Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ АБСОЛЮТНО УПРУГОМ УДАРЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. И. Киргетов

(Москва)

В работе с общей точки зрения рассмотрен удар, происходящий в системе при наложении на нее односторонней связи.

Излагаемая в работе аналитическая теория удара строится на принципе Даламбера — Лагранжа. Она исходит из того факта, что налагающаяся на систему односторонняя связь порождает дополнительные ограничения на «возможные перемещения» системы и строится в предположении, что основное уравнение механики остается неизменно выполненным, а односторонняя связь — неизменно наложенной на систему в течение всего удара.

1. Имеется материальная система из n точек с массами m_i и координатами x_i, y_i, z_i относительно некоторой неподвижной декартовой системы координат. Точки стеснены гладкими голономными не зависящими от времени связями, уравнения которых суть

$$f_\alpha(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0 \tag{1.1}$$

«Возможные перемещения» системы определяются соотношениями

$$\sum\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0 \tag{1.2}$$

В какой-то момент движения системы на нее налагается гладкая н зависящая от времени односторонняя связь

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) \geqslant 0 \tag{1.1}$$

Тогда в системе происходит удар и одновременно некоторое сужение многообразия «возможных перемещений» системы в силу порождаемого связью (1.3) дополнительного ограничения

$$\sum\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}\ z_i\right) \geqslant 0 \tag{1.4}$$

Предположим, что в течение всего удара связь (1.3) остается неизменно наложенной на систему. Это значит, что в течение всего удара должно выполняться условие (1.4). Предположим еще, что в течение всего удара остается неизменно выполненным основное уравнение механики

Перейдем к идеализированной схеме удара. Для этого проинтегрируем основное уравнение механики в пределах длительности удара и устремим затем длительность удара к нулю. При ударе происходят значительные изменения скоростей при сравнительно незначительных изменениях положения системы, а значит и ее «возможных перемещений». Учитывая это, получим в пределе

$$\sum m_i(\Delta x_i'\delta x_i + \Delta y_i'\delta y_i + \Delta z_i'\delta z_i) \geqslant 0 \tag{1.5}$$

Примечание. Здесь и в дальнейшем штрихом обозначается дифференцирование по времени, а символом Δ — разности значений соответствующих величин после удара и непосредственно до него. Следует отметить, что постоянные и функции, остающиеся при ударе непрерывными, свободно вносятся и выносятся за знак символа Δ. Это свойство символа Δ будет широко использовано ниже.

Нетрудно видеть, что условий (1.4), (1.5) вместе с уравнениями связей системы недостаточно для решения задачи о разыскании состояния системы после удара по известному ее состоянию до удара. Для однозначного решения поставленной задачи нехватает одного условия. Уравнение (1.3) односторонней связи, именно в силу его односторонности, для этой цели использовано быть не может. Поэтому недостающее условие приходится брать «со стороны».

Примем в качестве таковото условие сохранения живой силы системы при ударе

$$\Delta T = 0 \tag{1.6}$$

Условия (1.4), (1.5) совместно с условием (1.6) образуют замкнутую систему условий абсолютно упругого удара.

2. Каким бы ни был удар (упругим или неупругим, с трением или без трения), состояние системы после него должно быть кинематически допустимым. Поэтому ни одна система условий удара не может считаться приемлемой, если только определяемое ею состояние системы после удара окажется несовместимым со связями (включая, конечно, одностороннюю). Проверим это важное условие в нашем случае. При этом проверке, очевидно, подлежит только неравенство (1.4).

Примечание. Для удобства выкладок будем пользоваться в этом пункте сквозной нумерацией переменных ($x_1, x_2, x_3, m_1 = m_2 = m_3$ — координаты и масса первой точки системы, $x_4, x_5, x_6, m_4 = m_5 = m_6$ — координаты и масса второй точки и т. д.).

Начнем с вывода явных выражений для величин изменения скоростей точек системы. Положим для этого в условии (1.4) знак равенства, тогда и в условии (1.5), как нетрудно видеть, следует поставить знак равенства (ниже будет показано, что если в условии (1.4) будет взято неравенство, то условие (1.5) выполнится автоматически). Будем иметь

$$\sum m_i \Delta x_i' \delta x_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \delta x_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \tag{2.1}$$

Умножив второе и последующие равенства на неопределенные множители μ и λ_α, сложим их с первым, после чего, используя классический прием рассуждений, выводим

$$m_i \Delta x_i' + \sum \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \lambda_\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mu = 0 \tag{2.2}$$

Воспользовавшись уравнениями (1.1) двусторонних связей системы, выразим множители λ_α через μ. Из (1.1) находим

$$\sum \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \Delta x_i' = 0$$

Подставим сюда вместо $\Delta x_i'$ их выражения из (2.2) и воспользуемся обозначениями

$$a_{\alpha\beta} = \sum \frac{1}{m_i} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i}, \qquad a_\alpha = \sum \frac{1}{m_i} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

Получим

$$\sum a_{\alpha\beta}\lambda_\beta + \mu a_\alpha = 0, \quad \text{или} \quad \lambda_\beta = -\mu \sum \frac{A_{\beta\alpha}}{A} a_\alpha \tag{2.3}$$

Здесь через $A_{\beta\alpha}$ обозначено алгебраическое дополнение элемента $a_{\alpha\beta}$ в определителе $|a_{\alpha\beta}| = A$. Докажем, что этот определитель отличен от нуля и, следовательно, последнее преобразование законно.

В самом деле, пусть

$$\sum a_{\alpha\beta} c_\alpha = 0$$

где не все c_α равны нулю. Тогда

$$\sum c_\alpha a_{\alpha\beta} = \sum c_\alpha \frac{1}{m_i} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i} \sum \frac{c_\alpha}{m_i} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = 0$$

Эти равенства можно представить в следующем виде.

$$\sum \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i} u_i = 0, \qquad u_i = \sum \frac{c_\alpha}{m_i} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}$$

Отсюда

$$\sum m_i u_i^2 = \sum c_\alpha \sum \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} u_i = 0$$

т. е. $u_i = 0$. Таким образом

$$\sum c_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = 0$$

причем не все c_α равны нулю. Но это невозможно, так как уравнения (1.1) связей системы предполагаются независимыми. Что и требовалось.

Теперь множители λ_α могут быть исключены из равенств (2.2). Подставив в (2.2) вместо λ_α их выражения из (2.3), получим

$$\Delta x_i' = \mu R_i, \qquad R_i = \frac{1}{m_i}\left(\sum \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} A_{\alpha\beta} a_\beta \frac{1}{A} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) \tag{2.4}$$

Равенства (2.4) дают явные выражения для $\Delta x_i'$ через неопределенный множитель μ. Чтобы найти μ, воспользуемся условием (1.6) сохранения при ударе живой силы системы. Если через x_{i0}' и x_i' обозначить соответственно значения i-й компоненты скорости системы непосредственно до и после удара, то условие (1.6) может быть записано

$$\sum m_i (x_i' + x_{i0}') \Delta x_i' = 0$$

Исключив отсюда с помощью равенств (2.4) величины $\Delta x_i'$ и учтя, что при ударе $\mu \neq 0$, получим

$$\sum m_i (x_i' + x_{i0}') R_i = 0 \tag{2.5}$$

Последнее равенство, в свою очередь, может быть переписано в виде

$$\sum m_i (\Delta x_i' + 2x_{i0}') R_i = 0$$

Подставив сюда выражения для $\Delta x_i'$ из (2.4), получим

$$\mu \sum m_i R_i^2 + 2 \sum m_i R_i x_{i0}' = 0$$

Так как

$$\sum \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} x_{i0}' = 0 \tag{2.6}$$

то имеем

$$\sum m_i R_i x_{i0}' = \sum x_{i0}'\left(\sum \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\frac{A_{\alpha\beta}}{A}a_\beta - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = -\sum \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}x_{i0}'$$

Следовательно

$$\mu\sum m_i R_i^2 = 2\sum \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}x_{i0}', \qquad \text{или} \qquad \mu = 2\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}x_{i0}' \Big/ \sum m_i R_i^2$$

Теперь уже нетрудно установить, что состояние системы после удара является кинематически допустимым.

В самом деле, если в равенстве (2.5) раскрыть выражения для R_i и воспользоваться равенствами (2.6), а также аналогичными равенствами для скоростей системы после удара, то получим

$$\sum \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}x_i' = -\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}x_{i0}'$$

Отсюда, если учесть, что до удара выполняется неравенство

$$\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}x_{i0}' < 0$$

(именно в силу этого обстоятельства и происходит удар), следует

$$\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}x_i' > 0$$

что и требовалось.

В заключение покажем, что если в условии (1.4) будет взято неравенство, то условие (1.5) выполнится автоматически. Действительно,

$$\sum m_i\Delta x_i'\delta x_i = \sum m_i\mu R_i\delta x_i = \mu\sum\delta x_i\left(\sum\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\frac{A_{\alpha\beta}}{A}a_\beta - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) =$$

$$= -\mu\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\delta x_i = -2\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}x_{i0}'\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\delta x_i \Big/ \sum m_i R_i^2 \geqslant 0$$

так как произведение, стоящее в числителе дроби, всегда отрицательно Таким образом, наличие неравенств в условиях (1.4) и (1.5) не является существенным моментом для излагаемой теории.

3. Рассмотрим теперь некоторые общие свойства удара, происходящего при наложении на систему односторонней связи.

Может случиться, что среди «возможных перемещений» системы в момент удара окажется двустороннее поступательное перемещение системы как твердого тела вдоль некоторого направления λ. Подставляя в таком случае в условие (1.5) значения

$$\delta x_i = \alpha l, \qquad \delta y_i = \beta l, \qquad \delta z_i = \gamma l$$

где α, β, γ — косинусы углов, образуемых направлением λ с осями координат, а l — произвольное положительное или отрицательное число, получим (в силу произвольности знака числа l)

$$\sum m_i(\alpha\Delta x_i' + \beta\Delta y_i' + \gamma\Delta z_i') = 0$$

Отсюда легко выводим

$$\Delta(\alpha v_x + \beta v_y + \gamma v_z) = 0$$

где v_x, v_y, v_z — компоненты скорости центра тяжести системы.

Таким образом, если связи системы в момент удара допускают элементарное двустороннее поступательное перемещение системы как твердого тела в каком-либо направлении, то удар системы не отражается на величине скорости ее центра тяжести в этом направлении.

Допустим теперь, что в момент удара среди «возможных перемещений» системы имеется двустороннее вращение системы как твердого тела вокруг какой-либо оси λ.

В условии (1.5) в этом случае возможно положить

$$\delta x_i = (\beta\zeta_i - \gamma\eta_i)\,\delta\varphi, \quad \delta y_i = (\gamma\xi_i - \alpha\zeta_i)\,\delta\varphi, \quad \delta z_i = (\alpha\eta_i - \beta\xi_i)\,\delta\varphi$$

где $\delta\varphi$ — элементарный положительный или отрицательный поворот системы вокруг оси λ; α, β, γ — угловые коэффициенты этой оси; ξ_i, η_i, ζ_i — координаты i-й точки системы в системе координат с началом на λ и осями, параллельными осям основной декартовой системы координат.

Полученное из (1.5) равенство

$$\sum m_i\,[\Delta x_i'\,(\beta\zeta_i - \gamma\eta_i) + \Delta y_i'\,(\gamma\xi_i - \alpha\zeta_i) + \Delta z_i'\,(\alpha\eta_i - \beta\xi_i)] = 0$$

легко преобразуется к виду

$$\Delta\,(\alpha K_\xi + \beta K_\eta + \gamma K_\zeta) = 0 \qquad (3.1)$$

где K_ξ, K_η, K_ζ суть моменты количества движения системы относительно осей ξ, η, ζ.

Равенство (3.1) означает, что момент количества движения системы относительно оси λ не изменяется.

Таким образом, если связи системы в момент удара допускают элементарный двусторонний поворот системы как твердого тела вокруг некоторой оси, то удар системы не отражается на величине момента количества движения системы относительно этой оси.

Установленные выше теоремы относятся к полной системе. Однако они остаются справедливыми для любой части системы, для которой выполняются требования этих теорем в предположении, что компоненты «возможных перемещений», относящиеся к оставшейся части системы, все положены равными нулю.

Пусть, например, имеются две материальные точки, из которых одна ударяется о неподвижную плоскость. Ударяющаяся точка может быть перемещена вдоль плоскости при нулевом «возможном перемещении» другой точки. Значит к ней применима частная теорема о движении центра тяжести, из которой сразу видно, что касательная составляющая скорости ударяющейся точки при ударе не меняется.

4. Запишем условия абсолютно упругого удара в лагранжевых координатах.

Пусть лагранжевы координаты системы будут $q_1, \ldots, q_m$. Тогда

$$x_i = x_i(q_1, \ldots, q_m), \quad y_i = y_i(q_1, \ldots, q_m), \quad z_i = z_i(q_1, \ldots, q_m) \qquad (4.1)$$

$$\delta x_i = \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\,\delta q_\alpha, \quad \delta y_i = \sum \frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha}\,\delta q_\alpha, \quad \delta z_i = \sum \frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha}\,\delta q_\alpha \qquad (4.2)$$

При помощи выражений (4,2) исключим из левой части условия (1.5) количества δx_i, δy_i, δz_i и преобразуем ее

$$\sum m_i (\Delta x_i' \delta x_i + \Delta y_i' \delta y_i + \Delta z_i' \delta z_i) = \sum m_i \Big(\Delta x_i' \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \cdots \Big) =$$

$$= \sum \delta q_\alpha \sum m_i \Big(\Delta x_i' \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} + \cdots \Big) = \sum \delta q_\alpha \Delta \sum m_i \Big(x_i' \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} + \cdots \Big) =$$

$$= \sum \delta q_\alpha \Delta \sum m_i \Big(x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_\alpha'} + \cdots \Big) = \sum \Delta \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} \delta q_\alpha$$

Таким образом, в лагранжевых координатах системы условие (1.5) записывается

$$\sum \Delta \left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}\right) \delta q_\alpha \geqslant 0 \tag{4.3}$$

Условие (1.4) дает, очевидно,

$$\sum \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \geqslant 0 \tag{4.4}$$

где

$$\Phi(q_1, \ldots, q_m) = \varphi(x_1(q_1, \ldots, q_m), \ldots, z_n(q_1, \ldots, q_m))$$

Условие (1.6)

$$\Delta T = 0 \tag{4.5}$$

остается без изменения.

Условия (4.3), (4.4), (4.5) абсолютно упругого удара, происходящего при наложении на систему односторонней связи, установлены нами в предположении, что рассматриваемая материальная система состоит из конечного числа материальных точек. Эти условия, однако, остаются в силе (аксиоматическое предположение) для произвольной материальной системы с конечным числом степеней свободы, лишь бы ее связи были гладкими.

Ниже это обобщение будет приложено к случаю соударения двух твердых тел и будет показано, что оно (обобщение) вполне согласуется с классической теорией этого вопроса.

5. Условия (4.3), (4.4), (4.5) обладают интересной геометрической интерпретацией.

Как известно [1], движение голономной системы со связями, не зависящими от времени, может быть геометрически представлено как движение точки в m-мерном римановом пространстве конфигураций (m — число степеней свободы системы), метрика которого определяется условием

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2T$$

где T — живая сила системы. Пусть

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{\alpha\beta} q_\alpha' q_\beta'$$

Тогда метрика пространства конфигураций должна быть

$$ds^2 = \sum a_{\alpha\beta} dq_\alpha dq_\beta \tag{5.1}$$

Если в некоторой точке пространства конфигураций взяты два контравариантных вектора $l_1, \ldots, l_m$ и $l_1^*, \ldots, l_m^*$, то длины их l и l^*, как это делается в римановой геометрии [2], определяются равенствами

$$l = \sum a_{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta, \qquad l^* = \sum a_{\alpha\beta} l_\alpha{}^* l_\beta{}^* \tag{5.2}$$

а угол между ними θ находится из равенства

$$ll^* \cos\theta = \sum a_{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta{}^* \tag{5.3}$$

Векторы считаются ортогональными, если $\cos\theta = 0$, т. е.

$$\sum a_{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta{}^* = 0 \tag{5.4}$$

Скорость изображающей точки и «возможные перемещения» системы являются контравариантными векторами. Тогда из определений (5.2) и (5.3) видно, что условие (4.5) сохранения живой силы системы означает сохранение при ударе величины скорости, изображающей точки, а условие

$$\sum \Delta \left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha{}'} \right) \delta q_\alpha = 0$$

которое также может быть записано в виде

$$\sum a_{\alpha\beta} q_\beta{}' \delta q_\alpha = \sum a_{\alpha\beta} q_{\beta_0}{}' \delta q_\alpha \tag{5.5}$$

с учетом условия (4.5) означает равенство углов, образуемых направлением произвольного «возможного перемещения», касательного к границе области возможных движений системы, и скоростью изображающей точки до удара и непосредственно после него.

Примечание. Область D возможных движений системы задается уравнением односторонней связи

$$\Phi(q_1 \ldots, q_m) \geqslant 0$$

Возьмем в точке, в которой система выходит на границу области D, единичный контравариантный вектор $l_1, \ldots, l_m$, ортогональный ко всем «возможным перемещениям» системы, касательным к границе области D в этой точке. В соответствии с определением (5.4) его компоненты должны удовлетворять условию

$$\sum a_{\alpha\beta} l_\beta \delta q_\alpha = 0 \tag{5.6}$$

для всевозможных $\delta q_1, \ldots, \delta q_m$, удовлетворяющих равенству

$$\sum \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = 0 \tag{5.7}$$

Условие (5.6) служит для определения l_β, но если предположить, что вектор l известен, то это условие вполне может заменить условие (5.7). Учитывая это обстоятельство, а также то, что определитель $|a_{\alpha\beta}|$ отличен от нуля, находим из (5.5) и (5.6)

$$\Delta q_\beta{}' - \lambda l_\beta = 0 \tag{5.8}$$

где λ — неопределенный множитель.

Таким образом, вектор приращения скорости изображающей точки коллинеарен нормали к границе области D в точке удара. А это в первую очередь означает, что отражение изображающей точки от границы происходит в плоскости, проходящей через нормаль и скорость изображающей точки непосредственно перед ударом.

С другой стороны, подставив выражение (5.8) в условие

$$\Delta \sum a_{\alpha\beta} q_\alpha{}' q_\beta{}' = \sum a_{\alpha\beta} q_\beta{}' \Delta q_\alpha{}' + \sum a_{\alpha\beta} q_{\alpha_0}{}' \Delta q_\beta{}' = 0$$

сохранения живой силы системы и сократив затем полученное равенство на отличный от нуля множитель, получим

$$\sum a_{\alpha\beta} l_\alpha q_\beta' = -\sum a_{\alpha\beta} l_\alpha q_{\beta_0}'$$

равенство, означающее равенство углов падения и отражения изображающей точки при ее отражении от границы области D.

Таким образом, если движение материальной системы выводит ее на границу области возможных движений, то в результате происходящего при этом удара система отражается от границы по закону «угол падения равен углу отражения».

Особенно наглядно это в случае, когда выражение для живой силы системы приводится к виду

$$T = \frac{1}{2}\sum q_i'^2 \tag{5.9}$$

так как пространство конфигураций в этом случае эвклидово и углы имеют обычный смысл.

6. Приложим изложенную теорию к решению некоторых задач.

a) Две материальные точки насажены на прямую и связаны нерастяжимой нитью. Когда точки удаляются одна от другой на расстояние, равное длине нити, происходит удар. Однако при этом, как следует из теорем о центре тяжести и о моменте количества движения системы, не происходит никаких изменений ни в движении центра тяжести системы, ни в угловой скорости прямой.

b) Две материальные точки равной массы насажены на гладкую неподвижную ось. Допустим, что одна из этих точек покоится, а другая ударяет по ней с некоторой скоростью. Спрашивается, каково будет состояние системы непосредственно после удара, если удар является абсолютно упругим?

Задача допускает чисто геометрическое решение. В самом деле, живая сила системы

$$T = \frac{1}{2} m (x_1'^2 + x_2'^2)$$

где x_1 и x_2 — координаты точек после введения лагранжевых координат q_1 и q_2 в соответствии с формулами

$$q_1 = \sqrt{m}x_1, \qquad q_2 = \sqrt{m}x_2$$

принимает вид (5.9). Это значит, что пространство переменных q_1 и q_2 является эвклидовым. Оно реализуется, если q_1 и q_2 откладывать по осям декартовой системы координат (допустим, по оси абсцисс откладывается q_1).

При заданном положении одной из точек вторая может занимать на оси любое положение по одну сторону от первой. Предположим для определенности $x_1 \leqslant x_2$. В соответствии с этим в пространстве переменных q_1 и q_2 границей области возможных движений является прямая $q_1 = q_2$, а сама область возможных движений есть полуплоскость, расположенная левее и выше этой прямой.

Допустим, что в момент удара покоится вторая точка системы. Тогда непосредственно перед ударом скорость изображающей точки в пространстве q_1, q_2 направлена по оси абсцисс. Отражение изображающей точки от границы происходит по закону «угол падения равен углу отражения». Но так как пространство q_1, q_2 является эвклидовым, то углы в нем имеют обычный смысл. Значит, непосредственно за ударом изображающая точка будет иметь скорость, направленную по оси ординат.

Таким образом, если движущаяся точка сталкивается с равной ей по массе неподвижной точкой, то последняя получает скорость первой, первая же останавливается. Этот результат хорошо известен из теории центрального удара шаров.

c) Рассмотрим еще соударение двух твердых плоских тел, лежащих и движущихся в одной и той же плоскости.

Будем считать, что соударение тел происходит в одной точке и что в окрестности точки соприкосновения по крайней мере одно из тел имеет гладкий контур.

Систему координат выберем так, чтобы в момент удара ее начало совпадало с точкой соприкосновения тел, а ось x была направлена по общей касательной контуров соударяющихся тел, если оба контура гладкие, или по касательной к гладкому контуру, если такой контур один. Обозначим через x_1, y_1, ω_1 и соответственно через x_2, y_2, ω_2 координаты центров тяжести и угловые скорости тел. Пусть m_1 и m_2 будут массы, а c_1 и c_2— моменты инерции тел относительно их центров тяжести.

Среди «возможных перемещений» системы имеются элементарные двусторонние поступательные перемещения каждого тела в отдельности вдоль оси x и совместное поступательное перемещение обоих тел в направлении оси y. Теоремы о движении центра тяжести (частная — вдоль оси x и общая — вдоль оси y) дают

$$\Delta x_1' = 0, \qquad \Delta x_2' = 0, \qquad \Delta (m_1 y_1' + m_2 y_2') = 0 \tag{6.1}$$

С другой стороны, среди «возможных перемещений» системы в тех же условиях имеются элементарные двусторонние повороты каждого тела в отдельности вокруг достаточно удаленных от начала координат точек оси y. Возьмем для каждого тела по одной такой точке (обозначим их O_1 и O_2). Тогда, в силу частной теоремы о моменте количества движения

$$\Delta K_1 = 0, \qquad \Delta K_2 = 0 \tag{6.2}$$

где K_1 и K_2 — соответственно моменты количества движения первого тела относительно точки O_1 и второго тела относительно точки O_2. Но

$$K_1 = c_1\omega_1 + m_1[x_1 y_1' - x_1'(y_1 - a_1)], \qquad K_2 = c_2\omega_2 + m_2[x_2 y_2' - x_2'(y_2 - a_2)]$$

где a_1 и a_2 — ординаты точек O_1 и O_2 (их абсциссы равны нулю). Подставив эти выражения в равенства (6.2) и учтя первые два равенства (6.1), получим

$$c_1\Delta\omega_1 + m_1 x_1 \Delta y_1' = 0, \qquad c_2\Delta\omega_2 + m_2 x_2 \Delta y_2' = 0 \tag{6.3}$$

Равенства (6.3) совместно с (6.1) и условие (4.5) сохранения живой силы системы при ударе дают полную систему уравнений, описывающих соударение твердых тел в рассматриваемых условиях.

Исследование этих уравнений выходит за рамки статьи. Выведем все же следующее предложение, лежащее в основе классической теории соударения твердых тел [3]: нормальная составляющая относительной скорости точек соприкосновения твердых тел при ударе меняет свой знак, оставаясь по величине неизменной.

Припишем значениям кинематических характеристик системы непосредственно перед ударом индекс «нуль», сохранив для их значений после удара обычные обозначения. Тогда условие сохранения живой силы системы может быть записано

$$c_1\Delta\omega_1(\omega_1 + \omega_{10}) + c_2\Delta\omega_2(\omega_2 + \omega_{20}) + m_1\Delta y_1'^2 + m_2\Delta y_2'^2 = 0 \tag{6.4}$$

Используя равенства (6.3), перепишем (6.4) в виде

$$-m_1 x_1 \Delta y_1'(\omega_1 + \omega_{10}) + m_1\Delta y_1'^2 - m_2 x_2 \Delta y_2'(\omega_2 + \omega_{20}) + m_2\Delta y_2'^2 = 0$$

откуда

$$m_1\Delta y_1'[y_1' + y_{10}' - x_1(\omega_1 + \omega_{10})] + m_2\Delta y_2'[y_2' + y_{20}' - x_2(\omega_2 + \omega_{20})] = 0$$

Отсюда и из равенств (6.1) следует

$$y_1' + y_{10}' - x_1(\omega_1 + \omega_{10}) - y_2' - y_{10}' + x_2(\omega_2 + \omega_{20}) = 0$$

или

$$(y_1' - x_1\omega_1) - (y_2' - x_2\omega_2) = -[(y_{10}' - x_1\omega_{10}) - (y_{20}' - x_2\omega_{20})]$$

что и требовалось.

Поступила 8 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Синдж Дж. Л. Тензорные методы в динамике. ИЛ, 1947.
2. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. ИИЛ, 1948.
3. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. ИИЛ, 1951, т. 2, ч. 2,