Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПОВ ФУКО С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

А. М. Табаровский

(Москва)

Фуко впервые установил свойства гироскопа, находящегося на земной поверхности, движение которого стеснено таким образом, что ось собственного вращения принуждена все время оставаться в вертикальной или в горизонтальной плоскости (см., например, [1]).

Ниже при этих предположениях с учетом масс колец подвеса составляются уравнения движения и исследуется устойчивость стационарных решений, указанных Фуко. При построении функций Ляпунова, решающих задачу, используется метод Четаева. Выясняется также влияние на устойчивость движения гироскопа диссипативных сил с полной диссипацией.

1. Вообразим гироскоп в кардановом подвесе. Предположим, что ось внешнего кольца карданова подвеса вертикальна, а ось внутреннего кольца горизонтальна. Будем считать, что внешнее кольцо закреплено и не может вращаться относительно земли.

Введем связанную с землей систему координат $Ox_1y_1z_1$, начало которой находится в точке пересечения осей карданова подвеса. Ось z_1 направлена по вертикали вверх и совпадает с осью неподвижного внешнего кольца, оси x_1 и y_1 расположены в горизонтальной плоскости и направлены соответственно на восток и на север.

Рассмотрим также систему координат $Oxyz$, оси которой связаны с кожухом. Ось x направлена по оси вращения кожуха. Так как внешнее кольцо предположено неподвижным, то эта ось занимает в горизонтальной плоскости неизменное положение, определяемое углом α. Последний отсчитывается от оси x_1 против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси z_1. Ось z направлена по оси симметрии гироскопа, ось y дополняет первые две до правой тройки. Ось собственного вращения принуждена, таким образом, оставаться все время в вертикальной плоскости, образующей с плоскостью меридиана угол α.

Положение гироскопа относительно земли определяется двумя углами: θ — угол оси собственного вращения с вертикалью, лежащий в упомянутой вертикальной плоскости, и φ — угол поворота гироскопа относительно системы $Oxyz$ (угол собственного вращения).

Проекции мгновенных угловых скоростей ω° кожуха и ω гироскопа в их движении относительно системы $Ox_1y_1z_1$ на оси координат системы $Oxyz$ определяются соответственно следующими уравнениями:

$$p^\circ = \dot\theta, \quad q^\circ = 0, \quad r^\circ = 0$$
$$p = \dot\theta, \quad q = 0, \quad r = \dot\varphi$$

Желая учесть влияние на движение гироскопа вращения Земли, выберем в качестве основной (инерциальной) системы координат систему с началом в центре Земли, оси которой движутся поступательно по отношению к направлениям из центра масс солнечной системы на неподвижные звезды.

Рассмотрим, наконец, вспомогательную систему координат $O\xi\eta\zeta$, движущуюся поступательно по отношению к осям ξ_a, η_a, ζ_a основной системы. В дальнейшем можно будет считать эту систему неподвижной, если к силам, действующим на механическую систему, присоединить силы инерции переносного движения. Последние можно объединить с силами притяжения Земли; эта равнодействующая силы притяжения и центробежной силы переносного движения является весом. Таким образом, считая систему координат $O\xi\eta\zeta$ неподвижной, в качестве действующей силы следует рассматривать не силу притяжения, а вес.

Обозначим через $\mathbf{u}$ мгновенную угловую скорость системы координат $Ox_1y_1z_1$ в ее вращении относительно системы $O\xi\eta\zeta$. Очевидно, $\mathbf{u}$ представляет угловую скорость вращения Земли относительно системы координат ξ_a, η_a, ζ_a. Ее проекции на оси x, y, z равны соответственно

$$u_x = u\cos\lambda\sin\alpha, \qquad u_y = u(\cos\lambda\cos\alpha\cos\theta + \sin\lambda\sin\theta)$$
$$u_z = u(-\cos\lambda\cos\alpha\sin\theta + \sin\lambda\cos\theta) \qquad (u = 0.000073\ \text{сек.}^{-1})$$

Здесь u — модуль $\mathbf{u}$, а λ — широта.

Скорость любой точки кожуха и гироскопа в их движении относительно системы $O\xi\eta\zeta$ представляются соответственно в виде

$$\mathbf{v}^\circ = (\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}^\circ) \times \mathbf{r}, \qquad \mathbf{v} = (\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки.

Предположим, что оси x, y, z являются главными осями эллипсоидов инерции для кожуха и для гироскопа и обозначим через A°, B°, C° моменты инерции кожуха, а через A, $B = A$, C — моменты инерции гироскопа относительно этих осей.

Выражения для кинетических энергий T° кожуха и T гироскопа имеют вид

$$2T^\circ = A^\circ(\dot\theta + u\cos\lambda\sin\alpha)^2 + B^\circ u^2(\cos\lambda\cos\alpha\cos\theta + \sin\lambda\sin\theta)^2 +$$
$$+ C^\circ u^2(-\cos\lambda\cos\alpha\sin\theta + \sin\lambda\cos\theta)^2$$

$$2T = A(\dot\theta + u\cos\lambda\sin\alpha)^2 + Au^2(\cos\lambda\cos\alpha\cos\theta + \sin\lambda\sin\theta)^2 +$$
$$+ C[u(-\cos\lambda\cos\alpha\sin\theta + \sin\lambda\cos\theta) + \dot\varphi]^2$$

Если предположить, что трение в подшипниках отсутствует и что активные силы суть только силы тяжести, то силовая функция будет иметь вид

$$U = -mgl\cos\theta$$

Здесь m означает массу системы гироскоп-кожух, а l — координату z центра тяжести этой системы.

Так как координаты θ и φ — определяющие и голономные, то уравнения движения можно записать в форме уравнений Лагранжа второго рода с функцией L, имеющей вид

$$2L = (A + A^\circ)\,\dot\theta^2 + C\dot\varphi^2 + 2(A + A^\circ)\,u\,\dot\theta\cos\lambda\sin\alpha +$$
$$+ 2\,Cu\,\dot\varphi\,(-\cos\lambda\cos\alpha\sin\theta + \sin\lambda\cos\theta) +$$
$$+ (A + B^\circ)\,u^2(\cos\lambda\cos\alpha\cos\theta + \sin\lambda\sin\theta)^2 + (C + C^\circ)\,u^2 \times$$
$$\times\,(-\cos\lambda\cos\alpha\sin\theta + \sin\lambda\cos\theta)^2 - 2\,mg\,l\cos\theta$$

Отметим, что живая сила неподвижного относительно Земли внешнего кольца карданова подвеса постоянна и поэтому не включена в функцию L.

Уравнения движения допускают следующие интегралы:

$$(A + A^\circ)\,\dot\theta^2 + C\dot\varphi^2 - (A + B^\circ)\,u^2(\cos\lambda\cos\alpha\cos\theta + \sin\lambda\sin\theta)^2 -$$
$$-(C + C^\circ)\,u^2(-\cos\lambda\cos\alpha\sin\theta + \sin\lambda\cos\theta)^2 + 2\,mg\,l\cos\theta = 2h$$

$$\dot\varphi + u\,(-\cos\lambda\cos\alpha\sin\theta + \sin\lambda\cos\theta) = r = \mathrm{const}$$

из которых первый есть обобщенный интеграл живой силы, а второй соответствует циклической координате φ.

Исключая $\dot\varphi$ при помощи второго интеграла, получим для определения угла θ дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Его интегрирование заменой переменной приводится к квадратуре эллиптического типа.

2. Предположим в дальнейшем, что точка O находится в северном полушарии, но не на полюсе и не на экваторе, т. е. что

$$0 < \lambda < {}^1\!/_2\,\pi$$

При $l = 0$ (гироскоп уравновешен) уравнения движения допускают, как легко проверить, частное решение

$$\theta = -\operatorname{arc\,tg}\frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\lambda}, \qquad \dot\theta = 0, \qquad r = r_0 \tag{2.1}$$

В этом случае ось собственного вращения образует с вертикалью постоянный угол и гироскоп вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью. Положим для возмущенного движения

$$\theta = -\operatorname{arc\,tg}\frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\lambda} + \xi_1, \qquad \dot\theta = \dot\xi_1 = \eta_1, \qquad r = r_0 + \eta_2$$

Уравнения возмущенного движения допускают следующие интегралы:

$$V_1 = (A + A^\circ)\,\eta_1^2 + C\eta_2^2 + 2C\,(r_0 - u\gamma)\,\eta_2 +$$
$$+ u\gamma\,[Cr_0 + u\,(C^\circ - A - B^\circ)\,\gamma]\,\xi_1^2 + \ldots = \mathrm{const}$$

$$V_2 = \eta_2 = \mathrm{const} \qquad (\gamma = \sqrt{\sin^2\lambda + \cos^2\lambda\cos^2\alpha} > 0)$$

из которых первый выписан с точностью до членов второго порядка малости включительно.

Рассмотрим интеграл

$$V = V_1 - 2C\,(r_0 - u\gamma)\,V_2 = (A + A^\circ)\,\eta_1^2 + C\eta_2^2 + u\gamma\,[Cr_0 +$$
$$+ u\,(C^\circ - A - B^\circ)\,\gamma]\,\xi_1^2 + \ldots = \mathrm{const}.$$

Функция $V(\xi_1, \eta_1, \eta_2)$ будет определенно-положительной функцией своих аргументов при выполнении условия

$$Cr_0 + u(C^\circ - A - B^\circ)\sqrt{\sin^2\lambda + \cos^2\lambda\cos^2\alpha} > 0 \tag{2.2}$$

которое согласно теореме Ляпунова об устойчивости является достаточным условием устойчивости движения (2.1) по отношению к $\theta, \dot{\theta}, r$, а следовательно, и по отношению к $\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$.

Рассмотрим следующие частные случаи.

1°. Случай $\alpha = 0$, когда ось гироскопа принуждена оставаться в плоскости меридиана. В этом случае $\theta = {}^1/_2\,\pi + \lambda$, т. е. ось собственного вращения параллельна оси мира. Условие устойчивости (2.2) принимает вид $Cr_0 + u(C^\circ - A - B^\circ) > 0$.

2°. Случай $\alpha = {}^1/_2\,\pi$, когда срединная плоскость внешнего кольца совпадает с плоскостью меридиана. В этом случае $\theta = 0$, т. е. ось гироскопа вертикальна, а условием устойчивости будет

$$Cr_0 + u(C^\circ - A - B^\circ)\sin\lambda > 0$$

Установим необходимость условия (2.2). Рассмотрим функцию

$$V = (A + A^\circ)\,\xi_1\,\dot{\xi}_1$$

Ее производная по времени, взятая в силу уравнений возмущенного движения, имеет вид

$$V' = (A + A^\circ)\,\dot{\xi}_1^2 - u\gamma\,[Cr_0 + u(C^\circ - A - B^\circ)\gamma]\,\xi_1^2 + \ldots$$

и при выполнении условия

$$Cr_0 + u(C^\circ - A - B^\circ)\gamma < 0$$

является определенно-положительной функцией переменных ξ_1, $\dot{\xi}_1$, а функция V может принимать положительные значения. На основании теоремы Четаева движение (2.1) оказывается при этом условии неустойчивым. Таким образом, условие (2.2) является при исключении границы необходимым и достаточным условием устойчивости движения (2.1).

3. Предположим, что, помимо сил тяжести, на рассматриваемую механическую систему действуют еще диссипативные силы с полной диссипацией. Уравнения движения в этом случае будут отличаться от использованных выше наличием моментов сил сопротивления в правых частях. Эти последние равны частным производным от функции Релея $F(\dot{\theta}, \dot{\varphi})$

$$2F = a\dot{\theta}^2 + 2b\dot{\theta}\dot{\varphi} + c\dot{\varphi}^2$$

которая представляет собой определенно-отрицательную квадратичную форму обобщенных скоростей с постоянными коэффициентами.

Уравнения движения будут допускать частное решение (2.1) только при условии приложения к системе некоторых дополнительных сил, постоянные моменты которых уравновешивают моменты сил сопротивления.

Исследуем при этих предположениях устойчивость движения (2.1) Для этого рассмотрим квадратичную форму W, представляющую собой совокупность членов второй степени в разложении рассмотренного выше интеграла V_1

$$W = (A + A^\circ)\eta_1^2 + C\eta_2^2 + u\gamma\,[Cr_0 + u\,(C^\circ - A - B^\circ)\,\gamma]\,\xi_1^2$$

В работе [2] показано, что если функция W — знакоопределенная, то движение (2.1), устойчивое при наличии только консервативных сил, переходит в асимптотически устойчивое при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией и сил, уравновешивающих диссипативные силы при движении (2.1). Условие знакоопределенности W совпадает с условием (2.2) устойчивости движения (2.1) при наличии одних только консервативных сил. Следовательно, при выполнении условия (2.2) и при наличии сил диссипативных с полной диссипацией, а также сил, их уравновешивающих, движение (2.1) асимптотически устойчиво.

4. Будем считать теперь, что внешнее кольцо карданова подвеса может вращаться вокруг своей вертикальной оси, а внутреннее кольцо неизменно скреплено с внешним так, что его срединная плоскость горизонтальна. Это соответствует предположению, что угол θ во все время движения равен $^1/_2\,\pi$. В этом случае ось собственного вращения принуждена оставаться в горизонтальной плоскости. Оси вращения кожуха x и собственного вращения z находятся в горизонтальной плоскости, ось y при таком расположении колец совпадает с вертикальной осью z_1.

Положение гироскопа относительно Земли определяется двумя углами: ψ — угол поворота внешнего кольца, отсчитываемый в горизонтальной плоскости от оси x_1, и угол собственного вращения φ.

Проекции мгновенных угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}^\circ$ системы внешнее кольцо — кожух и $\boldsymbol{\omega}$ гироскопа в их движении относительно системы координат $Ox_1y_1\,z_1$ на оси x, y, z имеют вид

$$p^\circ = 0, \quad q^\circ = \dot\psi, \quad r^\circ = 0; \qquad p = 0, \quad q = \dot\psi, \quad r = \dot\varphi$$

проекции $\mathbf{u}$ на те же оси

$$u_x = u\cos\lambda\sin\psi, \qquad u_y = u\sin\lambda, \qquad u_z = -u\cos\lambda\cos\psi$$

Обозначим через I_1, I_2, I_3 главные моменты инерции системы внешнее кольцо — кожух относительно осей x, y, z и через A, $B = A$, C — моменты инерции гироскопа относительно тех же осей. Живая сила T° системы внешнее кольцо — кожух и живая сила T гироскопа записываются в виде

$$2T^\circ = I_1u^2\cos^2\lambda\sin^2\psi + I_2(\dot\psi + u\sin\lambda)^2 + I_3u^2\cos^2\lambda\cos^2\psi$$
$$2T = Au^2\cos^2\lambda\sin^2\psi + A\,(\dot\psi + u\sin\lambda)^2 + C\,(\dot\varphi - u\cos\lambda\cos\psi)^2$$

Если активные силы суть только силы тяжести, то $U = 0$ (так как высота центра тяжести не меняется); функция Лагранжа имеет вид

$$2L = (A + I_2)\,\dot\psi^2 + C\dot\varphi^2 + 2\,(A + I_2)\,u\dot\psi\sin\lambda - 2\,Cu\,\dot\varphi\cos\lambda\cos\psi + {}$$
$$+ (A + I_1 - C - I_3)\,u^2\cos^2\lambda\sin^2\psi$$

Уравнения движения допускают обобщенный интеграл энергии и интеграл, соответствующий циклической координате φ

$$(A + I_2)\dot{\psi}^2 + C\dot{\varphi}^2 - (A + I_1 - C - I_3)u^2\cos^2\lambda\sin^2\psi = 2h$$
$$\dot{\varphi} - u\cos\lambda\cos\psi = r = \text{const} \qquad (4.1)$$

5. Исследуем устойчивость частного решения

$$\psi = \pi, \qquad \dot{\psi} = 0, \qquad r = r_0 \qquad (5.1)$$

уравнений движения. При этом ось собственного вращения занимает в горизонтальной плоскости положение север — юг.

Положим в возмущенном движении

$$\psi = \pi + \xi_1, \qquad \dot{\psi} = \dot{\xi}_1 = \eta_1, \qquad r = r_0 + \eta_2$$

Интегралам (4.1) соответствуют следующие интегралы уравнений возмущенного движения:

$$V_1 = (A + I_2)\eta_1^2 + C\eta_2^2 + 2C(r_0 - u\cos\lambda)\eta_2 +$$
$$+ u\cos\lambda\,[Cr_0 + u(I_3 - A - I_1)\cos\lambda]\,\xi_1^2 + \ldots = \text{const}$$
$$V_2 = \eta_2 = \text{const}$$

из которых первый выписан с точностью до членов второго порядка малости включительно. Интеграл

$$V = V_1 - 2C(r_0 - u\cos\lambda)V_2 = (A + I_2)\eta_1^2 + C\eta_2^2 + u\cos\lambda\,[Cr_0 +$$
$$+ u(I_3 - A - I_1)\cos\lambda]\,\xi_1^2 + \ldots = \text{const}$$

будет знакоопределенной функцией своих аргументов, если выполняется условие

$$Cr_0 + u(I_3 - A - I_1)\cos\lambda > 0 \qquad (5.2)$$

На основании теоремы Ляпунова об устойчивости последнее условие является достаточным условием устойчивости движения (5.1) по отношению к переменным $\psi, \dot{\psi}, r$, а следовательно, и по отношению к ψ, $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$.

Рассмотрение функции $V = (A + I_2)\xi_1\dot{\xi}_1$, ее производной по времени в силу уравнений возмущенного движения и применение теоремы Четаева о неустойчивости приводят к выводу, что условие (5.2) при исключении границы является также необходимым условием устойчивости движения (5.1).

Предположим, наконец, что на систему действуют диссипативные силы с полной диссипацией и дополнительные силы, постоянные моменты которых уравновешивают моменты сил сопротивления при движении (5.1). Рассмотрение функции

$$W = (A + I_2)\eta_1^2 + C\eta_2^2 + u\cos\lambda\,[Cr_0 + u\;(I_3 - A - I_1)\cos\lambda]\,\xi_1^2$$

убеждает, как и выше, в том, что движение (5.1) при выполнении условия (5.2) и при наличии указанных сил является асимптотически устойчивым.

Поступила 16 V 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения. М., ИИЛ, 1952, т. 2.
2. Пожарицкий Г. К. Об устойчивости диссипативных систем. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 4.