Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

И. Я. Кац, Н. Н. Красовский

(Свердловск)

Рассматриваются задачи устойчивости для систем, содержащих параметры, являющиеся случайными функциями времени. Постановка задачи обобщает известную проблему устойчивости по Ляпунову [1]. Описывается развитие метода функций Ляпунова для рассматриваемой задачи в соответствии с тем путем, который был намечен в статье [2] при исследовании задач оптимального регулирования в системах со случайными возмущениями [1].

§ 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$dx / dt = f(x, t, y(t)) \tag{1.1}$$

где x — n-мерный вектор $\{x_1, \ldots, x_n\}$ обобщенных координат системы, f — вектор-функция $\{f_1, \ldots, f_n\}$, функции f_i непрерывны по всем аргументам и удовлетворяют условиям Липшица по переменным x_i

$$|f_i(x'', t, y(t)) - f_i(x', t, y(t))| \leqslant L \|x'' - x'\| \tag{1.2}$$

в области

$$\|x\| < H, \qquad t \geqslant t_0 \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем $\|x\| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. Функция $y(t)$ описывает случайный марковский процесс.

В этой статье ограничимся рассмотрением частного случая, когда $y(t)$ — однородная марковская цепь с конечным числом состояний [5] (стр. 214—231), т. е. функция $y(t)$ может принимать в каждый момент времени одно значение y_i из конечного множества $Y(y_1, \ldots, y_r)$, причем вероятность $p_{ij}(\Delta t)$ смены значений $y_i \to y_j$ за время Δt удовлетворяет условию

$$p_{ij}(\Delta t) = \alpha_{ij}\Delta t + o(\Delta t) \qquad (i \neq j) \qquad (\alpha_{ij} = \mathrm{const}) \tag{1.4}$$

где символ $o(\Delta t)$ обозначает бесконечно малую величину более высокого порядка малости, чем Δt. Не уменьшая общности, будем полагать, что $y_i = i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Рассуждения, приведенные ниже, сохраняют силу и для случайных функций $y(t)$ более общей природы, однако получение эффективных критериев устойчивости в общем случае затруднительно.

Кроме того, будем предполагать, что выполняются равенства

$$f_i(0, t, y(t)) \equiv 0 \qquad (y \in Y, \ t \geqslant 0) \tag{1.5}$$

---

[1] При оформлении настоящей работы авторам стало известно из обзорной статьи Р. Е. Калмана и Дж. Е. Бертрама [3], что задачи устойчивости систем со случайными параметрами рассматривались в статье Дж. Е. Бертрама и П. Е. Сарачика [4]. В статье [4] даны определения устойчивости в среднем и приведены соответствующие теоремы, известным образом отвечающие нашим результатам из § 4. Отметим также, что задачи статистической устойчивости рассматривались А. А. Андроновым, Л. С. Понтрягиным, В. В. Степановым, И. И. Воровичем и рядом других авторов в аспектах, отличных от рассматриваемого здесь.

Решением системы (1.1) будем называть $(n+1)$-мерную случайную вектор-функцию $\{x(x_0, t_0, y_0; t),\ y(t_0, y_0; t)\}$, реализации которой $\{x^{(p)}(x_0, t_0, y_0; t),\ y^{(p)}(t_0, y_0; t)\}$ удовлетворяют уравнениям (1.1).

Следующие определения обобщают известные определения устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову [1] (стр. 19—20). Обобщение получается естественной заменой обычной сходимости $x \to 0$, являющейся базой определений Ляпунова, сходимостью по вероятности [5] (стр. 15).

Определение 1.1. Решение $x = 0$ системы (1.1) (невозмущенное движение) будем называть устойчивым по вероятности, если для любых, сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $p > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всякого решения системы (1.1), которое в момент времени $t = t_0$ удовлетворяет неравенству

$$\| x_0 \| = \| x(t_0) \| \leqslant \delta \tag{1.6}$$

будет при всех $t \geqslant t_0$ выполняться условие

$$p_t(\| x(x_0, t_0, y_0; t) \| < \varepsilon) > 1 - p \tag{1.7}$$

Здесь $p_t(\| x \| < \varepsilon)$ — вероятность того, что в момент времени $t \geqslant t_0$ выполняется неравенство [1]

$$\| x(x_0, t_0, y_0; t) \| < \varepsilon \quad \text{при } y_0 \in Y$$

Решение $x = 0$ системы (1.1) назовем устойчивым по вероятности на интервале времени T при заданной оценке $\Delta(\varepsilon, p)$ (T — конечное число или $T = \infty$), если решения с начальными условиями, удовлетворяющими неравенству (1.6), при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ удовлетворяют неравенству (1.7), причем можно указать число $\delta \geqslant \Delta(\varepsilon, p)$.

Определение 1.2. Невозмущенное движение $x = 0$ будем называть асимптотически устойчивым по вероятности, если оно устойчиво в смысле определения (1.1) и, кроме того, при любом $\eta > 0$ выполняется условие

$$\lim p_t (\| x \| < \eta) = 1 \quad \text{при } t \to \infty \tag{1.8}$$

для всех решений с начальными данными

$$\| x_0 \| < H_0 \tag{1.9}$$

где H_0 — некоторая постоянная, определяющая область притяжения невозмущенного движения.

Может представить интерес также следующее определение асимптотической устойчивости, которое учитывает, что уравнения (1.1) определены лишь в конечной области (1.3).

Пусть известно, что любое решение $x(x_0,\ t_0,\ y_0;\ t)$ при $\| x_0 \| \leqslant H_0$, $y_0 \in Y$, $t_0 \geqslant 0$ удовлетворяет условию

$$p_t(\| x(x_0,\ t_0,\ y_0;\ t) \| < H) > 1 - p\,(H) \tag{1.10}$$

[1] При этом, поскольку уравнения (1.1) определены лишь в области H, которая, вообще говоря, не совпадает со всем пространством, можно предполагать, что реализации, для которых в некоторый момент $t = t_1^{(p)}$ выполняется условие $\| x^{(p)}(t_1^{(p)}) \| = \varepsilon$, обрываются и рассматриваются только на интервале времени $t_0 \leqslant\ < t_1^{p)}$, когда все время $\| x(t) \| < \varepsilon$. Тогда $p_t(\| x(t) \| < \varepsilon)$ можно рассматривать как вероятность существования реализаций в момент времени t.

Тогда будем говорить, что решение $x = 0$ системы (1.1) $p(H)$-асимптотически устойчиво относительно начальных возмущений из области (1.9), если наряду с выполнением условий определения 1.1 выполнено условие

$$\lim p_t(\|x\| < \eta) \geqslant 1 - p(H) \quad \text{при } t \to \infty \tag{1.11}$$

Невозмущенное движение $x = 0$ назовем асимптотически устойчивым по вероятности на интервале времени T при заданных оценках $p(H)$, $H_0(H)$, $\tau(\eta, p)$, если любое решение $x(x_0, t_0, y_0; t)$ при $\|x\| \leqslant H_0$, $y_0 \in Y$ удовлетворяет условиям

$$p_t(\|x\| < H) > 1 - p(H) \quad \text{при } t \in [t_0, t_0 + T] \tag{1.12}$$

$$p_t(\|x\| < \eta) \geqslant 1 - p \quad \text{при } t \in [t_0, + \tau(\eta, p), t_0 + T] \tag{1.13}$$

Здесь естественно предполагается, что

$$p \geqslant p(H) \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant T) \tag{1.14}$$

В дальнейшем момент t_0, если не оговорено противное, будем считать фиксированным.

§ 2. Имея в виду сформулировать критерии, аналогичные теоремам второго метода Ляпунова, введем определения, соответствующие для данного случая известным понятиям этого метода. Будем рассматривать скалярные функции $v(x, t, y)$, определенные и непрерывно дифференцируемые в области (1.3) и обращающиеся в нуль при $x = 0$.

Определение 2.1. Функцию $v(x, t, y)$ будем называть определенно положительной (определенно отрицательной), если $v(x, t, y) \geqslant w(x)$, $(v(x, t, y) \leqslant - w(x))$ при всех $y \in Y$, $t \geqslant t_0$, где $w(x)$ — функция определенно-положительная в смысле Ляпунова [1] (стр. 80). Функцию $v(x, t, y)$ будем называть знакопостоянной, если в области (1.3) она не может принимать значений какого-либо определенного знака. В частности, функция $v(x, t, y)$, определенно положительная по Ляпунову при любом $y \in Y$, где Y — конечное множество, будет, очевидно, определенно положительна в нашем смысле. Если допустить бесконечное множество значений y, то для определенной положительности в смысле определения 2.1 достаточно, чтобы определенная положительность по Ляпунову была равномерной по $y \in Y$.

Определение 2.2. Функция $v(x, t, y)$ допускает бесконечно малый высший предел, если существует непрерывная функция $W(x)$, удовлетворяющая условиям

$$v(x, t, y) \leqslant W(x), \quad W(0) = 0 \quad \text{при } \|x\| < H, \ t \geqslant t_0, \ y \in Y$$

Определение 2.3. Функция $v(x, t, y)$ допускает бесконечно большой низший предел (см. [8], стр. 36) в области $\|x\| < H$, если функция $w(x)$ из определения (2.1) удовлетворяет условию

$$\lim w(x) = \infty \quad \text{при } \|x\| \to H$$

Будем обозначать символом $\mathrm{M}[\psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n); \alpha_1, \ldots, \alpha_n / \beta]$ математическое ожидание функции $\psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ случайных величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ при условиях β, где символ β означает некоторую систему равенств, неравенств или каких-либо других условий.

Рассмотрим решение $\{x(t),\ y(t)\}$, порожденное начальными условиями $x=\xi$, $y=\eta$ при $t=\tau$. В соответствии с введенными обозначениями выражение

$$\mathrm{M}\,[v\,(x\,(t),\ t,\ y\,(t));\ x\,(t)\,y\,(t)\,/\,x\,(t)=\xi,\ y\,(t)=\eta]$$

представляет собой математическое ожидание случайной функции

$$v\,(x\,(\xi,\ \tau,\ \eta;\ t),\ t,\ y\,(\eta,\ \tau;\ t))\ \text{при}\ t\geqslant\tau$$

Определение 2.4. Будем называть производной $d\mathrm{M}\,[v]\,/\,dt$ функции v в силу уравнений (1.1) в точке $x=\xi$, $y=\eta$, $t=\tau$ предел (2.1)

$$\frac{d\mathrm{M}\,[v]}{dt}=\lim_{t\to\tau+0}\frac{1}{t-\tau}\,\{\mathrm{M}\,[v\,(x\,(t),\,t,y\,(t));\,x\,(t),y\,(t)\,/\,x\,(\tau)=\xi,\,y\,(\tau)=\eta]-v\,(\xi,\tau,\eta)\}$$

В частности, если $F\,(x,\ y,\ t\,/\,\xi,\ \eta,\ \tau)$ — условная функция распределения для решения $\{x\,(t),\ y\,(t)\}$ ([6], стр. 283), то

$$\frac{d\mathrm{M}\,[v]}{dt}=\lim_{t\to\tau+0}\frac{1}{t-\tau}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}v\,(x,t,y)\,d_{xy}F\,(x,\,y,\,t/\xi,\,\eta,\tau)-v\,(\xi,\,\tau,\,\eta)\right\}\qquad(2.2)$$

где интеграл понимается в смысле Стильтеса и вычисляется по всем переменным $x_1,\dots,x_n$, y. В силу условий (1.1) в нашем случае производную $d\mathrm{M}\,[v]\,/\,dt$ в точке x, $y=j$, t можно вычислить по формуле

$$\frac{d\mathrm{M}\,[v]}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}f_i\,(x,t,y)+\sum_{k\neq j}^{r}\alpha_{jk}\,[v\,(x,\,t,\,k)-v\,(x,\,t,\,j)]\qquad(2.3)$$

Примечание. Формула (2.3) показывает, что для вычисления производной $d\mathrm{M}\,[v]/dt$, как и в случае обыкновенных уравнений, не требуется интегрирование уравнений (1.1), а достаточно лишь знания правых частей уравнений и вероятностных характеристик случайного процесса $y(t)$.

3. Приведем теоремы, указывающие достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости по вероятности.

Теорема **3.1. Если для дифференциальных уравнений (1.1) возможно найти определенно положительную функцию $v(x,\ t,\ y)$, производная которой $d\mathrm{M}(v)/dt$ в силу этих уравнений есть функция знакоотрицательная, то решение $x=0$ устойчиво по вероятности.**

Доказательство. Пусть даны числа $\varepsilon>0$ и $p>0$ (очевидно, можно считать $\varepsilon<H$). Функция $v\,(x,\ t,\ y)$ является определенно положительной, поэтому существует положительное число ε_1 такое, что $v\,(x,\ t,\ y)>\varepsilon_1$ при

$$\|\,x\,\|=\varepsilon,\qquad y\in Y,\ t\geqslant t_0$$

Построим случайную функцию $V\,(t)$, которую будем использовать при доказательстве теоремы. Будем предполагать, что реализация решений $\{x^{(p)}\,(x_0,\ t_0,\ y_0;\ t_0)$, $y^{(p)}\,(t_0,\ y_0;\ t)\}$ порождает реализацию $V^{(p)}\,(t)$ случайной функции $V\,(t)$ с соответствующим распределением вероятности, но только для тех значений $t\geqslant t_0$, для которых все время выполняется неравенство

$$v\,(x^{(p)}\,(x_0,\ t_0,\ y_0;\ t),\ t,\ y^{(p)}\,(t_0,\ y_0;\ t))<\varepsilon_1$$

Если $t^{(p)}$ — точная верхняя грань таких t, то будем предполагать, что при $t\geqslant t^{(p)}$ реализация решения $\{x^{(p)}\,(t),\ y^{(p)}\,(t)\}$ не существует, а реализация $V^{(p)}\,(t)$ удовлетворяет условию $V^{(p)}\,(t)=\varepsilon_1$ при $t\geqslant t^{(p)}$.

Очевидно, для доказательства теоремы достаточно показать, что можно выбрать число $\delta > 0$ такое, что при $\| x_0 \| \leqslant \delta$ выполняется условие

$$p(V(t) < \varepsilon_1) > 1 - p \tag{3.1}$$

так как

$$p(V(t) < \varepsilon_1) \leqslant p_t(\| x(t) \| < \varepsilon) \tag{3.2}$$

Выберем число $\delta > 0$ из условия

$$\sup v(x, t_0, y) < p\varepsilon_1 \quad \text{при } \| x \| \leqslant \delta \tag{3.3}$$

Покажем, что выбранное число $\delta > 0$ удовлетворяет условиям определения 1.1. Пусть $\{x(t), y(t)\}$ — решение уравнений (1.1), порожденное начальными условиями $\{x_0, y_0\}$. В соответствии с указанным выше будем предполагать, что реализации $\{x^{(p)}(t), y^{(p)}(t)\}$ этого решения определены лишь при тех значениях t, при которых они остаются в области $v(x, t, y) < \varepsilon_1$.

Вычислим математическое ожидание $v_t = \mathrm{M}[V(t)]$ случайной функции $V(t)$. По определению v_t имеем

$$v_t = \mathrm{M}[v(x(t), t, y(t));\ x(t), y(t) / x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0] + \varepsilon_1 p_1(t) \tag{3.4}$$

где $p_1(t)$ — вероятность обрыва реализаций при $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$.

Согласно условиям теоремы $v_t \geqslant 0$. Имеем далее

$$v_{t+\Delta t} = \mathrm{M}[v(x(t+\Delta t), t+\Delta t, y(t+\Delta t));\ x(t+\Delta t), y(t+\Delta t) / x(t_0) = x_0$$
$$y(t_0) = y_0] + p_1(t+\Delta t)\varepsilon_1 \tag{3.5}$$

Используя свойства процесса без последействия [5] (стр. 86), можно написать равенство (с учетом обрыва реализаций $\{x^{(p)}(t), y^{(p)}(t)\}$ на поверхности $v = \varepsilon_1$)

$$v_{t+\Delta t} = \mathrm{M}[\mathrm{M}[v(x(t+\Delta t), t+\Delta t, y(t+\Delta t));\ x(t+\Delta t), y(t+\Delta t) / x^{\circ}(t), y^{\circ}(t)];$$
$$x^{\circ}(t), y^{\circ}(t) / x_0, y_0] + p_1(t+\Delta t)\varepsilon_1.$$

Символами $x^{\circ}(t)$, $y^{\circ}(t)$ обозначены фиксированные $x(t)$, $y(t)$.

Рассмотрим наряду с величиной $v_{t+\Delta t}$ вспомогательную величину $u_{t+\Delta t}$, которую определим равенством

$$u_{t+\Delta t} = \mathrm{M}[\mathrm{M}[v(x^*(t+\Delta t), t+\Delta t, y(t+\Delta t));\ x^*(t+\Delta t), y(t+\Delta t) / x^{\circ}(t), y^{\circ}(t)];$$
$$x^{\circ}(t), y^{\circ}(t) / x_0, y_0] + p_1(t)\varepsilon_1$$

где символами $x^*(t)$ обозначены реализации решений без предположения об обрыве их на поверхностях $v = \varepsilon_1$.

Можно проверить, что $u_{t+\Delta t} - v_{t+\Delta t} \geqslant o(\Delta t)$. Следовательно,

$$\frac{v_{t+\Delta t} - v_t}{\Delta t} \leqslant \frac{1}{\Delta t}\mathrm{M}[\{\mathrm{M}[v(x^*(t+\Delta t), t+\Delta t, y(t+\Delta t));\ x^*(t+\Delta t),$$
$$y(t+\Delta t) / x(t), y(t)] - v(x(t), t, y(t))\};\ x(t), y(t) / x_0, y_0] + \left|\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right|$$

Переходя к пределу, будем иметь [1]

$$\left(\frac{dv_t}{dt}\right)_{dt=+0} \leqslant M\left[\frac{dM_t[v]}{dt};\ x(t),\ y(t) / x_0, y_0\right] \leqslant 0 \tag{3.6}$$

Функция v_t — непрерывная функция времени и поэтому неравенство (3.4) можно интегрировать. Следовательно, имеем неравенство

$$v_t \leqslant v(x_0, t_0, y_0) \tag{3.7}$$

---

[1] Возможность преобразований (3.6) и, в частности, перемена порядка операций предельного перехода и вычисления математического ожидания требует обоснования. Отметим, что в рассматриваемом случае проверка этой возможности не вызывает принципиальных затруднений, в частности вследствие равномерной сходимости правой части (1.1) к пределу при $t \to \tau + 0$.

Допустим теперь, что теорема неверна и, следовательно, можно указать момент времени $t = T \geqslant t_0$ такой, что выполняется неравенство $p(V(t) < \varepsilon_1) \leqslant 1 - p$. Это значит, что к моменту времени $t = T$ вероятность обрыва реализаций $\{x^{(p)}(t), y^{(p)}(t)\}$ больше или равна p. Но в таком случае очевидно, что будет выполнено условие

$$v_{\mathrm{T}} \geqslant p\varepsilon_1 \tag{3.8}$$

Неравенства (3.3), (3.7), (3.8) противоречивы. Противоречие доказывает теорему.

Примечание. Условие (3.3) позволяет обычным для метода Ляпунова способом, указанным Н. Г. Четаевым [7] (стр. 95), находить число $\delta > 0$ по заданным ε и p.

Пусть, например функции $v(x, y)$ — квадратичные формы.

$$v(x, j) = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}^{(j)} x_i x_k \quad (j = 1, \ldots, r) \tag{3.9}$$

Тогда

$$\inf v = \min_{(l,j)} \rho_l(j)\, \varepsilon^2 \quad \text{при } \|x\| = \varepsilon, \quad \sup v = \max_{(l,j)} \rho_l(j)\, \delta^2 \quad \text{при } \|x\| \leqslant \delta$$

где $\rho_l(j)$ — корни вековых уравнений $\| b_{ik}^{(j)} - \rho\delta_{ik} \| = 0$. Следовательно, достаточно δ выбрать из условия

$$\delta < \varepsilon \sqrt{p\, \rho_{\min} / \rho_{\max}} \tag{3.10}$$

Это неравенство позволяет проверить устойчивость на интервале времени T при заданной оценке $\Delta(\varepsilon, p)$.

Теорема 3. 2. **Если для уравнений (1.1) существует определенно положительная функция $v(x, t, y)$, допускающая бесконечно-малый высший предел, производная которой в силу (1.1)— функция определенно-отрицательная в области (1.3), то для любого числа $p(H) < 1$ можно указать число H_0 такое, что решение $x = 0$ системы (1.1) $p(H)$ — асимптотически устойчиво относительно начальных возмущений из области (1.9).**

Доказательство. Пусть дано число $p(H) < 1$. При условиях теоремы (3.2) имеет место устойчивость по вероятности. Поэтому для некоторого фиксированного числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$ такое, что справедливо неравенство

$$p_t(\|x(t)\| < \varepsilon) > 1 - p(H) \tag{3.11}$$

для решений с начальными условиями $\|x_0\| < \delta$.

Выберем число $H_0 = \delta$ и покажем, что оно удовлетворяет условиям теоремы. Возьмем произвольные числа $\eta > 0$ $(\eta < \varepsilon)$, $p_1 > 0$. По этим числам определим число η_1 так, чтобы выполнялось условие (3.12)

$$[\sup v(x, t, y) \text{ при } \|x\| \leqslant \eta_1] < \left[\tfrac{1}{2} p_1 \inf v(x, t, y) \text{ при } \|x\| \geqslant \eta,\ v(x, t, y) \leqslant \varepsilon_1\right]$$

Тогда, повторяя с незначительными изменениями рассуждения из доказательства теоремы 3.1, можно проверить, что

$$p_\tau(\|x(x(t), t, y(t); \tau)\| < \eta) > 1 - \tfrac{1}{2} p_1 \tag{3.13}$$

при $\tau \geqslant t$ для всех решений с начальными условиями

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (\|x(t)\| \leqslant \eta_1)$$

Покажем, что можно найти достаточно большое значение $t = T$ такое, что будет выполнено условие

$$p_T(\|x\| < \eta_1) > 1 - \tfrac{1}{2} p_1 - p(H) \tag{3.14}$$

В самом деле, если бы при всех $t > t_0$ выполнялось условие

$$p_t(\|x\| < \eta_1) \leqslant 1 - {}^1\!/_2 p_1 - p(H),$$

то выполнялось бы условие $p_t(\eta_1 \leqslant \|x\|,\ v < \varepsilon_1) \geqslant \frac{1}{2} p_1$.

Но тогда легко видно, что при всех $t > t_0$ имеет место неравенство

$$\frac{dv_t}{dt} \leqslant -\frac{1}{2} p_1 \alpha \qquad \left(-\alpha = \inf \frac{d\mathrm{M}[v]}{dt} \quad \text{при } \eta_1 \leqslant \|x\| \leqslant \varepsilon\right)$$

Это, однако, невозможно, так как $v_t \geqslant 0$.

Таким образом, из неравенств (3.11), (3.12), (3.14) следует, что для любого числа p_1 можно указать такое $T > t_0$, что при всех $t > T$ выполнено неравенство

$$p_t(\|x\| < \eta) > 1 - p(H) - \frac{1}{2} p_1 - \frac{1}{2} p_1$$

Это условие доказывает теорему.

Примечание 3.1. Если $H = \infty$, функция $v(x, t, y)$ определена во всем пространстве и допускает бесконечно большой нижний предел (см. стр. 811), а ее производная — определенно отрицательная функция[1], то решение системы (1.1) асимптотически устойчиво по вероятности при возмущениях из любой конечной области H_0.

Доказательство этого утверждения опускаем, так как оно с очевидными изменениями повторяет рассуждения теоремы (3.2).

Примечание 3. 2. Из доказательства теоремы 3.2 видно, каким образом можно проверить асимптотическую устойчивость по вероятности на заданном интервале времени при заданных оценках.

§ 4. Продолжим рассмотрение случая, когда $H = \infty$. В частности, это всегда можно предполагать для линейных систем

$$dx / dt = A(t, y) x \tag{4.1}$$

где x — n-мерный вектор, $A(t, y)$ — матрица коэффициентов $a_{ik}(t, y)$.

Символом $\|x\|_2$ будем обозначать в дальнейшем $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Все изложенное выше естественно сохраняет смысл и при этой норме.

Определение 4.1. Решение системы (1.1) назовем устойчивым (в среднем квадратичном) [5] (стр. 16), если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что любое решение системы (1.1) с начальными условиями, удовлетворяющими неравенству

$$\|x_0\|_2 = \|x(t_0)\|_2 \leqslant \delta \tag{4.2}$$

будет при всех $t \geqslant t_0$, $y_0 \in Y$ удовлетворять условию

$$\mathrm{M}[\|x(x_0, t_0, y_0; t)\|_2^2;\ x(t) / x_0, y_0] < \varepsilon \tag{4.3}$$

Определение 4.2. Если решение $x = 0$ системы (1.1) устойчиво в среднем и если, кроме того, для всех решений с начальными данными $\|x_0\|_2 \leqslant H_0$ выполнено условие

$$\lim \mathrm{M}[\|x(t)\|_2^2] = 0 \quad \text{при } t \to \infty \tag{4.4}$$

то решение $x = 0$ будем называть асимптотически устойчивым в среднем и будем говорить, что область H_0 пространства $\{x_i\}$ лежит в области притяжения точки $x = 0$.

Примечание. Отметим, что при сделанных предположениях устойчивость (асимптотическая устойчивость) в среднем системы (1.1) является достаточным условием устойчивости (асимптотической устойчивости) по вероятности.

Определение 4.3. Решение $x = 0$ системы (1.1) будем называть экспоненциально устойчивым в среднем, если при любых начальных условиях из области (1.3) существуют постоянные числа B, α такие, что при всех $t \geqslant t_0$ выполняется неравенство

$$\mathrm{M}[\|x(t)\|_2^2;\ x(t) / x_0, y_0] \leqslant B \|x_0\|_2^2 \exp(-\alpha(t - t_0)) \tag{4.5}$$

---

[1] Везде в дальнейшем, когда $H = \infty$, предполагается продолжимость всех (почти всех) реализаций при $t \to \infty$, см. [9] (стр. 16—19).

Теорема 4.1. Если для системы (1.1) существует функция $v(x, t, y)$, удовлетворяющая оценкам

$$c_1 \| x \|_2^2 \leqslant v(x, t, y) \leqslant c_2 \| x \|_2^2, \qquad \frac{dM[v]}{dt} \leqslant -c_3 \| x \|_2^2 \tag{4.6}$$

где c_1, c_2, c_3 — некоторые положительные постоянные, то решение $x = 0$ уравнений (1.1) экспоненциально устойчиво в среднем.

Доказательство. Рассмотрим решение системы (1.1) с начальными условиями $\{x_0, y_0\}$. Это решение определяет случайную функцию времени

$$V(t) = v(x(x_0, t_0, y_0; t), t, y(t_0, y_0; t))$$

Для математического ожидания v_t этой функции будем иметь следующие неравенства

$$c_1 M[\| x(t) \|_2^2;\ x(t) / x_0, y_0] \leqslant v_t \leqslant c_2 M[\| x(t) \|_2^2;\ x(t) / x_0, y_0]$$

$$\frac{dv_t}{dt} \leqslant -c_3 M[\| x(t) \|_2^2;\ x(t) / x_0, y_0] \tag{4.7}$$

Из этих условий обычным методом (см., например, [8] стр. 70) получается неравенство

$$M[\| x(t) \|_2^2;\ x(t) / x_0, y_0] \leqslant \frac{c_2}{c_1} \| x_0 \|_2^2 \exp\left(-\frac{c_3}{c_2}(t - t_0)\right) \tag{4.8}$$

которое доказывает теорему.

Заметим, что в данном случае получается устойчивость «в целом», т. е. областью притяжения в среднем служит все пространство.

Теорема 4. 2. Если решение $x = 0$ уравнений (1.1) экспоненциально устойчиво в среднем, то в области $t > t_0$, $y \in Y$ существует функция $v(x, t, y)$, удовлетворяющая условиям (4.6).

Доказательство. Пусть существуют постоянные B и α такие, что при любом значении x_0 и $t_0 > 0$ выполнено условие

$$M[\| x(t) \|_2^2;\ x(t) / x_0, y_0] \leqslant B \| x_0 \|_2^2 \exp(-\alpha(t - t_0)) \tag{4.9}$$

Рассмотрим функцию $v(x, t, y)$

$$v(\xi, t, \eta) = \int_t^\infty M[\| x(\xi, t, \eta; \tau) \|_2^2;\ x(\tau) / x(t) = \xi, y(t) = \eta]\, d\tau \tag{4.10}$$

Покажем, что эта функция удовлетворяет условиям теоремы. Действительно в силу условия (4.9) имеем

$$v(\xi, t, \eta) \leqslant \int_t^\infty B \| \xi \|_2^2 \exp(-\alpha(\tau - t))\, d\tau = \frac{B}{\alpha} \| \xi \|_2^2 = c_2 \| \xi \|_2^2$$

С другой стороны, для всякой реализации решения системы (1.1) справедлива оценка [9] (стр. 23)

$$\| x^{(p)}(x_0, t_0, y_0; t) \|_2^2 \geqslant \| x_0 \|_2^2 \exp(-2nL(t - t_0))$$

(L — постоянная Липшица). Отсюда следует, что

$$M[\| x(t) \|_2^2;\ x(t) / x_0, y_0] \geqslant \| x_0 \|_2^2 \exp(-2nL(t - t_0))$$

Но тогда заметим, что

$$v(\xi, t, \eta) = \int_t^\infty M[\| x(\xi, t, \eta; \tau) \|_2^2;\ x(\tau) / \xi, \eta]\, d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \int_t^\infty \| \xi \|_2^2 \exp(-2nL(\tau - t))\, d\tau = \frac{1}{2nL} \| \xi \|_2^2 = c_1 \| \xi \|_2^2$$

Таким образом, первое из условий (4.6) выполнено. Вычислим $d\mathrm{M}[v]/dt$. Согласно определению 2.4 имеем

$$\frac{d\mathrm{M}[v]}{dt}=\lim_{\Delta t\to+0}\frac{1}{\Delta t}\{\mathrm{M}[v(x(t+\Delta t),\ t+\Delta t,\ y(t+\Delta t));\ x(t+\Delta t),\ y(t+\Delta t)\ /\ x(t)=\xi,\ y(t)=\eta]-v(\xi,\ t,\ \eta)\}$$

Подставляя вместо $v(x,\ t,\ y)$ ее выражение (2.10), будем иметь

$$\frac{d\mathrm{M}[v]}{dt}=\lim_{\Delta t\to+0}\frac{1}{\Delta t}\Big\{M\Big[\int_{t+\Delta t}^{\infty}\mathrm{M}[\|x(x(t+\Delta t),\ t+\Delta t,\ y(t+\Delta t);\ \tau)\|_2{}^2;\ x(\tau)\ /\ x(t+\Delta t),\ y(t+\Delta t)]\,d\tau;\ x(t+\Delta t),\ y(t+\Delta t)\ /\ x(t),\ y(t)\Big]-$$
$$-\int_{t}^{\infty}\mathrm{M}[\|x(x(t),\ t,\ y(t);\ \tau)\|_2{}^2;\ x(\tau)\ /\ x(t),\ y(t)]\,d\tau\Big\}$$

Имеем далее

$$\mathrm{M}\Big[\int_{t+\Delta t}^{\infty}\mathrm{M}[\|x(x(t+\Delta t),\ t+\Delta t,\ y(t+\Delta t);\ \tau)\|_2{}^2;\ x(\tau)\ /\ x(t+\Delta t),\ \ y(t+\Delta t)]\,d\tau;$$
$$x(t+\Delta t),\ y(t+\Delta t)\ /\ x(t),\ y(t)\Big]=\int_{t+\Delta t}^{\infty}\mathrm{M}[\|x(x(t),\ t,\ y(t);\ \tau)\|_2{}^2;\ \ x(\tau)\ /\ x(t),\ y(t)]\ d\tau$$

Тогда будем иметь

$$\frac{d\mathrm{M}[v]}{dt}=\lim_{\Delta t\to+0}\frac{1}{\Delta t}\Big\{\int_{t+\Delta t}^{\infty}\mathrm{M}[\|x(x(t),\ t,\ y(t);\ \tau)\|_2{}^2;\ x(\tau)\ /\ x(t),\ y(t)]\,d\tau-$$
$$-\int_{t}^{\infty}\mathrm{M}[\|x(x(t),\ t,\ y(t);\ \tau)\|_2{}^2;\ x(\tau)\ /\ x(t),\ y(t)]\,d\tau\Big\}=-\|x(t)\|_2{}^2 \qquad (4.11)$$

Теорема доказана.

Для линейной системы (4.1) со случайными параметрами справедлива следующая теорема, являющаяся перенесением теоремы И. Г. Малкина [10] (стр. 313) на случай устойчивости в среднем.

Теорема 4.3. Если решение $x=0$ системы (4.1) экспоненциально устойчиво в среднем, то для любой определенно положительной формы $w(x,\ t,\ y)$ переменных $x_1,\ \ldots,\ x_n$, коэффициенты которой $c_{ik}(t,\ y)$ при всех $y\in Y$ ограниченные и непрерывные функции времени, можно найти определенно положительную форму того же порядка $v(x,\ t,\ y)$, удовлетворяющую оценкам (4.6), причем будем иметь

$$d\mathrm{M}[v]\,/\,dt=-w(x,\ t,\ y) \qquad (4.12)$$

Доказательство этой теоремы повторяет рассуждения из доказательства теоремы 4.2. Нужно только в качестве функции v взять функцию

$$v(\xi,\ t,\ \eta)=\int_{t}^{\infty}\mathrm{M}[w(x(\xi,\ t,\ \eta;\ \tau),\ \tau,\ y(t,\ \eta;\ \tau)),\ x(\tau),\ y(\tau)\ /\ \xi,\ \eta]\,d\tau \qquad (4.13)$$

При этом следует проверить, что функция $v(\xi,\ t,\ \eta)$ является формой переменных $x_1,\ \ldots,\ x_n$. Эта проверка может быть выполнена так, как это сделано в доказательстве указанной теоремы И. Г. Малкина [10] (стр. 313—316), так как для случайных решений линейных уравнений сохраняют силу все те свойства, которые использовались в [10].

§ 5. Рассмотрим систему уравнений вида

$$dx / dt = A(t, y)x + R(x, t, y) \tag{5.1}$$

где элементы матрицы $A(t, y)$ — непрерывные и ограниченные функции времени при любом $y \in Y$. Относительно функций $R_i(x, t, y)$ будем предполагать, что в области (1.3) при всех $y \in Y$ выполнено условие

$$|R_i(x, t, y)| \leqslant \gamma \|x\|_2^2 \qquad (\gamma = \text{const} > 0) \tag{5.2}$$

Наряду с системой (5.1) рассмотрим систему первого приближения

$$dx / dt = A(t, y)x \tag{5.3}$$

Тогда справедлива теорема, аналогичная теореме об устойчивости по первому приближению [10] (стр. 365—366).

Теорема 5.1. Если решение $x = 0$ системы (5.3) экспоненциально устойчиво в среднем, то соответствующее решение системы (5.1) устойчиво по вероятности и, более того, для любого $p(H)$ решение $x = 0$ будет $p(H)$-асимптотически устойчиво при любом выборе функции $R(x, t, y)$, удовлетворяющей в области (1.3) условиям (5.2), если только постоянная γ достаточно мала.

Доказательство. Согласно условиям теоремы существует функция $v(x, t, y)$, удовлетворяющая в силу уравнений (5.3) условиям (4.6).

Будем обозначать символами $(d\text{M}[v] / dt)_{5.1}$ и $(d\text{M}[v] / dt)_{5.3}$ производные функции $v(x, t, y)$ в силу систем (5.1) и (5.3) соответственно.

Тогда в соответствии с формулой (2.3) в точке x, t, j будем иметь

$$\left(\frac{d\text{M}[v]}{dt}\right)_{5.1} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\left[a_{i1}(t, j)x_1 + \cdots + a_{in}(t, j)x_n + R_i(x, t, j)\right] +$$

$$+ \sum_{k \neq j}^{r} \alpha_{jk}\left[v(x, t, k) - v(x, t, j)\right] = \left(\frac{d\text{M}[v]}{dt}\right)_{5.3} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} R_i(x, t, j) \tag{5.4}$$

Учитывая, что функция $v(x, t, y)$ может быть выбрана в виде формы переменных $x_1, \ldots, x_n$, а также условия (4.6) и (5.2), будем иметь

$$\left(\frac{d\text{M}[v]}{dt}\right)_{5.1} \leqslant -c_3\|x\|_2^2 + n\gamma\beta\|x\|_2^2 \qquad \left(\beta = \sup\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| \text{ при } \|x\|_2 = 1\right) \tag{5.5}$$

Если γ достаточно мало, то из (5.5) получим условие

$$\left(\frac{d\text{M}[v]}{dt}\right)_{5.1} \leqslant -\mu\|x\|_2^2 \quad \text{в области } \|x\|_2 < H \qquad (\mu > 0)$$

Таким образом, функция $v(x, t, y)$ удовлетворяет для системы (5.1) всем условиям теоремы 3.2.

Примечание. Если оценка (5.2) справедлива в области $H = \infty$, то экспоненциальная устойчивость в среднем системы первого приближения (5.3) обеспечивает асимптотическую устойчивость по вероятности решения $x = 0$ системы (5.1).

§ 6. Рассмотрим теперь стационарную линейную систему

$$dx / dt = A(y)x \tag{6.1}$$

Теорема 6.1. Если решение $x = 0$ системы (6.1) асимптотически устойчиво в среднем, то какова бы ни была наперед заданная определенно положительная форма $w(x, y)$, существует одна и только одна форма $v(x, y)$ того же порядка, удовлетворяющая уравнению:

$$d\text{M}[v] / dt = -w(x, y) \tag{6.2}$$

причем эта форма получится обязательно определенно положительной.

Доказательство. В силу теоремы 4.3 достаточно показать, что если решение $x = 0$ системы (6.1) асимптотически устойчиво в среднем, то оно экспоненциально устойчиво в среднем. Покажем это.

Во-первых, по условиям теоремы, решение $x = 0$ устойчиво в среднем. Поэтому, задавшись числом $\varepsilon > 0$, определим $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось условие

$$\mathrm{M}\,[\|x(t)\|_2^2;\ x(t)\,/\,x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0] < \varepsilon, \quad \text{если } \|x_0\| \leqslant \delta \tag{6.3}$$

Эта устойчивость будет равномерной относительно $t_0 > 0$ и $y_0 \in Y$, так как система стационарная, а множество значений y конечно. Так как система (6.1) линейна, то асимптотическая устойчивость в среднем невозмущенного движения равномерна относительно x_0. Отсюда вследствие линейности уравнений следует, что можно указать такое значение $T > 0$, для которого выполнено условие

$$\mathrm{M}\,[\|x(x_0, t_0, y_0;\ t_0 + T)\|_2^2;\ x(t_0 + T)\,/\,x_0 y_0] \leqslant \frac{1}{2}\|x_0\|_2^2 \tag{6.4}$$

при любых значениях x_0, t_0, $y_0 \in Y$. В результате вычислений получим

$$\begin{aligned} &\mathrm{M}\,[\|x(x_0, t_0, y_0;\ t_0 + 2T)\|_2^2;\ x(t_0 + 2T)\,/\,x_0, y_0] = \\ &= \mathrm{M}\,[\mathrm{M}\,[\|x((x_0, t_0, y_0;\ t_0 + T),\ t_0 + T,\ y(t_0, y_0;\ t_0 + T);\ t_0 + 2T)\|_2^2;\ x(t_0 + 2T)\,/ \\ &\qquad /\,x(t_0 + T),\ y(t_0 + T)];\ x(t_0 + T),\ y(t_0 + T)\,/\,x_0, y_0] \leqslant \\ &\leqslant {}^1\!/_2\,\mathrm{M}\,[\|x(x_0, t_0, y_0;\ t_0 + T)\|_2^2;\ x(t_0 + T)\,/\,x_0, y_0] \leqslant {}^1\!/_4\|x_0\|_2^2 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Продолжая рассуждения по индукции, можно получить для любого целого положительного числа m условие

$$\mathrm{M}\,[\|x(x_0, t_0, y_0;\ t_0 + mT)\|_2^2;\ x(t_0 + mT)\,/\,x_0, y_0] \leqslant \frac{1}{2^m}\|x_0\|_2^2 \tag{6.6}$$

Пусть $t = t_0 + mT + \tau$, где $\tau < T$, тогда, используя соотношение [9](стр. 23)

$$\|x^{(p)}(x(t_0 + mT),\ t_0 + mT,\ y(t_0 + mT);\ t\|_2^2 \leqslant x\|^{(p)}(t_0 + mT)\|_2^2 \exp(2nL\tau) \tag{6.7}$$

будем иметь

$$\mathrm{M}\,[\|x(x_0, t_0, y_0;\ t)\|_2^2;\ x(t)\,/\,x_0, y_0] \leqslant \frac{1}{2^m}\|x_0\|_2^2 \exp(2nL\tau) \tag{6.8}$$

Полагая $\alpha = \frac{1}{T}\ln 2$, $B = 2\exp(2nLT)$, получим

$$\mathrm{M}\,[\|x(x_0, t_0, y_0;\ t)\|_2^2;\ x(t)\,/\,x_0, y_0] \leqslant B\|x_0\|_2^2 \exp(-\alpha(t - t_0))$$

Теорема доказана.

Теорема 6.1 позволяет получить ряд алгебраических критериев (в зависимости от выбора функции $w(x, y)$) асимптотической устойчивости в среднем для системы (6.1). В самом деле, возьмем произвольную определенно положительную квадратичную форму $w(x, y)$. Занумеруем ее коэффициенты $c_1(y), \ldots, c_N(y)$, так что $N = {}^1\!/_2\,n(n+1)$.

Если решение $x = 0$ системы (6.1) асимптотически устойчиво в среднем, то в силу теоремы 6.1 может быть найдена определенно положительная квадратичная форма $v(x, y)$, удовлетворяющая условию (6.2). Обозначим коэффициенты этой формы через $b_1(y), \ldots, b_N(y)$ $(y = 1, \ldots, r)$.

Тогда для определения этих коэффициентов мы получим систему Nr линейных неоднородных уравнений

$$A_{i1}(j)\,b_1(j) + \cdots + A_{iN}(j)\,b_N(j) + \sum_{k \neq j}^{r} \alpha_{jk} b_i(k) = -c_i(j) \quad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, N \\ j = 1, \ldots, r \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

Коэффициенты $A_{i1}(j), \ldots, A_{iN}(j)$ — постоянные, являющиеся линейными комбинациями коэффициентов α_{ik} и элементов матрицы $A(j)$.

Эти уравнения получаются приравниванием коэффициентов при подобных членах в уравнениях

$$\sum_{s=1}^{n}(a_{si}(j)x_1+\cdots+a_{sn}(j)x_n)\frac{\partial v(x,j)}{\partial x_s}+\sum_{k\neq j}^{r}\alpha_{jk}[v(x,k)-v(x,j)]=-w(x,j)$$
$$(j=1,\ldots,r) \tag{6.10}$$

Таким образом, для асимптотической устойчивости в среднем системы (6.1) необходимо и достаточно, чтобы формы $v(x,j)$ $(j=1,\ldots,r)$ с коэффициентами, определенными из уравнений (6.9), были определенно положительными. Пользуясь для каждой из них критерием Сильвестра, мы получим Nr алгебраических неравенств, обеспечивающих асимптотическую устойчивость в среднем системы (6.1).

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$dx\,/\,dt=a(y)\,x$$

Здесь $a(y)$ — случайная функция, которая может принимать два значения — a_1 и a_2, причем вероятность $p_{ij}(\Delta t)$ смены значений $a_i\to a_j$ определяется по формуле (1.4) $(i,j=1.2)$. Применяя изложенный выше метод для данного уравнения, получим систему неравенств

$$a_1a_2-\frac{1}{2}(\alpha_{12}a_2+\alpha_{21}a_1)>0,\quad a_1<\frac{1}{2}(\alpha_{12}+\alpha_{21}),\quad a_2<\frac{1}{2}(\alpha_{12}+\alpha_{21})$$

Эти неравенства определяют область асимптотической устойчивости в среднем.

Следствием теорем 5.1 и 6.1 является следующее утверждение.

Теорема 6.2. Если решение $x=0$ системы (6.1) асимптотически устойчиво в среднем, то соответствующее решение уравнений

$$dx\,/\,dt=A(y)\,x+R(x,t,y) \tag{6.11}$$

будет $p(H)$-асимптотически устойчиво, если только выполнено условие (5.2), а постоянная γ — достаточно мала.

§ 7. В этом параграфе рассмотрим задачу устойчивости при случайных постоянно действующих возмущениях. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$dx\,/\,dt=A(y)\,x+c\eta(t) \tag{7.1}$$

Здесь матрица A при каждом значении $y\in Y$ имеет постоянные коэффициенты $a_{ij}(y)$, c — n-мерный вектор с постоянными компонентами c_i, $\eta(t)$ — случайная функция, описывающая постоянно действующие возмущения. Ограничимся здесь случайными возмущениями $\eta(t)$ частного вида.

Будем предполагать, что функция $\eta(t)$ имеет вид [11] (стр. 133)

$$\eta(t)=\sum_k a_k\,\delta(t-t_k) \tag{7.2}$$

Здесь t_k — случайные величины, удовлетворяющие условиям распределения Пуассона на оси t со средней частотой λ, т. е.

$$p_m(T)=\frac{(\lambda T)^m}{m!}\exp(-\lambda T)$$

где $p_m(T)$ — вероятность того, что на интервале времени длины $T>0$ содержится m значений t_k, a_k — взаимно независимые и не зависящие также от t_k случайные величины с одной и той же функцией распределения $F(a)$, причем $\mathrm{M}\{a\}=0$. Символ $\delta(t)$ в (7.2) означает δ-функцию.

Иначе говоря, рассматриваемые нами случайные возмущения являются случайным набором импульсов случайной величины. Обозначим $\nu = \lambda \mathrm{M}\{a^2\}$.

Определение 7.1. Будем говорить, что невозмущенное движение устойчиво по вероятности при постоянно действующих возмущениях в силу уравнений (7.1), если для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $p > 0$ можно указать два других числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что любое решение $\{x(t), y(t)\}$ уравнений (7.1) с начальными условиями

$$\|x_0\|_2 < \delta_1, \qquad y_0 \in Y$$

удовлетворяет условию

$$p_t(\|x(t)\|_2 < \varepsilon) > 1 - p, \qquad \text{если} \quad \nu \leqslant \delta_2$$

Это определение соответствует в нашем случае понятиям устойчивости при постоянно действующих возмущениях, известным для обыкновенных дифференциальных уравнений [10] (стр. 293—294). Покажем, что здесь, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, можно использовать функции Ляпунова.

Предположим, что при отсутствии случайных возмущений линейная система уравнений

$$dx/dt = A(y)x \tag{7.3}$$

асимптотически устойчива в среднем. Тогда, согласно результатам § 6, существует определенно положительная квадратичная форма

$$v(x, y) = \sum_{i, k=1}^{n} b_{ik}(y) x_i x_k$$

производная которой в силу системы (7.3) удовлетворяет условию

$$\left(\frac{d\mathrm{M}[v]}{dt}\right)_{7.3} = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Вычислим производную этой функции в силу полной системы уравнений (7.1). Имеем

$$\left(\frac{d\mathrm{M}[v]}{dt}\right)_{7.1} = \left(\frac{d\mathrm{M}[v]}{dt}\right)_{7.3} + \lim_{\Delta t \to +0} \frac{1}{\Delta t}\{\mathrm{M}[(v(x^{(1)}(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - $$
$$- v(x^{(3)}(t+\Delta t), y(t+\Delta t))); / x^{(1)}(t) = x^{(3)}(t), y(t)]\} \tag{7.4}$$

где для краткости символами $x^{(1)}(t)$, $x^{(3)}(t)$ обозначены соответственно решения систем (7.1) и (7.3).

Отклонения $\Delta x_i = x_i^{(1)}(t+\Delta t) - x_i^{(3)}(t+\Delta t)$ вызваны действием возмущений $\eta(t)$. Заметим, что при вычислении второго слагаемого в правой части равенства (7.4) можно предполагать величину $y(\tau)$ при $t \leqslant \tau \leqslant$ $\leqslant t + \Delta t$ постоянной, так как учет вероятного изменения $y(t)$ в этом слагаемом дает величину высшего порядка малости относительно Δt. Поэтому можно написать равенство

$$\left(\frac{d\mathrm{M}[v]}{dt}\right)_{7.1} = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \lim_{\Delta t \to +0} \frac{1}{\Delta t}\left\{\mathrm{M}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\Delta x_i\right] + \mathrm{M}\left[\sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j\right]\right\}$$

Отклонения $\Delta x_i(t + \Delta t)$ следует вычислять по формуле Коши для решений неоднородной линейной системы. Записывая формулу в векторной форме, имеем

$$\Delta x(t+\Delta t) = \int\limits_t^{t+\Delta t} G(t)G^{-1}(\tau)c\eta(\tau)\,d\tau \tag{7.5}$$

где $G(t)$ — фундаментальная матрица решений системы (7.3) (при постоянном значении $y(t)=y$).

Так как $M\{\eta\}=0$, то в рассматриваемом случае

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\Delta x_i\right]=0$$

После подстановки выражения (7.2) функции $\eta(t)$ в правую часть равенства (7.5) будем иметь

$$\Delta x_i\,(t+\Delta t) = \sum_k a_k c_i + O(\Delta t)$$

поэтому

$$M\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j\right] = b_{ij}(y)\sum_{m=1}^{\infty} p_m(\Delta t)\, M\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^2 c_i c_j\right) + o(\Delta t) =$$

$$= b_{ij}(y)\, M\{a^2\}\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{(\lambda\Delta t)^m}{m!}\exp(-\lambda\Delta t) + o(\Delta t) = b_{ij}(y)\,c_i c_j M\{a^2\}\,\lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

следовательно,

$$M\left[\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i\Delta x_j\right] = \sum_{i,\,j=1}^{n} b_{ij}(y)\,c_i c_j \nu\Delta t + o(\Delta t)$$

Таким образом, имеем [1]

$$\left(\frac{dM[v]}{dt}\right)_{7.1} = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \nu\sum_{i,\,j=1}^{n} b_{ij}(y)\,c_i c_j \tag{7.6}$$

Пусть теперь даны числа $\varepsilon>0$ и $p>0$. Выберем число $\varepsilon_1>0$ таким образом, чтобы множество точек $v(x,y)<\varepsilon_1$ лежало при всех $y\in Y$ внутри области $\|x\|_2<\varepsilon$. По числу ε_1 выберем число $\delta_1>0$ так, чтобы поверхности $v(x,y)=\varepsilon_1 p$ при всех $y\in Y$ лежали вне сферы $\|x\|_2\leqslant\delta_1$. Пусть x_0— некоторая начальная точка, удовлетворяющая условию $\|x_0\|_2<\delta_1$. Покажем, что решение $\{x(x_0,t_0,y_0;t),\ y(t_0,y_0;t)\}$ удовлетворяет условию

$$P_t(\|x(t)\|_2<\varepsilon)>1-p \tag{7.7}$$

если только величина ν достаточно мала.

Выберем для этой цели величину $\nu>0$ столь малой, чтобы производная (7.6) в области $\delta_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\varepsilon$ была отрицательной. Построим для доказательства случайную функцию времени $V(t)$ подобно тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 3.1.

Можно показать, что для математического ожидания v_t случайной функции $V(t)$ выполняется неравенство

$$v_t\leqslant v(x_0,y_0)<p\varepsilon_1 \quad \text{при} \quad t\geqslant t_0 \tag{7.8}$$

---

[1] Пользуясь случаем, отметим, что в статье [2] в § 5 при вычислении производной $dM[v]/dt$ в аналогичном случае было пропущено второе слагаемое. Поэтому вывод о том, что наложение случайного шума не изменяет закона оптимального управления [2] § 5 является ошибочным

Доказательство. Обозначим символ $p(t)$ вероятность неравенства $\|x(t)\|_2 \leqslant \delta_1$. Имеем

$$v_t < \mathrm{M}[v(x(t),\ y(t));\ x(t),\ y(t)\,/\,\|x(t)\|_2 > \delta_1] +$$
$$+ \mathrm{M}[v(x(t),\ y(t));\ x(t),\ y(t)\,/\,\|x(t)\|_2 \leqslant \delta_1] + p_1(t)\,\varepsilon_1 \tag{7.9}$$

где $p_1(t)$ — вероятность обрыва реализаций.

Второе слагаемое в (7.9) удовлетворяет, очевидно, неравенству

$$\mathrm{M}[v(x(t),\ y(t));\ x(t),\ y(t)\,/\,\|x(t)\|_2 \leqslant \delta_1] < p(t)\,p\varepsilon_1$$

Поэтому для доказательства неравенства (7.8) достаточно проверить, что первое и третье слагаемое (7.9) меньше чем $(1 - p(t))\,p\varepsilon_1$. Покажем это.

Пусть в некоторый момент времени t неравенство

$$\mathrm{M}[v(x(t),\ y(t));\ x(t),\ y(t)\,/\,\|x(t)\|_2 > \delta_1] + p_1(t)\,\varepsilon_1 \leqslant (1 - p(t))\,p\varepsilon_1$$

выполняется (это неравенство во всяком случае выполняется при $t = t_0$). Тогда при Δt достаточно малом будем иметь

$$\mathrm{M}[v(x(t + \Delta t),\ y(t + \Delta t));\ x(t + \Delta t),\ y(t + \Delta t)\,/\,\|x(t + \Delta t)\|_2 > \delta_1] +$$
$$+ p_1(t + \Delta t)\,\varepsilon_1 \leqslant \mathrm{M}[v(x^*(t + \Delta t),\ y(t + \Delta t));\ x^*(t + \Delta t),\ y(t + \Delta t)\,/\,\|x(t)\|_2 > \delta_1] -$$
$$- \Delta p(t)\,p\varepsilon_1 + |o(\Delta t)|$$

Здесь, как и при доказательстве теоремы 3.1, символы x^* обозначают реализации решений системы (7·1) в предположении, что на отрезке времени $t \leqslant \tau \leqslant t + \Delta t$ высказанное выше правило обрыва их на поверхностях $v = \varepsilon_1$ не действует.

Вследствие $(d\mathrm{M}[v]\,/\,dt)_{7.1} < 0$ в области $\|x(t)\|_2 > \delta_1$ первое слагаемое в правой части последнего неравенства меньше чем

$$\mathrm{M}[v(x(t),\ y(t));\ x(t),\ y(t)\,/\,\|x(t)\|_2 > \delta_1] - \alpha\Delta t$$

и, следовательно, при Δt достаточно малом

$$\mathrm{M}[v(x(t + \Delta t),\ y(t + \Delta t));\ x(t + \Delta t),\ y(t + \Delta t)\,/\,\|x(t + \Delta t)\|_2 > \delta_1] +$$
$$p_1(t + \Delta t)\,\varepsilon_1 < (1 - p(t))\,p\varepsilon_1 - \Delta p(t)\,p\varepsilon_1 \leqslant (1 - p(t + \Delta t))\,p\varepsilon_1$$

что и доказывает неравенство (7.8).

Из неравенства (7.8) заключаем, что в случае асимптотической устойчивости линейной системы в среднем имеет место устойчивость по вероятности при постоянно действующих случайных возмущениях.

Поступила 13 IV 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
2. Красовский Н. Н. Об оптимальном регулировании при случайных возмущениях. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 1
3. Kalman R. E. a. Bertram J. E. Control System Analysis and Design Via the «Second Method» of Lyapunov. Paper Amer. Soc. Mech. Engrs, 1959., N. Nac.— 2.
4. Bertram J. E. a. Sarachik P. E. Stability of Circuits With Rondomly Time-Varying Parameters, Proc. Int. Symp. on Circuit and Information Theory, Los Angeles, Calif., 1959.
5. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. ИИЛ, М., 1956.
6. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Гостехиздат, М.— Л., 1950.
7. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, М.— Л., 1956.
8. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, М., 1959.
9. Немыцкий В. В. и Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М.— Л., 1949.
10. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, М.— Л., 1952.
11. Лэнинг Дж. Х., Бэттин Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. ИИЛ, М., 1958.