Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ПРИНЦИПЕ ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

И. Л. Хмелевский

(Москва)

Для неголономных систем предложено две трактовки принципа Гамильтона: классическая, в рамках вариационного исчисления (Герц [1], Кернер [2]), и формальная, данная Гёльдером [3]. Механическое толкование известно только для первой трактовки, одной которой мы и будем заниматься.

Уже Герц дал пример неголономной системы (катящийся без скольжения шар), к которой не применим принцип Гамильтона. В 1931 г. Кернер, рассматривая для систем с дифференциальными связями принцип Гамильтона как условный вариационный принцип, доказал, что необходимым и достаточным условием совпадения вариационных уравнений Эйлера и обычных уравнений движения является голономность системы. Ниже исследуется возможность получения уравнений движения системы с дифференциальными связями из условного вариационного принципа

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} F dt = 0$$

где F — некоторая функция времени, координат и скоростей точек системы.

1. Рассмотрим некоторую материальную систему. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ — ее лагранжевы координаты, стесненные лишь дифференциальными связями

$$\omega_\beta = q_\beta' + \sum_{\tau=1}^{n-m} a_{\beta, m+\tau}\, q_{m+\tau}' = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, m) \tag{1.1}$$

с непрерывно дифференцируемыми в некоторой области A коэффициентами.

Для простоты предположим связи склерономными. Иногда ради удобства уравнения связей (1.1) будем записывать в виде

$$\omega_\beta = \sum_{s=1}^{n} a_{\beta s} q_s' = 0, \qquad a_{\beta s} = \begin{cases} 1 & \text{при } s = \beta \\ 0 & \text{при } m > s \neq \beta \\ a_{\beta, m+\tau} & \text{при } s > m \end{cases} \tag{1.2}$$

Движение

$$q_s = \varphi_s(t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

материальной системы называется кинематически допустимым, если функции $\varphi_s(t)$ тождественно удовлетворяют уравнениям связей.

Обобщая принцип Гамильтона, заменим функцию Лагранжа L под интегралом произвольной дифференцируемой функцией F времени t, координат и скоростей точек системы. Таким образом, приходим к условному вариационному принципу

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} F dt = 0 \tag{1.4}$$

при варьировании по кинематически допустимым движениям; при этом, как обычно

$$\delta q_s(t_1) = \delta q_s(t_2) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Уравнения Эйлера для вариационного принципа (1.4) при уравнениях связей в виде (1.2), если λ_β — множители Лагранжа, суть

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q_s'} - \frac{\partial F}{\partial q_s} + \sum_{\beta=1}^{m} \lambda_\beta' a_{\beta s} + \sum_{\beta=1}^{m} \lambda_\beta\left(a_{\beta s}' - \frac{\partial \omega_\beta}{\partial q_s}\right) = 0 \qquad (1.5)$$

или, выделяя члены с ускорениями,

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial q_s'\, \partial q_r'} q_r'' + \sum_{\beta=1}^{m} \lambda_\beta' a_{\beta s} + \sum_{\beta=1}^{m} \lambda_\beta\left(a_{\beta s}' - \frac{\partial \omega_\beta}{\partial q_s}\right) + \ldots = 0 \qquad (1.6)$$

Уравнения связей (1.1) дают

$$q_\beta'' + \sum_{\tau=1}^{n-m} a_{\beta,\, m+\tau}\, q_{m+\tau}'' + \ldots = 0 \qquad (1.7)$$

В уравнениях (1.6) и (1.7) многоточием обозначены члены, не содержащие q'', λ', λ. Предположим, что имеет место «нормальный» случай данной вариационной задачи, когда определитель Δ, равный (1.8)

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 F}{\partial q_1'^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial q_1'\,\partial q_m'} & \frac{\partial^2 F}{\partial q_1'\,\partial q_{m+1}'} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial q_1'\,\partial q_n'} & 1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial^2 F}{\partial q_m'\,\partial q_1'} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial q_m'\,\partial q_n'} & 0 & \cdots & 1 \\
\frac{\partial^2 F}{\partial q_{m+1}'\,\partial q_1'} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial q_{m+1}'\,\partial q_n'} & a_{1,\,m+1} & \cdots & a_{m,\,m+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial^2 F}{\partial q_n'\,\partial q_1'} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial q_n'\,\partial q_m'} & \frac{\partial^2 F}{\partial q_n'\,\partial q_{m+1}'} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial q_n'^2} & a_{1n} & \cdots & a_{mn} \\
1 & \cdots & 0 & a_{1,\,m+1} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 1 & a_{m,\,m+1} & \cdots & a_{mn} & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix} \neq 0$$

Тогда уравнения (1.6), (1.7) можно разрешить относительно q_r'' и λ_β'

$$q_r'' = Q_r(t, q, q', \lambda), \qquad \lambda_\beta' = \Lambda_\beta(t, q, q', \lambda) \qquad (1.9)$$

2. В классической механике ускоряющих сил всегда имеет место следующий принцип 1. Ускорение точек системы в каждый момент времени может быть однозначно определено, если в этот момент известны действующие силы, связи и величины всех координат и скоростей точек.

В. И. Киргетов предложил воспользоваться этим принципом для суждения о применимости вариационного принципа (1.4).

Рассмотрим уравнения (1.9). Предположим, что для кинематически допустимых движений в функции Q_r входят параметры λ, для нахождения которых нет иных уравнений, кроме дифференциальных. Параметры λ_β возможно определить лишь интегрированием системы уравнений (1.9). Другими словами, для того чтобы узнать в какой-то момент зависимость ускорения от одновременных координат и скоростей, необходимо знать во все время движения зависимость ускорения от координат, скоростей и параметров λ_β. Это противоречит механическому принципу 1, хотя и не вызывает упреков при решении математических задач.

Для выполнения принципа 1 необходимо (и, конечно, достаточно), чтобы для кинематически допустимых движений в функции Q_r не входили параметры λ_β, т. е. чтобы все производные $\partial Q_r / \partial\lambda_\beta$ уничтожались в силу уравнений связей тождественно по t, q, q'

$$\partial Q_r / \partial\lambda_\beta = 0 \qquad (r = 1, \ldots, n;\ \beta = 1, \ldots, m) \tag{2.1}$$

Теорема. Для неголономных систем уравнения Эйлера условной вариационной задачи (1.4) с закрепленными концами при связях (1.1)

$$\omega_\beta = 0$$

ни при какой функции F, вообще говоря, не совместны с принципом 1.

Словами «вообще говоря» оговаривается особый случай вариационной задачи $\Delta = 0$.

Доказательство. Выясним вид зависимости Q_r от λ_β. Очевидно, что

$$Q_r = \frac{\Delta_r}{\Delta}$$

где Δ_r представляет собой определитель Δ, в котором r-столбец заменен свободными членами уравнений (1.6), (1.7). Определитель Δ не зависит от λ_β, поэтому (2.1) выполняется тождественно по t, q, q' в силу уравнений связей. Производя дифференцирование, получим равные нулю определители $\partial\Delta_r / \partial\lambda_\beta = \Delta_{r\beta}$, представляющие собой определитель Δ, в котором r-столбец заменен столбцом, элементы которого сверху вниз последовательно будут

$$a_{\beta 1}' - \frac{\partial\omega}{\partial q_1}, \ldots, a_{\beta n}' - \frac{\partial\omega_\beta}{\partial q_n}, \qquad 0, \ldots, 0$$

Лемма. Пусть в произвольном, не равном нулю определителе D порядка $n+m$

$$D = \begin{vmatrix} f_{11} & \ldots f_{1n} & f_{1,\, n+1} & \ldots f_{1,\, n+m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n+m,\, 1} & \ldots f_{n+m,\, n} & f_{n+m,\, n+1} & \ldots f_{n+m,\, n+m} \end{vmatrix}$$

первые n столбцов последовательно заменяются одним и тем же столбцом

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \cdots \\ d_{n+m} \end{pmatrix}$$

и пусть уничтожаются все получающиеся при этом определители D_r $(r = 1, \ldots, n)$. Тогда столбец d равен линейной комбинации последних m столбцов определителя D, т. е.

$$d_j = \sum_{\rho=1}^{m} c_{n+\rho} f_{j,\, n+\rho} \qquad (j = 1, \ldots, n+m)$$

В самом деле, так как $D \neq 0$, а $D_r = 0$, то столбец d, стоящий на r-ом месте, равен линейной комбинации всех остальных столбцов определителя D_r

$$d_j = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^{n} b_s^{(r)} f_{js} + \sum_{\rho=1}^{m} c_{n+\rho}^{(r)} f_{j,\, n+\rho} \qquad (j = 1, \ldots, n+m)$$

Аналогично, для $l \leqslant n$

$$d_j = \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq l}}^{n} b_t^{(l)} f_{jt} + \sum_{\rho=1}^{m} c_{n+\rho}^{(l)} f_{j,\, n+\rho}$$

Отсюда

$$\sum_{\substack{k=1\\ k\neq r,\, k\neq l}}^{n} f_{jk}\,(b_k^{(r)} - b_k^{(l)}) + \sum_{\rho=1}^{m} f_{j,\,n+\rho}\,(c_{n+\rho}^{(r)} - c_{n+\rho}^{(l)}) + b_l^{(r)} f_{jl} - b_r^{(l)} f_{jr} = 0$$

Так как $D \neq 0$, то эти равенства дают

$$b_k^{(r)} = b_k^{(l)}, \qquad b_l^{(r)} = b_r^{(l)} = 0, \qquad c_{n+\rho}^{(r)} = c_{n+\rho}^{(l)} = c_{n+\rho}$$

Это справедливо для любых $l, r = 1, \ldots, n$. Лемма доказана.

Согласно лемме, для определителя Δ имеем

$$a'_{\beta s} - \frac{\partial \omega_\beta}{\partial q_s} = \sum_{\rho=1}^{m} c_{n+\rho}\, a_{\rho s} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

Отсюда (1.2) дает

$$a'_{\beta,\, m+\sigma} - \frac{\partial \omega_\beta}{\partial q_{m+\sigma}} = \sum_{\rho=1}^{m} a_{\rho,\, m+\sigma}\left(a'_{\beta\rho} - \frac{\partial \omega_\beta}{\partial q_\rho}\right) \qquad \begin{pmatrix}\beta = 1, \ldots, m\\ \sigma = 1, \ldots, n-m\end{pmatrix}$$

Раскрывая эти тождества и учитывая (1.1) и (1.2), получаем

$$\sum_{\sigma=1}^{n-m}\left[\frac{\partial a_{\beta,\, m+\sigma}}{\partial q_{m+\tau}} - \frac{\partial a_{\beta,\, m+\tau}}{\partial q_{m+\sigma}} + \sum_{\rho=1}^{m}\left(a_{\rho,\, m+\sigma}\frac{\partial a_{\beta,\, m+\tau}}{\partial q_\rho} - a_{\rho,\, m+\tau}\frac{\partial a_{\beta,\, m+\sigma}}{\partial q_\rho}\right)\right] q'_{m+\sigma} = 0$$

Последние тождества должны иметь место при произвольных $q'_{m+\sigma}$ в произвольной точке области A. Поэтому тождества

$$\frac{\partial a_{\beta,\, m+\sigma}}{\partial q_{m+\tau}} - \frac{\partial a_{\beta,\, m+\tau}}{\partial q_{m+\sigma}} + \sum_{\rho=1}^{m}\left(a_{\rho,\, m+\sigma}\frac{\partial a_{\beta,\, m+\tau}}{\partial q_\rho} - a_{\rho,\, m+\tau}\frac{\partial a_{\beta,\, m+\sigma}}{\partial q_\rho}\right) = 0 \tag{2.3}$$

$$(\beta = 1, \ldots, m;\ \sigma, \tau = 1, \ldots, n-m)$$

должны выполняться во всей области A.

Эти уравнения являются необходимыми и достаточными условиями интегрируемости уравнений связей (1.1), что доказывает теорему.

3. Основному уравнению (2.1) можно дать другое доказательство. Для этого вместо принципа 1 воспользуемся равносильным ему принципом 2: движение точек системы при заданных силах и связях однозначно определяется начальными значениями времени, всех их координат и скоростей. Согласно этому принципу уравнения (1.9) определяют семейство вижений, зависящее от $2n + m + 1$ параметров t_0, q_{s0}, q'_{s0}, $\lambda_{\beta 0}$

$$q_r = \varphi_r(t;\ t_0, q_{s0}, q'_{s0}, \lambda_{\beta 0})$$

связанных уравнениями (1.1)

$$_\beta = q'_{\beta 0} + \sum_{\tau=1}^{n-m} a_{\beta,\, m+\tau}(q_{s0})\, q'_{m+\tau,\, 0} = 0$$

Фиксированным значениям t_0, q_{s0}, q'_{s0} соответствует m-параметрическое семейство движений с параметрами $\lambda_{\beta 0}$. Поэтому очевидно, что необходимым и достаточным условием выполнения принципа 2 является отсутствие в функциях φ_r величин $\lambda_{\beta 0}$, что возможно лишь при (2.1).

Поступила 15 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Hertz H. Die Prinzipien der Mechanik. Leipzig, 1894.
2. Kerner M. Le principe de Hamilton et l'holonomisme. Prace mat.-fiz., 1931, т. 38.
3. Hölder O. Ueber die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis. Nachrichten von der Kön. Ges. der Wissenschaften zu Gottingen. 1896, vol. 2.