустим, что уравнение (1.11) имеет один действительный положительный и два комплексно сопряженных корня. Тогда среди характеристических показателей найдутся три показателя, описывающие динамический краевой эффект: $s_3 = -\alpha_1$, $s_4 = -\alpha_2 + i\beta_2$, $s_5 = -\alpha_2 - i\beta_2$.

Решение для пограничной области принимает вид

$$\Psi(x_1) = C_1 \sin k_1 x_1 + C_2 \cos k_1 x_1 + C_3 e^{-\alpha_1 x_1} + C_4 e^{-\alpha_2 x_1} \sin \beta_2 x_1 + C_5 e^{-\alpha_2 x_1} \cos \beta_2 x_1 \quad (2.4)$$

Такой краевой эффект будем называть *осциллирующим*.

г) Если уравнение $\Delta_1(s^2) = 0$ имеет хотя бы один отрицательный или нулевой корень, то среди показателей s_1, s_2, \dots, s_8 не найдется трех имеющих отрицательные действительные части. При этом не может быть построено решение, обладающее свойством (2.2) и содержащее достаточный произвол, чтобы удовлетворить четырем условиям на линии $x_1 = 0$. По аналогии со статическим краевым эффектом [3] будем говорить, что имеет место *вырождение* динамического краевого эффекта.

3. Некоторые частные случаи. Остановимся на некоторых частных случаях, допускающих получение легко обзримых результатов.

а) *Динамический краевой эффект в пластинах.* Если $R_1 \rightarrow \infty, R_2 \rightarrow \infty$, то уравнение (1.11) существенно упрощается, распадаясь на множители

$$\Delta_1(s^2) = (s^2 - k_1^2 - 2k_2^2)(s^4 - 2k_2^2 s^2 + k_2^4) = 0 \quad (3.1)$$

Это соответствует разделению системы (1.3) на два уравнения

$$D\Delta\Delta w_* - \frac{\gamma h \omega^2}{g} w_* = 0, \quad \Delta\Delta\varphi_* = 0$$

Второе уравнение описывает плоское напряженное состояние в пластине, поэтому корни уравнения (3.1), ему соответствующие, должны быть отброшены. Решение для пограничной области принимает вид

$$\Psi(x_1) = C_1 \sin k_1 x_1 + C_2 \cos k_1 x_1 + C_3 \exp[-x_1 (k_1^2 + 2k_2^2)^{1/2}]$$

Трех постоянных C_1, C_2 и C_3 достаточно, чтобы удовлетворить двум условиям на линии искажения и предельному условию (2.2).

Для нормального прогиба $w_*(x_1, x_2)$ получаем выражение

$$w_*(x_1, x_2) = W(x_1) \sin k_2 (x_2 - x_2^0) \quad (3.2)$$

где $W(x_1)$ в соответствии с первым из соотношений (1.4) находится по формуле

$$W(x_1) = \Psi^{IV} - 2k_2^2 \Psi'' + k_2^4 \Psi \quad (3.3)$$

Отсюда приходим к формуле

$$W(x_1) = C_1^* \sin k_1 x_1 + C_2^* \cos k_1 x_1 + C_3^* \exp[-x_1 (k_1^2 + 2k_2^2)^{1/2}] \quad (3.4)$$

Здесь C_1^*, C_2^* и C_3^* — некоторые новые постоянные. Итак, в пластинах мы имеем неосциллирующий краевой эффект.

б) *Аналог простого краевого эффекта.* Предположим, что вблизи края $x_1 = 0$ $k_1^2 \gg k_2^2$. Это означает, что показатель изменчивости в направлении $\alpha = \text{const}$ мал по сравнению с показателем изменчивости в направлении $\beta = \text{const}$. При этом условии уравнение (1.11) может быть приближенно заменено уравнением

$$\Delta_1(s^2) = s^6 - k_1^2 s^4 = 0$$

Отбрасывая четыре нулевых и один положительный корень, представим решение в виде

$$\Psi(x_1) = C_1 \sin k_1 x_1 + C_2 \cos k_1 x_1 + C_3 e^{-k_1 x_1} \quad (3.5)$$

Нетрудно показать, что найденное решение является аналогом простого краевого эффекта в статике оболочек. Будем исходить из уравнения

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \frac{Eh}{R_2^2} w + \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

полагая, что выполнены все условия его применимости [3]. Подстановка $w(x_1, t) = W(x_1) \exp(i\omega t)$ приводит к уравнению

$$W^{IV} + \frac{Eh}{R_2^2 D} W - \frac{\gamma h \omega^2}{gD} W = 0$$

Асимптотическое выражение для формы колебаний и для частоты колебаний, как обычно, возьмем в виде

$$W(x_1) = w_0 \sin k_1 (x_1 - x_1^0), \quad \omega^2 = \frac{gD}{\gamma h} \left(k_1^4 + \frac{Eh}{R_2^2 D} \right)$$

Характеристическое уравнение

$$\Delta(s^2) = s^4 + \frac{Eh}{R_2^2 D} - \frac{\gamma h \omega^2}{gD} = 0$$

имеет корни $s_{1,2} = \pm ik_1$, $s_{3,4} = \pm k_1$. Таким образом, вновь приходим к решению типа (3.5).

То, что кривизна не оказывает в данном случае влияния на динамический краевой эффект, не является неожиданным. Требование $k_1^2 \gg k_2^2$ наряду с условием, чтобы k_2 также было достаточно велико, приводит к тому, что оболочка ведет себя практически как пластина. Заметим, что рассмотренное решение не имеет в динамической задаче такой же ценности, как его статический аналог: в отличие от статической задачи, оно полностью содержится в решении (3.4) при $k_1^2 \gg k_2^2$.

в) *Сферическая оболочка.* Если $R_1 = R_2$, то мы вновь приходим к уравнению (3.1). В отличие от пластины корни уравнения $s^4 - 2k_2^2 s^2 + k_2^4 = 0$ не являются здесь лишними. Решение принимает вид (2.3)

$$\Psi(x_1) = C_1 \sin k_1 x_1 + C_2 \cos k_1 x_1 + C_3 \exp[-x_1 (k_1^2 + 2k_2^2)^{1/2}] + C_4 \exp(-k_2 x_1) + x_1 C_5 \exp(-k_2 x_1) \quad (3.6)$$

Итак, мы имеем неосциллирующий краевой эффект с кратными корнями. Любопытно, что радиус кривизны не входит в решение (3.6).

4. Общий случай. Условия существования краевого эффекта. Рассмотрим подробнее общее уравнение (1.11), для чего введем безразмерные параметры

$$z_1 = k_1 \left(\frac{DR_1^2}{Eh} \right)^{1/4}, \quad z_2 = k_2 \left(\frac{DR_1^2}{Eh} \right)^{1/4}, \quad s_* = s \left(\frac{DR_1^2}{Eh} \right)^{1/4}, \quad \chi = \frac{R_1}{R_2} \quad (4.1)$$

Уравнение примет вид

$$s_*^6 - (z_1^2 + 4z_2^2) s_*^4 + z_2^2 \left[2z_1^2 + 5z_2^2 - \frac{2z_1^2 \chi (1 - \chi) + z_2^2 (1 - \chi^2)}{(z_1^2 + z_2^2)^2} \right] s_*^2 - z_2^4 \left[z_1^2 + 2z_2^2 - \frac{z_1^2 (1 - \chi^2) + 2z_2^2 (1 - \chi)}{(z_1^2 + z_2^2)^2} \right] = 0 \quad (4.2)$$

Как было показано, решения типа динамического краевого эффекта могут быть построены, если уравнение (4.2) не имеет отрицательных или нулевых корней s_* . По известной теореме Декарта уравнение (4.2) имеет только положительные или комплексно сопряженные корни s_* , если его коэффициенты образуют знакопередающуюся последовательность. Решающим условием в данном случае является условие отрицательности свободного члена

$$z_1^2 + 2z_2^2 - \frac{z_1^2(1 - \chi^2) + 2z_2^2(1 - \chi)}{(z_1^2 + z_2^2)^2} > 0$$

Рассмотрим это условие подробнее. Прежде всего заметим, что оно выполняется при всех z_1 и z_2 , если $\chi \geq 1$. Следовательно, при $R_1 \geq R_2$ динамический краевой эффект существует всегда. В частности, он будет всегда иметь место в оболочках нулевой гауссовой кривизны вблизи неасимптотического края.

Если $\chi < 1$, то краевой эффект существует лишь при достаточно больших показателях изменяемости. Введем полярные координаты:

$$z_1 = r \cos \varphi, \quad z_2 = r \sin \varphi$$

Краевой эффект не вырожден, если

$$r^4 > \frac{1 - \chi^2 + (1 - \chi)^2 \sin^2 \varphi}{1 + \sin^2 \varphi} \quad (4.3)$$

Так, для асимптотического края в оболочке нулевой гауссовой кривизны получаем условие $r > 1$, или

$$k_1^2 + k_2^2 > \sqrt{\frac{Eh}{DR_1^2}} \quad (4.4)$$

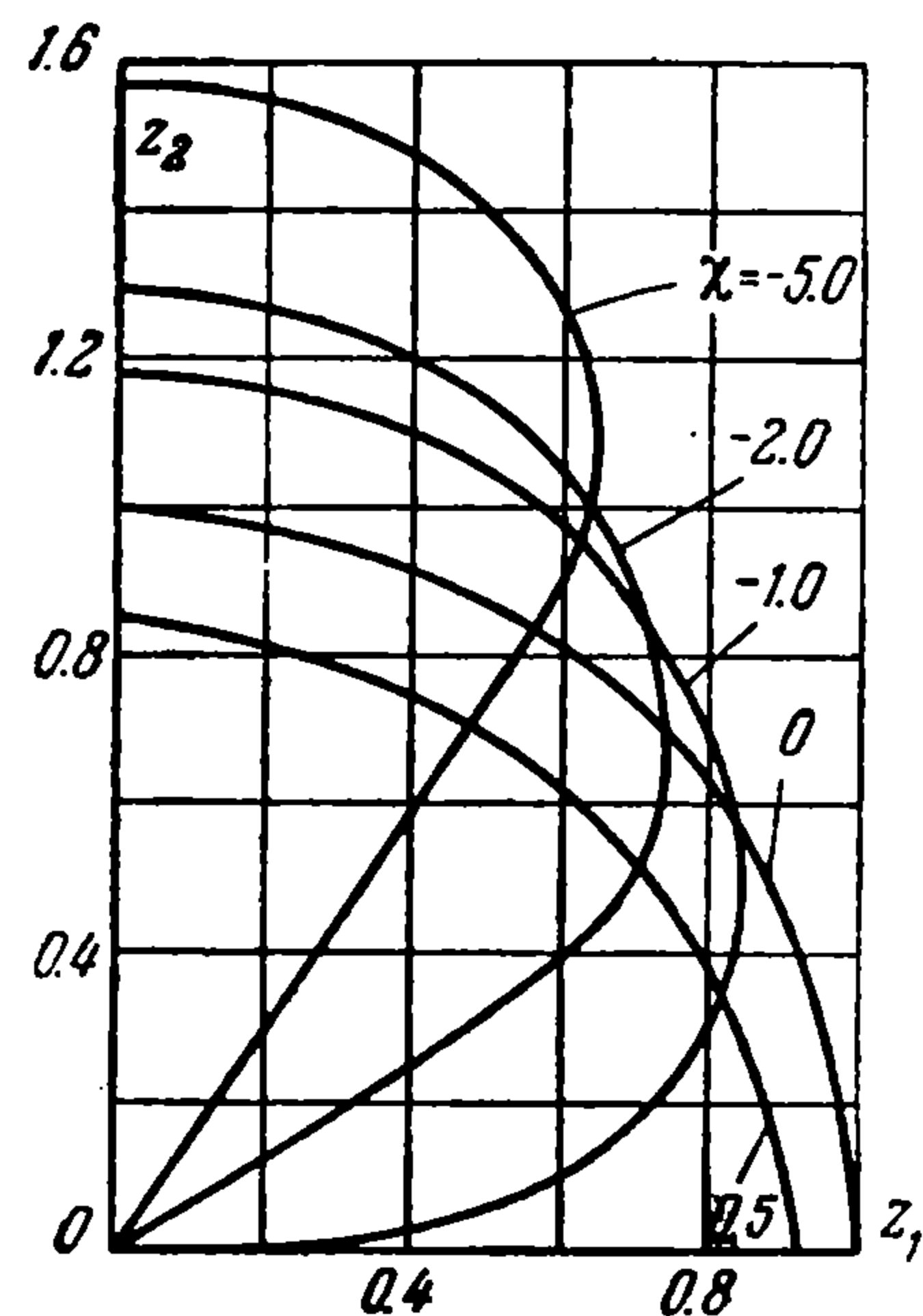
Область вырождения для различных отношений $\chi = R_1 / R_2$ показана на фиг. 2.

В качестве примера рассмотрим цилиндрическую панель с квадратным контуром со сторонами a . Для такой панели $k_1 = m\pi / a$, $k_2 = n\pi / a$, где m и n — вообще говоря, нецелые числа. Условие (4.4) принимает вид

$$m^2 + n^2 > \frac{a^2}{\pi^2 h R} \sqrt{12(1 - \mu^2)}$$

где μ — коэффициент Пуассона. Если $a / h = 100$, $R / a = 10$, $\mu = 0.25$, то для существования динамического краевого эффекта необходимо, чтобы $m^2 + n^2 > 3.41$. Это условие выполняется даже при $m = 2$, $n = 1$. Если же $a / h = 100$, $R / a = 1$, то получаем условие $m^2 + n^2 > 34.1$. Заметим, что статический краевой эффект у асимптотического края оболочки нулевой гауссовой кривизны всегда вырожден.

Для оболочек отрицательной гауссовой кривизны область вырождения с увеличением $|\chi|$ вытягивается вдоль оси z_2 (фиг. 2) и исчезает, когда $\chi \rightarrow -\infty$.



Фиг. 2

5. **Общий случай. Тип динамического краевого эффекта.** Введя замену переменных

$$s_*^2 = s_{**}^2 + \frac{1}{3}(z_1^2 + 4z_2^2) \quad (5.1)$$

вместо уравнения (4.2) получим

$$s_{**}^6 + 3ps_{**}^2 + 2q = 0 \quad (5.2)$$

где

$$p = -\frac{1}{9}\{r^4 + 3\sin^2\varphi [2\chi(1-\chi) + (1-\chi)^2\sin^2\varphi]\} \quad (5.3)$$

$$q = -\frac{1}{27}\{r^6 + 9r^2\sin^2\varphi [\chi(1-\chi) - (1-\chi)^2\sin^2\varphi]\}$$

Дискриминант уравнения (5.2) имеет вид

$$p^3 + q^2 = -\frac{1}{27}\sin^4\varphi(1-\chi)^2 f(r) \quad (5.4)$$

причем

$$f(r) = r^8 + r^4[\chi^2 + 10\chi(1-\chi)\sin^2\varphi - 2(1-\chi)^2\sin^4\varphi] + \\ + (1-\chi)[2\chi - (1-\chi)\sin^2\varphi]^3\sin^2\varphi \quad (5.5)$$

Краевой эффект осциллирует, если $p^3 + q^2 > 0$, и не осциллирует, если $p^3 + q^2 < 0$. Если $p^3 + q^2 = 0$, то это значит, что решение имеет вид (2.3). При этом считается, разумеется, что условие (4.3) выполнено.

Исследуя формулы (5.4) и (5.5), нетрудно доказать несколько общих утверждений. Если $r \rightarrow \infty$, то знак $f(r)$ определяется знаком первого члена и, следовательно, $p^3 + q^2 < 0$. Этот результат является вполне естественным¹, если учесть, что при больших показателях изменчивости оболочка ведет себя практически как пластина.

При малых r краевой эффект может оказаться осциллирующим. Это справедливо как для оболочек положительной гауссовой кривизны, так и для оболочек отрицательной гауссовой кривизны. Лишь при $0 < \chi < 1$ краевой эффект остается неосциллирующим при всех значениях r . В самом деле, в этой области уравнение (5.5) вообще не имеет положительных действительных корней.

Поведение краевого эффекта для различных отношений $\chi = R_1 / R_2$ показано на фиг. 3 во фронтальной диметрической проекции. Область осциллирующего краевого эффекта обозначена редкой штриховкой, область вырождения — густой.

Для исследования краевого эффекта вблизи неасимптотического края оболочки нулевой гауссовой кривизны уравнение (4.2) непригодно (в этом случае $R_1 \rightarrow \infty$). Введя безразмерные параметры

$$\zeta_1 = k_1 \left(\frac{DR_2^2}{Eh} \right)^{1/4}, \quad \zeta_2 = k_2 \left(\frac{DR_2^2}{Eh} \right)^{1/4}, \quad s_{**}^2 = s^2 \left(\frac{DR_2^2}{Eh} \right)^{1/2} - \frac{1}{3}(\zeta_1^2 + 4\zeta_2^2)$$

и переходя к полярным координатам $\zeta_1 = \rho \cos \varphi$, $\zeta_2 = \rho \sin \varphi$, получим

¹ Исключение составляет случай сферической оболочки ($\chi = 1$) и аналога простого краевого эффекта ($\sin \varphi = 0$), для которых $p^3 + q^2 = 0$ при всех r .

уравнение (5.2) с коэффициентами

$$p = -\frac{1}{9} [\rho^4 - 3 \sin^2 \varphi (2 - \sin^2 \varphi)]$$

$$q = -\frac{1}{27} [\rho^6 - 9\rho^2 \sin^2 \varphi (1 + \sin^2 \varphi)]$$

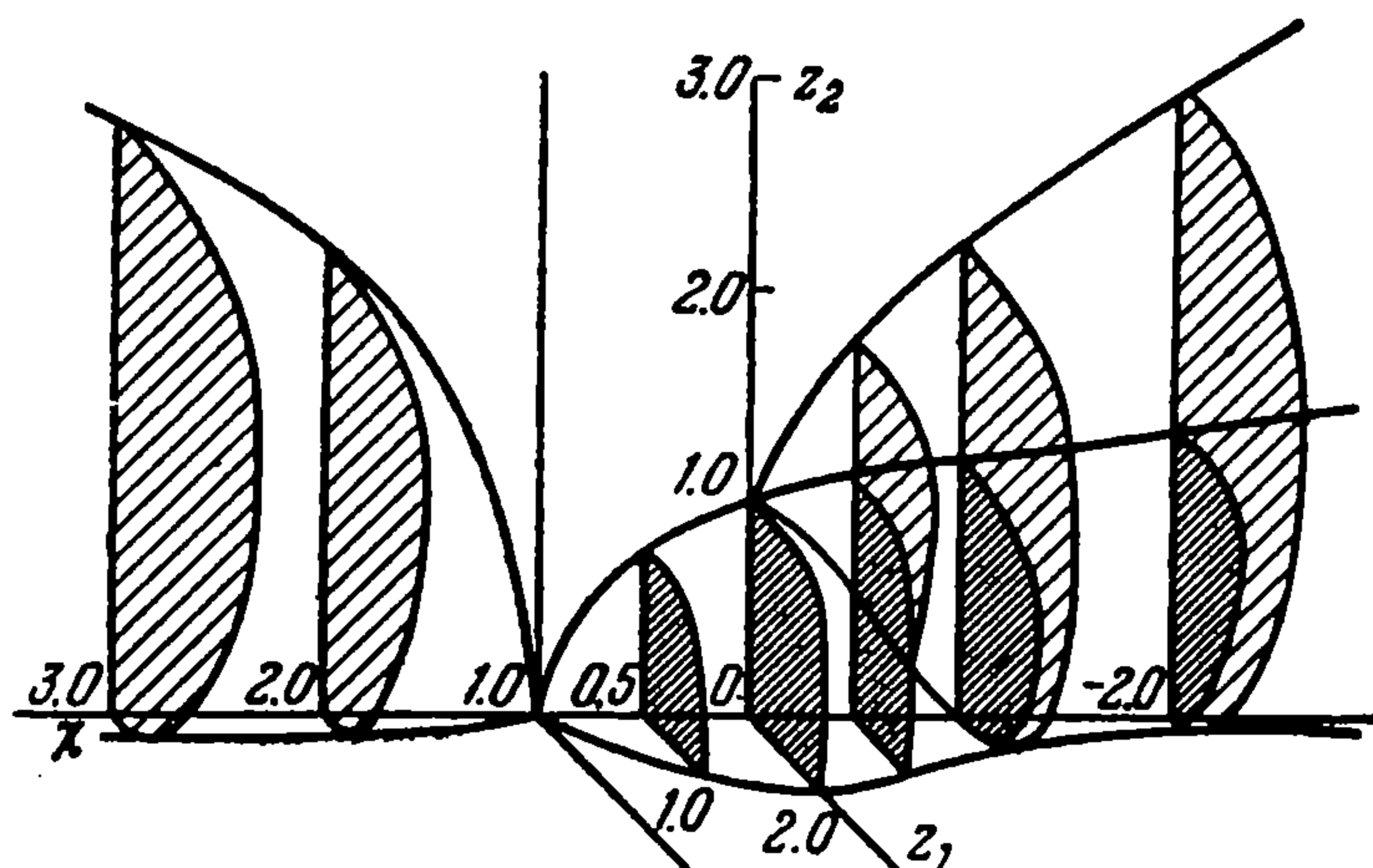
Дискриминант

$$p^3 + q^2 = -\frac{1}{27} \sin^4 \varphi [\rho^8 + \rho^4 (1 - 10 \sin^2 \varphi - 2 \sin^4 \varphi) - \sin^2 \varphi (2 - \sin^2 \varphi)^3]$$

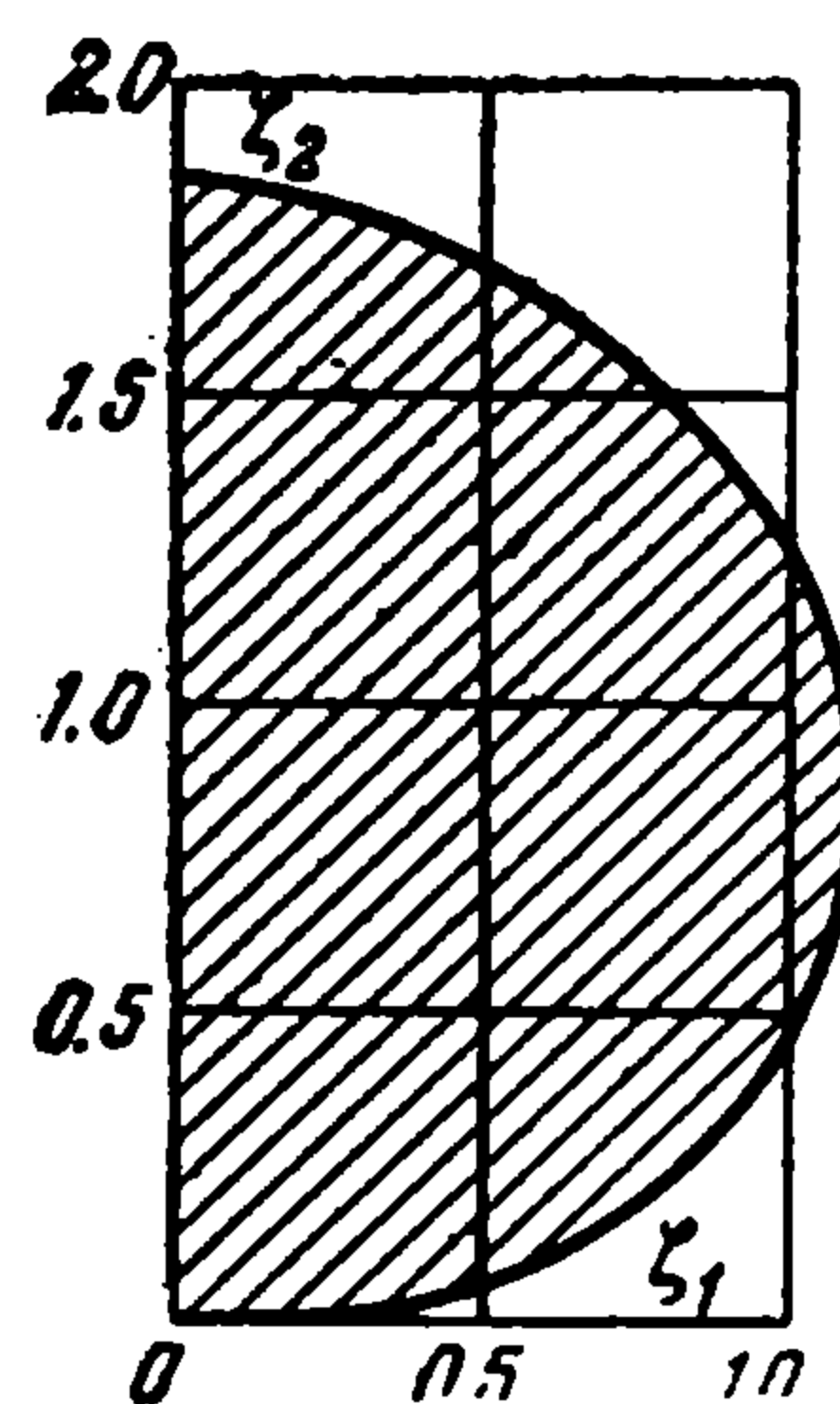
положителен, если $\rho < \rho_0$, где

$$2\rho_0^4 = -1 + 10 \sin^2 \varphi + 2 \sin^4 \varphi + (1 + 4 \sin^2 \varphi)^{3/2} \quad (5.6)$$

Область, определяемая неравенством $\rho < \rho_0$, обозначена на фиг. 4 штриховкой.



Фиг. 3



Фиг. 4

Для замкнутой круговой цилиндрической оболочки с радиусом R и длиной a имеем $k_1 = m\pi / a$, $k_2 = n / R$, где m и n — волновые числа.

Условие $\rho < \rho_0$ принимает вид

$$m^2 \left(\frac{\pi R}{a}\right)^2 + n^2 < \frac{R}{h} \rho_0^2 \sqrt{12(1 - \mu^2)} \quad (5.7)$$

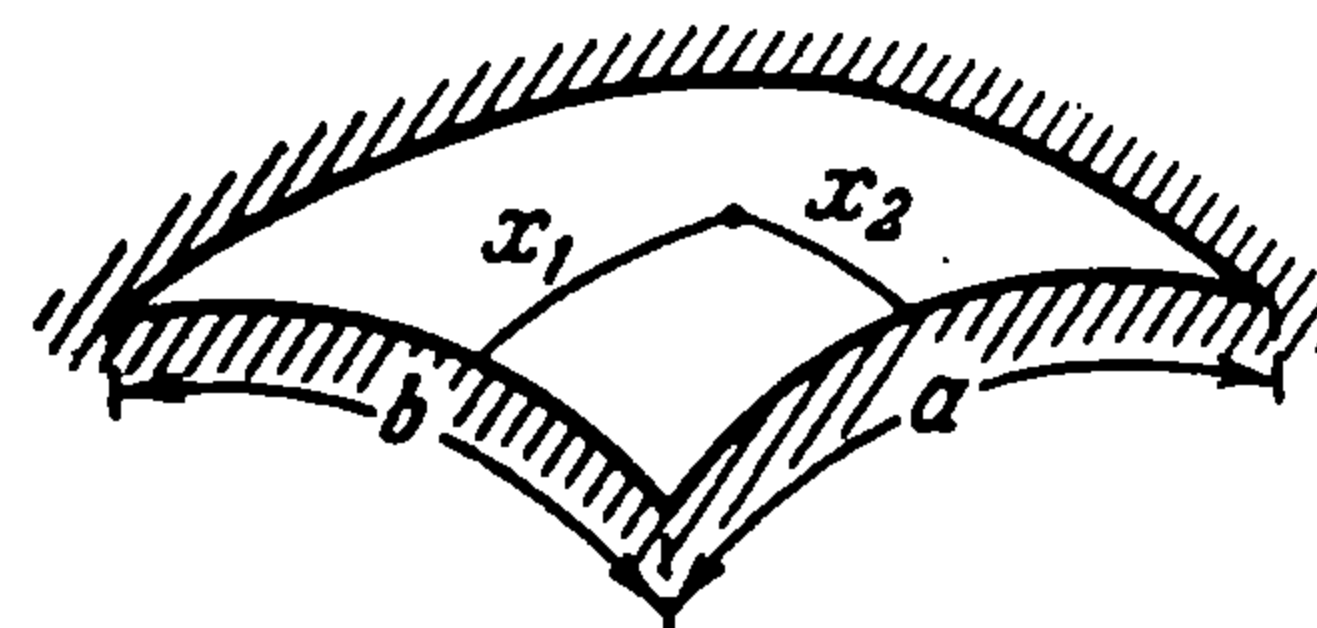
Если это условие выполнено, то краевой эффект осциллирует. Пусть, например, $\pi R = a$, $R/h = 100$; тогда вместо (5.7) получим:

$$m^2 + n^2 < 336 \rho_0^2$$

Это условие выполняется даже для очень высоких частот спектра, если только n не слишком мало.

6. Некоторые приложения. Ряд применений теории динамического краевого эффекта к задачам о колебаниях пластин был рассмотрен в работах [1,2]. Здесь мы применим эту теорию для исследования спектра частот и форм собственных колебаний сферической панели, которая закреплена по контуру, ограниченному четырьмя ортогональными линиями кривизны (фиг. 5). Колебания такой оболочки описываются уравнением (1.5) при $R_1 = R_2 = R$ и краевых условиях

$$\begin{aligned} u_* = v_* = w_* = \frac{\partial w_*}{\partial x_1} = 0 & \quad (x_1 = 0 \text{ и } x_1 = a) \\ u_* = v_* = w_* = \frac{\partial w_*}{\partial x_2} = 0 & \quad (x_2 = 0 \text{ и } x_2 = b) \end{aligned} \quad (6.1)$$



Фиг. 5

Здесь u_* и v_* — тангенциальные смещения в направлении линий $x_2 = \text{const}$ и $x_1 = \text{const}$ соответственно.

Рассмотрим вначале решение вблизи края $x_1 = 0$. По аналогии с выражением (1.8) будем иметь

$$\begin{aligned} u_*(x_1, x_2) &= U(x_1) \sin k_2(x_2 - x_2^0), & v_*(x_1, x_2) &= V(x_1) \cos k_2(x_2 - x_2^0) \\ w_*(x_1, x_2) &= W(x_1) \sin k_2(x_2 - x_2^0) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Используя формулы (3.3) и (3.6), получим

$$W(x_1) = C_1^* \sin k_1 x_1 + C_2^* \cos k_1 x_1 + C_3^* \exp[-x_1(k_1^2 + 2k_2^2)^{1/2}] \quad (6.3)$$

где $C_j^* = (k_1^2 + k_2^2)^2 C_j$. Таким образом, из общего решения (3.6) выпали члены, содержащие две постоянные интегрирования. Однако эти две постоянные вновь появятся при определении тангенциальных перемещений u_* и v_* .

Будем исходить из системы уравнений в перемещениях, равноценной в смысле упрощающих предположений системе (1.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_*}{\partial x_1^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_*}{\partial x_2^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_*}{\partial x_1 \partial x_2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu}{R_2} \right) \frac{\partial w_*}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_*}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v_*}{\partial x_2^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_*}{\partial x_1^2} - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\mu}{R_1} \right) \frac{\partial w_*}{\partial x_2} &= 0 \\ - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu}{R_2} \right) \frac{\partial u_*}{\partial x_1} - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\mu}{R_1} \right) \frac{\partial v_*}{\partial x_2} + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2\mu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) w_* + \\ + \frac{h^2}{12} \Delta \Delta w_* - \frac{1-\mu^2}{Eh} \frac{\gamma h \omega^2}{g} w_* &= 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Подставляя сюда (6.2), получим при $R_1 = R_2 = R$

$$\begin{aligned} U'' - \frac{1-\mu}{2} k_2^2 U - \frac{1+\mu}{2} k_2 V' &= \frac{1+\mu}{R} W' \\ \frac{1+\mu}{2} k_2 U' - k_2^2 V + \frac{1-\mu}{2} V'' &= \frac{1+\mu}{R} k_2 W \\ - \frac{1+\mu}{R} U' + \frac{1+\mu}{R} k_2 V &= \\ = - \frac{2(1+\mu)}{R^2} W - \frac{h^2}{12} (W^{IV} - 2k_2^2 W'' + k_2^4 W) + \frac{1-\mu^2}{Eh} \frac{\gamma h \omega^2}{g} W \end{aligned} \quad (6.5)$$

Для определения U и V могут быть взяты любые два уравнения из системы (6.5), например первые два. Нетрудно видеть, что характеристическое уравнение для системы, состоящей из первых двух уравнений, имеет две пары кратных корней, равных $\pm k_2$. Поэтому при составлении решения этой системы, обладающего свойствами краевого эффекта, к частному решению $U_0(x_1)$ и $V_0(x_1)$ добавляются по два члена типа утраченных членов из решения (3.6). Число постоянных интегрирования, следовательно, вновь становится равным пяти, т. е. краевой эффект может быть полностью определен. Фактические вычисления приводят к формулам

$$\begin{aligned} U(x_1) &= U_0(x_1) + C_4 e^{-k_2 x_1} + x_1 C_5 e^{-k_2 x_1} \\ V(x_1) &= V_0(x_1) - \left(C_4 - \frac{3-\mu}{1+\mu} \frac{C_5}{k_2} \right) e^{-k_2 x_1} - x_1 C_5 e^{-k_2 x_1} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Из предыдущего вытекает, что тангенциальные краевые условия не влияют на поведение нормального прогиба w . Это позволяет весьма просто получить асимптотические оценки для частот собственных колебаний и волновых чисел.

Подчиняя выражения (6.3) условиям $W(0) = W'(0) = 0$, получим

$$W(x_1) = \sin k_1 x_1 - \frac{k_1}{(k_1^2 + 2k_2^2)^{1/2}} \{ \cos k_1 x_1 - \exp[-x_1 (k_1^2 + 2k_2^2)^{1/2}] \} \quad (6.7)$$

Для края $x_1 = a$ аналогично получим

$$W(x_1) = c \sin k_1 (a - x_1) - \frac{ck_1}{(k_1^2 + 2k_2^2)^{1/2}} \{ \cos k_1 (a - x_1) - \exp[-(a - x_1) (k_1^2 + 2k_2^2)^{1/2}] \}$$

где c — некоторая новая постоянная.

Потребуем теперь, чтобы во внутренней области оба решения совпали. Это требование можно, разумеется, выполнить лишь с погрешностью, имеющей порядок

$$\varepsilon \sim \exp[-\frac{1}{2} a (k_1^2 + 2k_2^2)^{1/2}] \quad (6.8)$$

Не останавливаясь на вычислениях, приведем результаты. Решения распадаются на симметричные относительно середины оболочки ($x_1 = 1/2 a$)

$$c = 1, \quad \operatorname{ctg} \frac{k_1 a}{2} = - \frac{k_1}{(k_1^2 + 2k_2^2)^{1/2}} \quad (6.9)$$

и антисимметричные решения

$$c = -1, \quad \operatorname{tg} \frac{k_1 a}{2} = \frac{k_1}{(k_1^2 + 2k_2^2)^{1/2}} \quad (6.10)$$

Уравнения (6.9) и (6.10) позволяют найти параметр k_1 при заданном k_2 .

Аналогичные результаты получим, рассматривая динамический крайовой эффект у краев $x_2 = 0$ и $x_2 = b$ и «склеивая» решения во внутренней области. В результате получим замкнутую систему уравнений, содержащих k_1 и k_2 .

Формы собственных колебаний оболочки распадаются на четыре группы по типам симметрии. Для первого типа (симметричные в обоих направлениях формы) имеем систему

$$\operatorname{ctg} \frac{k_1 a}{2} = - \frac{k_1}{(k_1^2 + 2k_2^2)^{1/2}}, \quad \operatorname{ctg} \frac{k_2 b}{2} = - \frac{k_2}{(k_2^2 + 2k_1^2)^{1/2}} \quad (6.11)$$

Для антисимметричных в обоих направлениях форм имеем

$$\operatorname{tg} \frac{k_1 a}{2} = \frac{k_1}{(k_1^2 + 2k_2^2)^{1/2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{k_2 b}{2} = \frac{k_2}{(k_2^2 + 2k_1^2)^{1/2}} \quad (6.12)$$

Два смешанных типа получим, комбинируя по одному уравнению из систем (6.11) и (6.12).] Отношение $\nu = k_2 / k_1$, можно найти из уравнения

$$\nu = \frac{a \operatorname{arc} \operatorname{tg} (1 - 2\nu^{-2})^{1/2} + 1/2 n \pi}{b \operatorname{arc} \operatorname{tg} (1 + \nu^2)^{1/2} + 1/2 m \pi} \quad (6.13)$$

где обратные тригонометрические функции понимаются в смысле главных значений, m и n — целые положительные числа (волновые числа).

Уравнение (6.13) легко решается по методу последовательных приближений, причем в качестве нулевого приближения может быть взято асимптотическое значение $\nu = na / mb$.

Результаты вычислений для случая $a = b$ сведены в таблицу. В этой таблице α — коэффициент в формуле для частоты (1.7)

$$\omega^2 = \frac{gD}{\gamma ha^4} \left(\pi^4 \alpha^2 + \frac{Eh}{DR^2} \right)$$

Заметим, что для форм колебаний, для которых $k_1 = k_2$, формулы (6.11) и (6.12) дают

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a}{m + 1/3} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Отсюда находим, что для этих форм $\alpha = 2(m + 1/3)^2$.

m	n	v	a / λ ₁	a / λ ₂	α		Расхождение в процентах
					Данный метод	Решение Игути	
1	1	1.0000	4/3	4/3	3.556	3.646	2.53
2	1	2.0265	2.4372	1.2027	7.386	7.437	0.69
2	2	2.0000	7/3	7/3	10.889	10.965	0.70
3	1	3.0377	3.4688	1.1420	13.336	13.395	0.42
3	2	1.5079	3.4012	2.2556	16.656	16.717	0.37
3	3	1.0000	10/3	10/3	22.222	—	—
4	1	4.0432	4.4816	1.1084	21.313	—	—
4	2	2.0132	4.4366	2.2038	24.540	24.631	0.36
4	3	1.3370	4.3832	3.2784	29.960	—	—
4	4	1.0000	13/3	13/3	37.556	—	—

Рассмотренная задача не имеет, как известно, точного решения. Все же для заземленной пластины ($R \rightarrow \infty$) имеются довольно надежные результаты Игути [4], который искал решение в виде ряда по функциям, удовлетворяющим всем условиям на контуре и удерживал при вычислениях до шести членов ряда. Полученное им значение для основной частоты следует, по-видимому, считать точным. Сопоставление с результатами Игути дано в последних столбцах таблицы. Как видно из таблицы, даже при $m = n = 1$ расхождение между результатами весьма невелико. Это становится понятным, если учесть, что рассмотренные решения, учитывающие динамический краевой эффект, удовлетворяют точно уравнениям (1.3) и всем условиям на контуре. Погрешность происходит лишь из-за того, что «склеивание» решений, построенных для двух противоположных кромок, производится с ошибкой, порядок которой оценивается формулой (6.8). Подставляя в формулу (6.8) $k_1 = k_2 = 4\pi / 3a$, найдем, что $\epsilon \sim \exp(-2\pi / \sqrt{3}) \approx 0.027$, что близко к расхождению, указанному в последнем столбце таблицы. Как можно судить по характеру сделанных упрощений, данный метод дает для собственных частот приближение снизу. Для высших частот погрешность будет меньше, чем расхождения, указанные в таблице, так как метод Игути дает приближение сверху.

Поступила 14 I 1960

Институт механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Динамический краевой эффект при колебаниях пластинок. Инж. сборн., 1960, т. 31.
2. Болотин В. В., Макаров Б. П., Мишенков Г. В., Швейко Ю. Ю. Асимптотический метод исследования спектра собственных частот упругих пластинок. Сб. Расчеты на прочность. Машгиз, 1960, т. 6.
3. Гольденвейзер А. Л. Теория тонких упругих оболочек. Гостехиздат, 1953.
4. Iguchi S. Die Biegungsschwingungen der vierseitig eingespannen rechteckigen Platten. Ing.-Arch., 1937, Bd. 8, № 1.