Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СТАБИЛИЗАТОРОВ

В. М. Матросов

(Казань)

Силовые гироскопические стабилизаторы [1-3] и платформы, стабилизируемые с помощью поплавковых (интегрирующих) гироскопов и сервоприводов [4,5], иногда применяются для геометрической стабилизации направления одной или нескольких осей относительно инерциального пространства [6,7]. При исследовании движения системы в этом случае обычно все элементы ее предполагаются идеально уравновешенными, сухое трение отсутствует. В качестве определяющих координат принимаются углы поворота тел системы. Обобщенными силами являются моменты сил вязкого сопротивления и моменты серводвигателей вокруг осей стабилизации (измерительных осей). Последние предполагаются функциями углов поворота кожухов гироскопов, а иногда и скоростей их изменения.

Ниже в рамках такого общепринятого моделирования рассматриваемой системы гироскопической стабилизации исследуются уравнения ее движения для случая, когда основание стабилизатора неподвижно или движется относительно инерциального пространства поступательно. Получен признак устойчивости стабилизаторов названного типа в смысле Ляпунова и при параметрических возмущениях.

Исследовано влияние некоторых категорий сил на устойчивость платформы, стабилизируемой в пространстве с помощью двух гироскопов. Указаны достаточные условия устойчивости двухосного гироскопического стабилизатора.

1. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ — обобщенные координаты системы. Из них $q_{m+1}, \ldots, q_n$ — углы поворота соответствующих тел (платформы, рам подвеса) вокруг осей стабилизации; $q_1, \ldots, q_m$ $(^1/_2\, n \leqslant m \leqslant n)$ включают углы поворота кожухов гироскопов $q_1, \ldots, q_l$ (с которых снимаются показания); количество последних равно числу осей стабилизации $l = n - m$.

Полагая, что применяются съемные устройства потенциометрического или микросинного типа, моменты серводвигателей вокруг осей стабилизации предположим голоморфными [1] функциями $q_1, \ldots, q_l, \dot q_1, \ldots, \dot q_n$

$$M_k = -\sum_{j=1}^{l} c_{kj}\, q_j - \sum_{j=1}^{n} b_{kj}''\, \dot q_j + M_k'(q_1, \ldots, q_l, \dot q_1, \ldots, \dot q_n)$$
$$(k = m+1, \ldots, n)$$

где c_{kj}, b_{kj}'' — постоянные, M_k' — нелинейности.

На систему действуют еще диссипативные силы с функцией рассеяния R; при этом R — голоморфная функция $q_1, \ldots, q_n$, $\dot q_1, \ldots, \dot q_n$, разложения которой начинаются с постоянно-положительной квадратичной формы

$$R^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{kj=1}^{n} b_{kj}\, \dot q_k\, \dot q_j \qquad (b_{kj} = b_{jk} = \mathrm{const})$$

[1] Здесь и далее голоморфность и другие свойства функций предполагаются в некоторой малой окрестности невозмущенного движения.

Уравнения движения гироскопического стабилизатора можно записать в виде:

$$\frac{dq_k}{dt} = \dot q_k, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\sum_{j=1}^{n} (g_{kj} + b_{kj})\,\dot q_j - \frac{\partial (R - R^{(2)})}{\partial \dot q_k}$$

$$(k = 1, \ldots, m)$$

$$\frac{dq_k}{dt} = \dot q_k, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\sum_{j=1}^{n} (g_{kj} + b_{kj} + b_{kj}'')\,\dot q_j - \tag{1.1}$$

$$-\sum_{j=1}^{l} c_{kj} q_j + M_k' - \frac{\partial (R - R^{(2)})}{\partial \dot q_k} \qquad (k = m+1, \ldots, n)$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k,\,j=1}^{n} a_{kj}\dot q_k \dot q_j \qquad (a_{kj} = a_{jk})$$

Здесь T — квадратичная форма скоростей, определенно-положительная при $q_1 = 0, \ldots, q_n = 0$; величины a_{kj}, $g_{kj} (g_{kj} = -g_{jk})$ — голоморфные функции $q_1, \ldots, q_n$, причем

$$a_{kj}(0, \ldots, 0) \equiv a_{kj}^\circ, \quad g_{kj}(0, \ldots, 0) \equiv g_{kj}^\circ.$$

Ставится вопрос об устойчивости невозмущенного движения

$$q_1 = 0, \ldots, \quad q_n = 0, \quad \dot q_1 = 0, \ldots, \dot q_n = 0 \tag{1.2}$$

Уравнения первого приближения для системы (1.1)

$$\frac{dq_k}{dt} = \dot q_k, \qquad \sum_{j=1}^{n}\left[a_{kj}^\circ \frac{d\dot q_j}{dt} + (g_{kj}^\circ + b_{kj})\,\dot q_j\right] = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

$$\frac{dq_k}{dt} = \dot q_k, \sum_{j=1}^{n}\left[a_{kj}^\circ \frac{d\dot q_j}{dt} + (g_{kj}^\circ + b_{kj} + b_{kj}'')\,\dot q_j\right] + \sum_{j=1}^{l} c_{kj} q_j = 0$$

$$(k = m+1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

имеют характеристическое уравнение с нулевым корнем кратности m. Если среди остальных $n + l$ корней найдется хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение (1.2) неустойчиво. Если это не так, то мы имеем дело с особенным, по Ляпунову, случаем [1].

Теорема 1. Если корни уравнения

$$\left|\begin{array}{c:c} \| a_{kj}^\circ \lambda^2 + (g_{kj}^\circ + b_{kj})\,\lambda \| & \| a_{kj}^\circ \lambda + g_{kj}^\circ + b_{kj} \| \\ \hdashline \| a_{kj}^\circ \lambda^2 + (g_{kj}^\circ + b_{kj} + b_{kj}'')\,\lambda + c_{kj} \| & \| a_{kj}^\circ \lambda + g_{kj}^\circ + b_{kj} + b_{kj}'' \| \end{array}\right| = 0 \tag{1.4}$$

имеют отрицательные вещественные части

$$\operatorname{Re}\lambda_k < 0 \qquad (k = 1, \ldots, n + l) \tag{1.5}$$

---

[1] Поэтому [8] при исследовании устойчивости движения (1.2) здесь нельзя ограничиваться изучением этого вопроса для линейных уравнений (1.3) (как в [7]) или пренебрегать непосредственным силовым воздействием поплавковых гироскопов на платформу (как в [6,5]). Как известно [3], не пригодны для этой цели и уравнения прецессионной теории.

то невозмущенное движение (1.2) системы (1.1) устойчиво (относительно $q_1, \ldots, q_n, \dot q_1, \ldots, \dot q_n$). Всякое возмущенное движение асимптотически приближается к одному из движений

$$\dot q_1 = 0, \ldots, \dot q_n = 0, \quad q_1 = 0, \ldots, q_l = 0, \quad q_{l+1} = c_{l+1}, \ldots, q_n = c_n \qquad (1.6)$$

Система (1.1) допускает m не зависящих от t голоморфных интегралов Ляпунова

$$\sum_{j=1}^{n} [(g_{kj}^{\circ} + b_{kj}) q_j + a_{kj}^{\circ} \dot q_j] + f_k (q_1, \ldots, q_n, \dot q_1, \ldots, \dot q_n) = A_k$$
$$(k = 1, \ldots, m) \qquad (1.7)$$

где f_k не содержат членов ниже второго порядка и уничтожаются при условии (1.6), $c_{l+1}, \ldots, c_n, A_1, \ldots, A_m$ — произвольные постоянные, сколь угодно малые, если начальные возмущения достаточно малы.

В реальных условиях, кроме сил, учтенных в уравнениях (1.1), будут действовать некоторые возмущающие силы. Наиболее интенсивными являются возмущающие силы, вызывающие моменты вокруг осей стабилизации. К последним принадлежат, например, моменты сил тяжести, обусловленные неточностями балансировки платформы и колец подвеса. Они являются функциями координат и параметров системы (обусловлены возмущениями параметров [9]).

Пусть коэффициенты в разложениях величин, входящих в (1.1), удовлетворяя ранее указанным требованиям, являются голоморфными функциями постоянных параметров $a_1, \ldots, a_i$, характеризующих массы, моменты инерции, диссипацию и т. д.

Далее, в правые части последней группы уравнений (1.1), по предположению, добавляются возмущающие силы $a_{i+k-m}\Phi_k$ $(k = m + 1, \ldots, n)$, где Φ_k — голоморфные функции $a_1, \ldots, a_i, q_1, \ldots, q_n$. Они обусловлены возмущениями параметров $a_{i+1}, \ldots, a_{i+l}$, которые могут означать, например, смещения центров тяжести платформы и колец подвеса от их осей вращения.

Таким образом, в возмущенном движении построена некоторая новая модель гироскопического стабилизатора, полнее отражающая свойства действительного материального объекта изучения.

Если $|c_{kj}|_1^l \neq 0$, то система уравнений

$$\sum_{j=1}^{l} c_{kj} q_j = M_k' (a_1, \ldots, a_i, q_1, \ldots, q_l, 0, \ldots, 0) + a_{i+k-m} \Phi_k$$
$$(k = m + 1, \ldots, n)$$

определяет l неявных функций

$$q_k = v_k (a_1, \ldots, a_{i+l}, q_{l+1}, \ldots, q_n) \qquad (k = 1, \ldots, l)$$

Теорема 2. Если выполняется условие (1.5), то невозмущенное движение

$$q_1 = 0, \ldots, q_n = 0, \qquad \dot q_1 = 0, \ldots, \dot q_n = 0,$$
$$a_1 = \alpha_1, \ldots, a_i = \alpha_i, \quad a_{i+1} = 0, \ldots, a_{i+l} = 0$$

устойчиво (по отношению к $q_1, \ldots, q_n, \dot q_1, \ldots, \dot q_n$) при параметрических возмущениях [9]. Всякое возмущенное движение асимптотически приближается к одному из движений

$$\dot{q}_1=0,\ldots,\dot{q}_n=0,\quad q_{l+1}=c_{l+1},\ldots,q_n=c_n,\quad q_k=v_k(a_1,\ldots,a_{i+l},\ c_{l+1},\ldots,c_n) \tag{1.8}$$
$$(k=1,\ldots,l)$$

Система уравнений движения допускает m интегралов типа (1.7), но в них теперь f_k — голоморфные функции $q_1,\ldots,q_n$ $\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n$, $a_1-\alpha_1,\ldots,a_i-\alpha_i$, $a_{i+1},\ldots,a_{i+l}$, не содержащие членов ниже второй степени и уничтожающиеся при условии (1.8). Интегралы эти доставляют оценки для возмущений $|q_k{}^\circ|$, $|\dot{q}_k{}^\circ|$, $|a_m-\alpha_m|$, при удовлетворении которым $|c_k|$ и $|v_k(a_1,\ldots,a_{i+l},\ c_{l+1},\ldots,c_n)|$ не превосходят заданных положительных чисел.

Когда $l=m={}^1/_2 n$ и рассматривается стабилизатор «с постоянными кинетическими моментами гироскопов», обычно

$$g_{kj}{}^\circ=0,\qquad a_{kj}{}^\circ=0\qquad (k\neq j,\ k,\ j=1,\ldots,m),$$
$$b_{kj}=0,\qquad (k\neq j,\ k=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m)$$

Для выполнения условий (1.5) необходимо

$$\begin{vmatrix} g_{1,\,m+1}{}^\circ & \cdots & g_{1n}{}^\circ \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{m\,m+1}{}^\circ & \cdots & g_{mn}{}^\circ \end{vmatrix}\neq 0,\qquad |c_{kj}|_1{}^l\neq 0 \tag{1.9}$$

При этом, если коэффициенты c_{kj}, b_{kj}'' выбрать из условий

$$b_{kj}''=a_{kj}{}^\circ\varkappa_j,\quad c_{kj}=g_{kj}{}^\circ\varkappa_j\qquad \left(\varkappa_j=\frac{b_{jj}}{a_{jj}{}^\circ}>0\right)\quad \begin{pmatrix} k=m+1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,l \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

то $\lambda_{n+1}=-\varkappa_1,\ldots,\lambda_{n+l}=-\varkappa_l$, а $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} \|a_{jj}{}^\circ\lambda\|_1{}^m & \|a_{kj}{}^\circ\lambda+g_{kj}{}^\circ\| \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \|a_{kj}{}^\circ\lambda+g_{kj}{}^\circ\| & \|a_{kj}{}^\circ\lambda+g_{kj}{}^\circ+b_{kj}+b_{kj}''\| \end{vmatrix}=0 \tag{1.11}$$

Если $b_{kj}+b_{kj}''=0$ $(j,k=m+1,\ldots,n)$, то все они будут чисто мнимыми [2,10]. Если же

$$|b_{kj}+b_{kj}''|_{m+1}{}^v>0\qquad (v=m+1,\ldots,n)$$

что обычно и имеет место, то можно показать, что

$$\operatorname{Re}\lambda_k<0\qquad (k=1,\ldots,n)$$

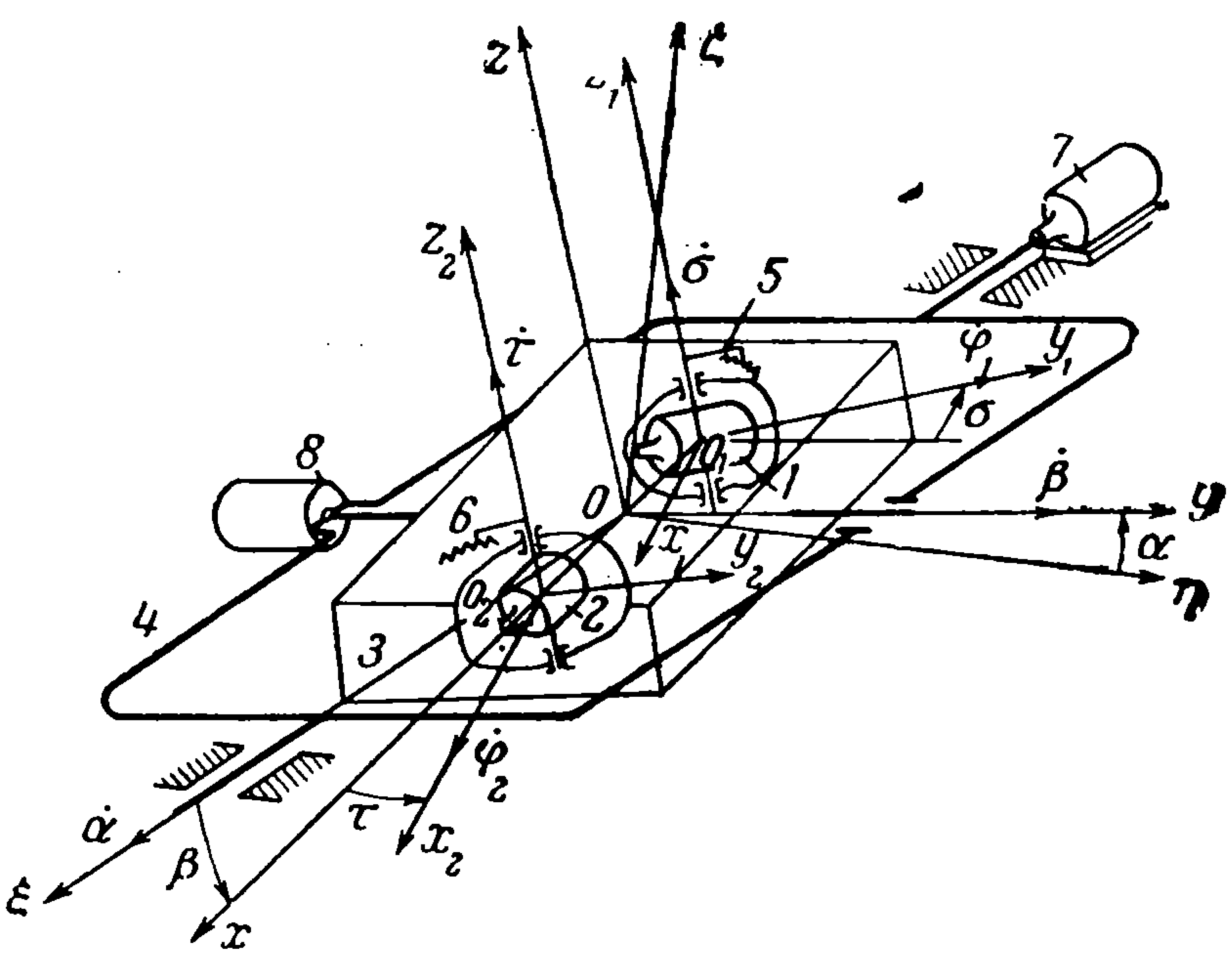
Для стабилизаторов с переменными кинетическими моментами гироскопов, когда механические характеристики гиромоторов, будучи жесткими, могут быть записаны в виде

$$M_k=-b_k\dot{q}_k+M'_k\qquad (b_k>0,\ k=l+1,\ldots,m) \tag{1.12}$$

где $\dot{q}_{l+1},\ldots,\dot{q}_m$ — возмущения скоростей собственных вращений гироскопов, M_k' — нелинейности, вопрос решается аналогично. При условии (1.10) и полной диссипации

$$\operatorname{Re}\lambda_k<0\qquad (k=1,\ldots,n+l)$$

2. Рассмотрим двухосную платформу [7], стабилизируемую в пространстве с помощью двух гироскопов и управляемых ими двигателей, представленную на фигуре, где



$O\xi\eta\zeta$ — инерциальная система координат, $Oxyz$, $O_1x_1y_1z_1$, $O_2x_2y_2z_2$ — трехгранники главных осей инерции платформы 3 (и жестко связанного с ней ротора двигателя 8) и кожухов гиромоторов 1 и 2; на фигуре 5 и 6 — потенциометрические съемные устройства, 7 и 8 — серводвигатели.

Пусть A_n, B_n, C_n, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 — моменты инерции платформы и гиромоторов относительно этих осей. Оси O_1y_1 и O_2x_2 собственных вращений гироскопов движутся в плоскости платформы Oxy. Расстояние OO_1 обозначим через l_1. Введем также обозначения:

$$C \equiv C_n + C_1 + C_2 + 2ml_1^2$$

$$A_x(\sigma, \tau) \equiv A_n + A_1 \cos^2\sigma + B_1 \sin^2\sigma + A_2 \cos^2\tau + B_2 \sin^2\tau$$

$$A_\xi(\beta, \sigma, \tau) \equiv A_x(\sigma, \tau) \cos^2\beta + C \sin^2\beta + A''$$

$$B(\sigma, \tau) \equiv B_n + 2ml_1^2 + A_1 \sin^2\sigma + B_1 \cos^2\sigma + A_2 \sin^2\tau + B_2 \cos^2\tau$$

$$I_{\alpha\beta}(\sigma, \tau) \equiv (A_1 - B_1) \sin\sigma \cos\sigma + (A_2 - B_2) \sin\tau \cos\tau$$

где A'' — момент инерции рамы 4 (и тел, связанных с ней) относительно оси $O\xi$, m — масса гиромотора; φ_1, φ_2 — углы собственных вращений гироскопов, $H_1 = I_1\dot{\varphi}_1^0$, $H_2 = I_2\dot{\varphi}_2^0$ — их невозмущенные кинетические моменты

$$\xi_1 = \varphi_1 - \dot{\varphi}_1^0 t, \quad \xi_2 = \varphi_2 - \dot{\varphi}_2^0 t, \quad \alpha' = \alpha - \alpha_0, \quad \beta' = \beta - \beta_0$$

Уравнения движения запишем в форме Лагранжа с учетом масс всех тел системы

$$C_1\ddot{\sigma} + C_1\ddot{\alpha}\sin\beta + (A_1 - B_1)(\dot{\alpha}^2\cos^2\beta - \dot{\beta}^2)\sin\sigma\cos\sigma +$$
$$+ [C_1 - (A_1 - B_1)\cos 2\sigma]\,\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta + I_1\dot{\xi}_1(\dot{\beta}\sin\sigma + \dot{\alpha}\cos\beta\cos\sigma) =$$
$$= -H_1(\dot{\beta}\sin\sigma + \dot{\alpha}\cos\beta\cos\sigma) + M_{z1}$$

$$C_2\ddot{\tau} + C_2\ddot{\alpha}\sin\beta + [C_2 - (A_2 - B_2)\cos 2\tau]\,\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta + (A_2 - B_2) \times$$
$$\times (\dot{\alpha}^2\cos^2\beta - \dot{\beta}^2)\sin\tau\cos\tau + I_2\dot{\xi}_2(\dot{\alpha}\cos\beta\sin\tau - \dot{\beta}\cos\tau) =$$
$$= -H_2(\dot{\alpha}\cos\beta\sin\tau - \dot{\beta}\cos\tau) + M_{z2}$$

$$I_1(\ddot{\xi}_1 + \ddot{\beta}\cos\sigma - \ddot{\alpha}\cos\beta\sin\sigma - \dot{\beta}\dot{\sigma}\sin\sigma + \dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\sin\sigma - \dot{\alpha}\dot{\sigma}\cos\beta\cos\sigma) = M_1$$

$$I_2(\ddot{\xi}_2 + \ddot{\beta}\sin\tau + \ddot{\alpha}\cos\beta\cos\tau + \dot{\beta}\dot{\tau}\cos\tau - \dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\tau - \dot{\alpha}\dot{\tau}\cos\beta\sin\tau) = M_2$$

$$A_\xi(\beta,\sigma,\tau)\ddot\alpha + I_{\alpha\beta}(\sigma,\tau)\cos\beta\ddot\beta + C_1\sin\beta\ddot\sigma + C_2\sin\beta\ddot\tau - I_1\ddot\xi_1\cos\beta\sin\sigma +$$
$$+ I_2\ddot\xi_2\cos\beta\cos\tau + \dot A_\xi(\beta,\sigma,\tau)\dot\alpha + \dot I_{\alpha\beta}(\sigma,\tau)\cos\beta\dot\beta - I_{\alpha\beta}(\sigma,\tau)\sin\beta\dot\beta^2 +$$
$$+ C_1\cos\beta\dot\beta\dot\sigma + C_2\cos\beta\dot\tau\dot\beta - I_1\dot\xi_1\dot\sigma\cos\beta\cos\sigma +$$
$$+ I_1\dot\xi_1\dot\beta\sin\beta\sin\sigma - I_2\dot\xi_2\dot\beta\sin\beta\cos\tau - I_2\dot\xi_2\dot\tau\cos\beta\sin\tau =$$
$$= H_1(\dot\sigma\cos\beta\cos\sigma - \dot\beta\sin\beta\sin\sigma) + H_2(\dot\beta\sin\beta\cos\tau + \dot\tau\cos\beta\sin\tau) + M_\xi$$

$$B(\sigma,\tau)\ddot\beta + I_{\alpha\beta}(\sigma,\tau)\cos\beta\ddot\alpha + I_1\ddot\xi_1\cos\sigma + I_2\ddot\xi_2\sin\tau + \dot B(\sigma,\tau)\dot\beta +$$
$$+ \dot I_{\alpha\beta}(\sigma,\tau)\cos\beta\dot\alpha + [A_x(\sigma,\tau) - C]\dot\alpha^2\sin\beta\cos\beta - C_1\dot\alpha\dot\sigma\cos\beta - C_2\dot\alpha\dot\tau\cos\beta -$$
$$- I_1\dot\xi_1(\dot\sigma + \dot\alpha\sin\beta)\sin\sigma + I_2\dot\xi_2(\dot\tau + \dot\alpha\sin\beta)\cos\tau = H_1(\dot\sigma + \dot\alpha\sin\beta)\sin\sigma -$$
$$- H_2(\dot\tau + \dot\alpha\sin\beta)\cos\tau + M_y$$

Рассмотрим устойчивость следующих положений равновесия платформы (перманентных вращений гироскопов)

$$\sigma = 0,\quad \tau = 0,\quad \alpha = \alpha_0,\quad \beta = \beta_0,\quad \dot\sigma = 0,\quad \dot\tau = 0,\quad \dot\alpha = 0,$$
$$\dot\beta = 0,\quad \dot\xi_1 = 0,\quad \dot\xi_2 = 0\ \left(|\beta_0| < \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.1}$$

Когда моменты вокруг осей вращения равны нулю (все тела системы идеально уравновешены, серводвигатели *7* и *8* выключены), в первом приближении равновесия (2.1) устойчивы. Частоты собственных колебаний определяются корнями характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2}{}^\circ = \frac{\pm iH_1\cos\beta_0}{\sqrt{A^*(\beta_0)C_1}},\qquad \lambda_{3,4}{}^\circ = \frac{\pm iH_2}{\sqrt{B^*C_2}}\qquad (i = \sqrt{-1})$$

где

$$A^*(\beta_0) \equiv A_\xi(\beta_0,0,0) - (C_1 + C_2)\sin^2\beta_0 - I_2\cos^2\beta_0,\qquad B^* \equiv B(0,0) - I_1$$

Практически в качестве гиромоторов применяются асинхронные электродвигатели, механические характеристики которых определяются выражениями (1.12); при этом имеется полная диссипация; тогда любое положение равновесия (2.1) устойчиво. Собственные колебания платформы затухают [11]. Тем не менее, аналогично [11] можно показать, что любое положение равновесия (2.1) неустойчиво при параметрических возмущениях, обусловленных неточностями балансировки платформы и рамы. Является потребность введения в систему стабилизирующих двигателей.

Пусть при включенных серводвигателях моменты

$$M_{z_1} = -b_\sigma\dot\sigma + M_{z_1}',\qquad M_{z_2} = -b_\tau\dot\tau + M_{z_2}'$$
$$M_y = -b_\beta\dot\beta - k_2\tau + M_y',\quad M_\xi = -b_\alpha\dot\alpha + k_1\sigma - b_{\alpha\sigma}''\dot\sigma - b_{\alpha\tau}''\dot\tau + M_\xi'$$

где постоянные $k_1, k_2, b_\sigma, b_\tau$ — положительны, $b_\beta, b_\alpha, b_{\alpha\sigma}'', b_{\alpha\tau}''$ — не отрицательны. Механические характеристики гиромоторов предположим абсолютно жесткими ($\dot\varphi_1 \equiv \dot\varphi_1{}^\circ$, $\dot\varphi_2 \equiv \dot\varphi_2{}^\circ$, [7]).

Если при $\beta_0 = 0\ (b_{\alpha\tau}'' = b_{\alpha\sigma}'' = 0)$ выполняются условия

$$\left(\frac{b_\sigma}{C_1} + \frac{b_\alpha}{A_\xi(0,0,0)}\right)(b_\alpha b_\sigma + H_1{}^2) > H_1k_1 > 0$$
$$\left(\frac{b_\tau}{C_2} + \frac{b_\beta}{B(0,0)}\right)(b_\tau b_\beta + H_2{}^2) > H_2k_2 > 0 \tag{2.2}$$

или при некотором произвольном $\beta_0\ (b_\alpha > 0,\ b_\beta > 0)$

$$k_1 = \frac{H_1b_\sigma}{C_1}\cos\beta_0,\quad b_{\alpha\sigma}'' = b_\sigma\sin\beta_0,\quad k_2 = \frac{H_2b_\tau}{C_2},\quad b_{\alpha\tau}'' = b_\tau\sin\beta_0 \tag{2.3}$$

то соответствующее равновесие (2.1) устойчиво (асимптотически относительно $\sigma, \tau, \dot\sigma, \dot\tau, \dot\alpha, \dot\beta$). Устойчивость сохраняется при параметрических возмущениях балансировки платформы и рамы. При этом всякое возмущенное движение приближается к одному из равновесий

$$\sigma = \sigma_\infty, \qquad \tau = \tau_\infty, \qquad \alpha' = \alpha_\infty', \qquad \beta' = \beta_\infty'.$$

Замечание. Если при условиях (2.3) $b_\alpha = 0$, $b_\beta = 0$, то корни уравнения типа (1.4) равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm iH_1 \cos\beta_0}{\sqrt{(A^*(\beta_0) + I_2\cos^2\beta_0)C_1}}, \qquad \lambda_{3,4} = \frac{\pm iH_2}{\sqrt{B(0,0)C_2}}, \qquad \lambda_5 = -\frac{b_\sigma}{C_1}, \qquad \lambda_6 = -\frac{b_\tau}{C_2}$$

Полагая плоскость платформы горизонтальной при $\alpha = 0$, $\beta = 0$, силовую функцию от тяжести после возмущений координат центров тяжести платформы и рамы запишем в виде

$$U = -r_1 \sin(\alpha + \gamma) - r_2 \cos\alpha \cos(\beta + \delta)$$

где r_1, r_2, γ, δ — постоянные; и получаем оценки

$$|\sigma_\infty| < \frac{\eta}{k_1}(1 + |\sin\alpha_0| + O(\eta)) \leqslant \frac{2\eta}{k_1}, \qquad |\tau_\infty| < \frac{\eta}{k_2}$$

$$|\alpha'_\infty| < |\alpha'^\circ| + \frac{\eta}{H_1\cos\beta_0}\left[b_\sigma\left(1 + \frac{1 + |\sin\alpha_0|}{k_1}\right) + C_1(1 + |\sin\beta_0|) + O(\eta)\right]$$

$$|\beta_\infty'| < |\beta'^\circ| + \frac{\eta}{H_2}\left[b_\tau\left(1 + \frac{1}{k_2}\right) + C_2(1 + |\sin\beta_0|) + O(\eta)\right]$$

где η — наибольший модуль возмущений (в безразмерной форме)

$$\sigma^\circ, \tau^\circ, \alpha'^\circ, \beta'^\circ, \dot\sigma^\circ, \dot\tau^\circ, \dot\alpha^\circ, \dot\beta^\circ, a_1 - \alpha_1, \ldots, a_i - \alpha_i, r_1, r_2$$

Сравнение этих оценок с (2.2) показывает, что выбор параметров (2.3) может оказаться близким к оптимальному.

Учет переменности кинетических моментов гироскопов, обусловленной неабсолютной жесткостью механических характеристик гиромоторов, как в (1.12), показывает, что при условиях (2.2) или (2.3) устойчивость сохраняется.

Поступила 16 III 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. В., Ройтенберг Я. Н. К теории силовых гироскопических горизонтов. Изв. АН СССР, ОТН, 1948, № 3.
2. Меркин Д. Р. Гироскопические системы. ГИТТЛ. 1956.
3. Ишлинский А. Ю. К теории сложных систем гироскопической стабилизации. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
4. Дрейпер, Ригли, Гроэ. Поплавковый гироприбор и его применение для геометрической стабилизации на движущихся объектах. Сб. обз. и пер. «Вопросы ракетной техники», 1957, № 4.
5. Сломянский Г. А., Прядилов Ю. Н. Поплавковые гироскопы и их применение. Оборонгиз, 1958.
6. Горчицкий Э. Динамика стабилизированной в пространстве платформы. Сб. обз. и пер. «Механика», 1958, № 1.
7. Кузовков Н. Т. О движении гиростабилизированной платформы при больших углах отклонения. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 1.
8. Ляпунов А. М. К вопросу об устойчивости движения. Собр. соч., т. II, Изд-во АН СССР, 1956.
9. Кузьмин П. А. Устойчивость при параметрических возмущениях. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 1.
10. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. II, Изд-во АН СССР, 1956.
11. Матросов В. М. К вопросу устойчивости гироскопических систем. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1959, вып. XLIX.