Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО КОМПАСА

В. Н. Кошляков

(Москва)

Рассматриваются некоторые асимптотические решения уравнений движения двухроторного гирокомпаса при больших значениях крутизны характеристики восстанавливающего момента, создаваемого пружинной связью между гироскопами. При этом используются результаты работ [1, 2, 3].

1°. Полученные в статье [3] дифференциальные уравнения движения двухроторного гирокомпаса, не обладающего свойствами пространственного гирокомпаса Геккелера — Аншютца, имеют вид

$$\begin{aligned}
&\alpha^{\cdot} - \frac{\nu^2}{u\cos\varphi}\beta - \Omega\operatorname{tg}\varphi\delta = 0, \qquad \gamma^{\cdot} + \frac{p^2}{\nu^2}u\sin\varphi\delta + \Omega\beta = 0 \\
&\beta^{\cdot} + u\cos\varphi\alpha - \Omega\gamma = 0, \qquad \delta^{\cdot} - \frac{\nu^2}{u\sin\varphi}\gamma + \Omega\operatorname{ctg}\varphi\alpha = 0
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Обозначения системы (1.1) те же, что и в уравнениях (2.3) статьи [3], с той только разницей, что искомые функции обозначены через α, β, γ, δ. Уравнения (1.1) могут быть представлены в виде двух уравнений относительно α и δ

$$\begin{aligned}
&\alpha^{\cdot\cdot} + (\nu^2 - \Omega^2)\alpha = 2\Omega\operatorname{tg}\varphi\delta^{\cdot} + \Omega^{\cdot}\operatorname{tg}\varphi\delta \\
&\varepsilon\delta^{\cdot\cdot} + (\nu^2 - \varepsilon\Omega^2)\delta = -2\varepsilon\Omega\operatorname{ctg}\varphi\alpha^{\cdot} - \varepsilon\Omega^{\cdot}\operatorname{ctg}\varphi\alpha \qquad \left(\varepsilon = \frac{\nu^2}{p^2}\right)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Как показано в работе [3], можно полагать

$$p = \frac{\sqrt{Pls}}{2B\sin\varphi} = \text{const} \tag{1.3}$$

Напомним, что Pl — маятниковый момент гиросферы, s — крутизна характеристики восстанавливающего момента, зависящая от жесткости пружинной связи между гироскопами, $2B$ — удвоенный собственный кинетический момент ротора гироскопа, φ — широта места.

2°. Допустим, что крутизна s выбрана столь большой, что безразмерный параметр ε, определяемый (1.2), является малой величиной по сравнению с единицей.

В этом предположении представим α и δ в виде рядов, расположенных по степеням ε, полагая

$$\alpha = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\alpha_n, \qquad \delta = \delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\delta_n \tag{2.1}$$

Подставляя выражения (2.1) в уравнения (1.2) и приравнивая члены при одинаковых степенях ε, можно последовательно получить уравнения для нахождения функций α_n и δ_n. В частности, α_0 и δ_0 удовлетворяют уравнениям

$$\alpha_0^{\cdot\cdot} + (\nu^2 - \Omega^2)\alpha_0 = 0, \qquad \delta_0 = 0 \tag{2.2}$$

и вообще, в силу (1.2), (1.3) и (2.1)

$$\alpha = \alpha_0 + O(s^{-1}), \qquad \delta = O(s^{-1}) \tag{2.3}$$

где символом $O(s^{-1})$ обозначена совокупность слагаемых, имеющих порядок s^{-1} и выше.

Уравнения (2.2) будем рассматривать как асимптотическое представление (при $s \to \infty$ или $\varepsilon \to 0$) решений уравнений (1.1).

Нас в основном будет интересовать поведение гирокомпаса при последовательных циркуляциях корабля. В этом случае можно полагать [3]

$$\Omega = -\mu\omega \sin \omega t \quad (\mu = v / Ru \cos\varphi, \ \omega = 2\pi/T) \tag{2.4}$$

где v — скорость корабля на циркуляции, T — период циркуляции.

В силу (2.4) первое из уравнений (2.2) можно представить в виде

$$\alpha_0^{\cdot\cdot} + k(t)\alpha_0 = 0 \tag{2.5}$$

где

$$k(t) = \nu^2(1 - m + m\cos 2\omega t) \qquad \left(m = \frac{\mu^2\omega^2}{2\nu^2}\right) \tag{2.6}$$

3°. Ряды (2.1) использовались нами формальным образом, без доказательства их сходимости. Можно предположить, что названные ряды будут сходиться, пока $\varepsilon < A$, где A — некоторая положительная постоянная. Этому условию всегда можно удовлетворить выбором достаточно большой крутизны s.

Указанное предположение при наличии переменных и, в частности, периодических, коэффициентов системы (1.5) требует, конечно, надлежащего доказательства. Между тем, можно дать простое механическое обоснование перехода к уравнениям (2.2).

Действительно, увеличивая жесткость пружинной связи между гироскопами (а следовательно, и крутизну s), мы в конечном счете лишим систему одной из степеней свободы; в данном случае — свободы движения гироскопов относительно осей их кожухов, характеризуемой координатой δ. Поэтому в предельном случае должно быть $\delta = \delta^{\cdot} \equiv 0$, что и приводит к уравнению (2.5).

Приведем другой способ получения уравнений (2.2) и (2.3), не связанный с рядами (2.1). Обращаясь ко второму из уравнений (1.2) и принимая во внимание (2.4), представим его в форме

$$\delta^{\cdot\cdot} + \lambda^2\delta = -\frac{1}{2}\mu^2\omega^2\cos 2\omega t\delta + \mu\omega^2 \operatorname{ctg}\varphi\cos\omega t\alpha + 2\mu\omega \operatorname{ctg}\varphi \sin\omega t\alpha^{\cdot} \tag{3.1}$$

Здесь

$$\lambda^2 = p^2 - \frac{1}{2}\mu^2\omega^2 \tag{3.2}$$

Предполагая, что $p^2 - {}^1/_2\mu^2\omega^2 > 0$, из (3.1) получим интегродифференциальное уравнение

$$\delta = C_1\cos(\lambda t + \psi) + \frac{1}{\lambda}\int_0^t K_1(t, \xi)\,\delta(\xi)\,d\xi + \frac{1}{\lambda}\int_0^t K_2(t, \xi)\,\alpha(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{1}{\lambda}\int_0^t K_3(t, \xi)\,\alpha^{\cdot}(\xi)\,d\xi \tag{3.3}$$

где C_1 и ψ — постоянные; кроме того,

$$\begin{aligned} K_1(t, \xi) &= -\frac{1}{2}\mu^2\omega^2 \sin\lambda(t-\xi)\cos 2\omega\xi \\ K_2(t, \xi) &= \mu\omega^2 \operatorname{ctg}\varphi \sin\lambda(t-\xi)\cos\omega\xi \\ K_3(t, \xi) &= 2\mu\omega \operatorname{ctg}\varphi \sin\lambda(t-\xi)\sin\omega\xi \end{aligned} \tag{3.4}$$

Рассмотрим некоторый интервал $(0, t^*)$ изменения t (например интервал $(0, \pi/\omega)$, что соответствует полуциркуляции корабля).

Пусть M_1, M_2, M_3 — соответственно верхние границы $|\delta(t)|$, $|\alpha(t)|$, $|\alpha^{\cdot}(t)|$ в интервале $(0, t^*)$. Тогда из (3.3) в силу (3.4) имеем

$$|\delta(t) - C_1\cos(\lambda t + \psi)| < \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{2}M_1\mu^2\omega^2 + M_2\mu\omega^2\operatorname{ctg}\varphi + 2M_3\mu\omega\operatorname{ctg}\varphi\right) \tag{3.5}$$

Из условия (3.5) следует, что для всякого t, взятого в интервале $(0, t^*)$, всегда можно найти столь большое λ (или, в силу (3.2), столь большое s), что $\delta(t)$ будет как угодно мало отличаться от $C_1\cos(\lambda t + \psi)$. Функция $C_1\cos(\lambda t + \psi)$ и будет асимптотическим представлением δ при больших значениях параметра s.

Подставляя это значение в первое из уравнений (1.2), получим для $\alpha(t)$ уравнение, однородная часть которого будет

$$\alpha^{\cdot\cdot} + (\nu^2 - \Omega^2)\alpha = 0 \tag{3.6}$$

что совпадает с (2.2).

Если задаться конкретными начальными условиями для δ, например $\delta(0) = 0$, $\delta^{\cdot}(0) = h$, то аналогично предыдущему можно получить в интервале $(0, t^*)$ оценку

$$|\delta(t)| < \frac{1}{\lambda}\left(h + \frac{1}{2}M_1\mu^2\omega^2 + M_2\mu\omega^2\operatorname{ctg}\varphi + 2M_3\mu\omega\operatorname{ctg}\varphi\right) \tag{3.7}$$

4°. Обратимся к уравнениям (2.2) и (2.5). Если $\Omega = \text{const}$, то из (2.2) следует, что при

$$\Omega > \nu \tag{4.1}$$

решения уравнения (2.2) неустойчивы.

Для изучения более интересного случая, соответствующего циркуляциям корабля, следует исходить из уравнения (2.5) и формулы (2.6).

Из (2.6) имеем $k(t) > 0$, если $m < 1/2$, что при учете (2.4) приводит к неравенству

$$v < \frac{T}{T_0} Ru\cos\varphi \qquad \left(T_0 = \frac{2\pi}{\nu} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 84.4\,\text{мин.}\right) \tag{4.2}$$

Полагая условие $m < 1/2$ выполняющимся, применим к уравнению (2.5) достаточный признак устойчивости Ляпунова, согласно которому должно быть

$$\nu^2 \frac{\pi}{\omega}\int_0^{\pi/\omega}(1 - m + m\cos 2\omega t)\,dt \leqslant 4$$

В результате получим условие

$$T \leqslant \frac{2}{\pi}\frac{T_0}{\sqrt{1-m}} \tag{4.3}$$

которое выполняется со знаком неравенства для всех практически возможных соотношений между T и T_0.

Неравенство (4.2), таким образом, следует рассматривать как достаточное условие неасимптотической устойчивости системы.

5°. Перейдем к рассмотрению условий неустойчивости. С этой целью, полагая $\omega t = \tau$, приведем уравнение (2.5) к виду

$$\frac{d^2\alpha_0}{d\tau^2} + (a - 2q\cos 2\tau)\alpha_0 = 0 \quad \left(a = \frac{\nu^2}{\omega^2}(1-m), \ \ 2q = -m\frac{\nu^2}{\omega^2}\right) \tag{5.1}$$

Полагая $\alpha_0 = \alpha_0^{(0)} + q\alpha_0^{(1)} + q^2\alpha_0^{(2)} + \ldots$, для $\alpha_0^{(0)}$ получим уравнение

$$\frac{d^2\alpha_0^{(0)}}{d\tau^2} + a\alpha_0^{(0)} = 0 \tag{5.2}$$

решения которого неустойчивы при $a < 0$, т. е. с учетом (2.4), (2.6) и (5.1) при

$$v > \frac{T}{T_0}\sqrt{2}\, Ru \cos\varphi \tag{5.3}$$

Однако неустойчивость решений уравнения (5.2), строго говоря, не влечет неустойчивости для уравнения (5.1). В связи с этим рассмотрим трансцендентное уравнение для нахождения характеристического показателя $\varkappa$ уравнения (5.1), имеющее вид [4]

$$\sin^2\frac{i\pi\varkappa}{2} = \Delta(0)\sin^2\frac{\pi\sqrt{a}}{2} \qquad (i = \sqrt{-1}) \tag{5.4}$$

Здесь $\Delta(0)$ — определитель Хилла, для вычисления которого в нашем случае удобно применить асимптотическую формулу Тиссерана [4]

$$\Delta(0) = 1 + \pi\frac{q^2 \operatorname{ctg}(^1/_2\pi\sqrt{a})}{\sqrt{a}(1-a)} + O(q^4) \tag{5.5}$$

Принимая во внимание, что практически всегда $T \ll T_0$, пользуясь формулами (2.6), (5.1), а также разложением

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \left(\frac{z}{3} + \frac{z^3}{45} + \ldots\right) \qquad (0 < |z| < \pi) \tag{5.6}$$

приведем (5.5) к виду

$$\Delta(0) \approx 1 - \frac{m^2}{2(m-1)}\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2 \tag{5.7}$$

где следует считать $m \neq 1$, так как в противном случае оказывается, что $a = 0$ и формула (5.5) неприменима. При $m \neq 1$ второе слагаемое в (5.7) для практически интересных случаев оказывается весьма малым по сравнению с единицей.

Например, при $\varphi = 70°$, $v = 24$ узла, $T = 4$ мин. имеем, что $\Delta(0) \approx 1 - 253\cdot10^{-5}$; при $\varphi = 80°$, $v = 24$ узла, $T = 4$ мин. имеем $\Delta(0) \approx 1 - 654\cdot10^{-5}$.

В этих случаях можно считать $\Delta(0) = 1$ и тогда из уравнения (5.4) получаем значения $\varkappa$ в виде

$$\varkappa_{1,2} = \pm\frac{\nu}{\omega}\sqrt{1-m}\, i \tag{5.8}$$

Отсюда следует, что при $m > 1$, т. е. при выполнении условия (5.3), имеет место неустойчивость, так как один из характеристических показателей при этом положителен.

Неравенства (4.2) и (5.3) налагают жесткие условия на параметры циркуляции.

Например, при периоде циркуляции T, равном 4 мин., неустойчивость имеем: на широте $\varphi = 70°$ при $v > 20.6$ узлов, на широте $\varphi = 80°$ — при $v > 10.5$ узлов.

6°. Вышеизложенная теория может быть распространена на изучение поведения простого маятникового однороторного гирокомпаса при маневрировании корабля [1]. Уравнения этого компаса можно получить из уравнений, приведенных в работе [2]. Имеем (см. также [3])

$$\begin{gathered}
H\alpha^{\boldsymbol{\cdot}} + \frac{Pl}{g}V\alpha^{\boldsymbol{\cdot}} - Pl\beta = \left(\frac{Pl}{g}V - H\right)\Omega \\
C\gamma^{\boldsymbol{\cdot\cdot}} + Pl\gamma - \frac{Pl}{g}V\Omega\alpha = \frac{Pl}{g}V^{\boldsymbol{\cdot}} - H^{\boldsymbol{\cdot}} \\
H\left(\beta^{\boldsymbol{\cdot}} + \frac{V}{R}\alpha\right) - \left(\frac{Pl}{g}V^{\boldsymbol{\cdot}} - H^{\boldsymbol{\cdot}}\right)\beta - \frac{Pl}{g}V\Omega\gamma = 0
\end{gathered} \tag{6.1}$$

Здесь H — собственный кинетический момент ротора гироскопа, C — момент инерции чувствительного элемента относительно линии Север — Юг.

Отметим, что последнее из уравнений системы (6.1) составлено относительно оси z° трехгранника Дарбу $x^\circ y^\circ z^\circ$, ориентированного так же, как и в работе [2].

В однороторных гирокомпасах H является обычно постоянным. Положим, кроме того, $V \approx Ru\cos\varphi + v_E$; тогда из (6.1) получим следующую систему:

$$
\begin{gathered}
H\alpha^{\cdot} + \frac{Pl}{g} v_E^{\cdot} \alpha - Pl\beta = \left[\frac{Pl}{g}\,(Ru\cos\varphi + v_E) - H\right]\Omega \\
H\left[\beta^{\cdot} + \left(u\cos\varphi + \frac{v_E}{R}\right)\alpha\right] - \frac{Pl}{g} v_E^{\cdot}\beta - \frac{Pl}{g}(Ru\cos\varphi + v_E)\,\Omega\gamma = 0 \\
C\gamma^{\cdot\cdot} + Pl\gamma - \frac{Pl}{g}\left(Ru\cos\varphi + v_E\right)\Omega\alpha = \frac{Pl}{g}\, v_E^{\cdot}
\end{gathered}
\tag{6.2}
$$

Если в системе (6.2) пренебречь влиянием восточной составляющей скорости корабля v_E по сравнению с $Ru\cos\varphi$, пренебречь в ее левых частях членами, содержащими в качестве множителей величины v_E, $v_E^{\cdot}$, Ω и положить затем в правой части первого из уравнений этой же системы $\Omega = v_N^{\cdot}/Ru\cos\varphi$, то можно прийти к известным уравнениям Геккелера — Булгакова для однороторного компаса [1]

$$
\begin{gathered}
\beta^{\cdot} + u\cos\varphi\alpha = 0, \qquad C\gamma^{\cdot\cdot} + Pl\gamma = \frac{Pl}{g} v_E^{\cdot} \\
\alpha^{\cdot} - \frac{k^2}{u\cos\varphi}\,\beta = \left(\frac{k^2}{\nu^2} - 1\right)\frac{v_N^{\cdot}}{Ru\cos\varphi} \qquad \left(\nu = \sqrt{\frac{Plu\cos\varphi}{H}}\right)
\end{gathered}
\tag{6.3}
$$

Обратимся к уравнениям (6.2) и рассмотрим равнопеременное движение корабля по меридиану.

В руавнениях (6.2) положим $\Omega = \mathrm{const}$, $v_E = v_E^{\cdot} \equiv 0$; учитывая обозначение (6.3), получим характеристическое уравнение этой системы

$$
\lambda^4 + \frac{k^2}{C}\left(C + \frac{Pl}{k^2}\right)\lambda^2 + \frac{Pl}{C}\left(\frac{k}{\nu}\right)^4\left(\frac{\nu^4}{k^2} - \Omega^2\right) = 0 \tag{6.4}
$$

Если на данной широте выполняется условие $k = \nu$, то уравнение (6.4) будет иметь вид

$$
\lambda^4 + \frac{\nu^2}{C}\left(C + \frac{Pl}{\nu^2}\right)\lambda^2 + \frac{Pl}{C}(\nu^2 - \Omega^2) = 0 \tag{6.5}
$$

Отсюда следует, что при $\Omega > \nu$ решения системы (6.2) будут неустойчивыми. Неравенство $\Omega > \nu$, как легко видеть, совпадает с ранее полученным при тех же условиях неравенством (4.1).

При изучении поведения однороторного компаса при циркуляциях корабля можно воспользоваться методом, примененным в работе [3].

Допустим, что $H = (Pl/g)\,V$. Пользуясь этим равенством и полагая $\alpha = (\alpha_1 Ru/V)\cos\varphi$, приведем систему (6.1) к виду

$$
\alpha_1^{\cdot} - \frac{\nu^2}{u\cos\varphi}\,\beta = 0,\; C\gamma^{\cdot\cdot} + Pl\gamma - \frac{Plu\cos\varphi}{\nu^2}\,\Omega\alpha_1 = 0,\; \beta^{\cdot} + u\cos\varphi\alpha_1 - \Omega\gamma = 0 \tag{6.6}
$$

В случае циркуляции корабля Ω определяется формулой (2.4).

Для построения характеристичного уравнения нужно иметь фундаментальную матрицу решений системы (6.6) при $t = T$. Положим в (2.4)

$$
\sin\omega t = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\cos 2\omega t}{3} + \ldots\right) & \left(0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{\omega}\right) \\[2ex] -\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\cos 2\omega t}{3} + \ldots\right) & \left(\dfrac{\pi}{\omega} \leqslant t \leqslant \dfrac{2\pi}{\omega}\right) \end{cases} \tag{6.7}
$$

Тогда систему (6.6) в интервале $0 \leqslant t \leqslant \pi/\omega$ можно представить в форме

$$\alpha_1^{\cdot} - \frac{\nu^2}{u \cos \varphi} \beta = 0, \qquad \beta^{\cdot} + u \cos \varphi \alpha_1 + \Omega_0 \gamma = f(t) \gamma$$

$$C\gamma^{\cdot\cdot} + Pl\gamma + \frac{Pl u \cos \varphi}{\nu^2} \Omega_0 \alpha = \frac{Pl u \cos \varphi}{\nu^2} f(t) \alpha \tag{6.8}$$

где

$$\Omega_0 = \frac{2}{\pi} \mu\omega, \qquad f(t) = \frac{4}{\pi} \mu\omega \left(\frac{\cos 2\omega t}{3} + \frac{\cos 4\omega t}{15} + \ldots \right) \tag{6.9}$$

Считая правые части системы (6.8) известными функциями и применяя к ней метод вариаций произвольных постоянных, можно, как и в работе [3], прийти к системе интегральных уравнений Вольтерра, решения которой могут быть получены методом последовательных приближений.

Характеристическое уравнение системы первого приближения будет

$$\lambda^4 + \frac{\nu^2}{C}\left(C + \frac{Pl}{\nu^2}\right)\lambda^2 + \frac{Pl}{C}(\nu^2 - \Omega_0^2) = 0 \qquad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{\omega}\right) \tag{6.10}$$

откуда следует, что при $\Omega_0 > \nu$, т. е. при

$$v > \frac{\pi}{2} \frac{T}{T_0} Ru \cos \varphi \tag{6.11}$$

уравнение (6.10) будет иметь положительный корень.

Условие (6.11), имеющее ту же структуру, что и неравенство (5.3), совпадает с неравенством (4.12) работы [3], которое было получено применительно к двухроторному гирокомпасу. Дальнейшие вычисления, связанные с аналитическим продолжением решений на промежуток $(\pi/\omega, T)$ и построением характеристичного уравнения, можно провести аналогично тому, как это сделано в работе [3].

Как и в случае двухроторного компаса характеристичное уравнение системы (6.6) будет возвратным, т. е. вида

$$\rho^4 + A_1\rho^3 + A_2\rho^2 + A_1\rho + 1 = 0 \tag{6.12}$$

следовательно, области устойчивости определяются неравенствами Ляпунова

$$-2 < A_2 < 6, \; 4(A_2 - 2) < A_1^2 < \frac{1}{4}(A_2 + 2)^2 \tag{6.13}$$

7°. В заключение отметим, что, как показано в работе [3], выполнение условия (6.11) в случае двухроторного компаса не всегда влечет за собой неустойчивость системы. Это обстоятельство, в сущности, связано с наличием у двухроторного гирокомпаса гироскопического момента

$$\Gamma = 2B \sin \varepsilon_0 \delta^{\cdot} \tag{7.1}$$

который стабилизирует гиросферу по обобщенной координате γ.

У однороторного компаса момент (7.1) отсутствует, и координата γ оказывается нестабилизированной.

Поэтому в случае однороторного компаса выполнение условия (6.11) влечет за собой, по всей видимости, общую неустойчивость системы.

Об этом свидетельствуют, в частности, данные решения системы (6.6) на электронной моделирующей машине.

Поступила 20 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГИТТЛ, М., 1955
2. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
3. Кошляков В. Н. К теории гирокомпасов. ППМ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
4. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. ИИЛ, М., 1953.