

## О ДВИЖЕНИИ АСТАТИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

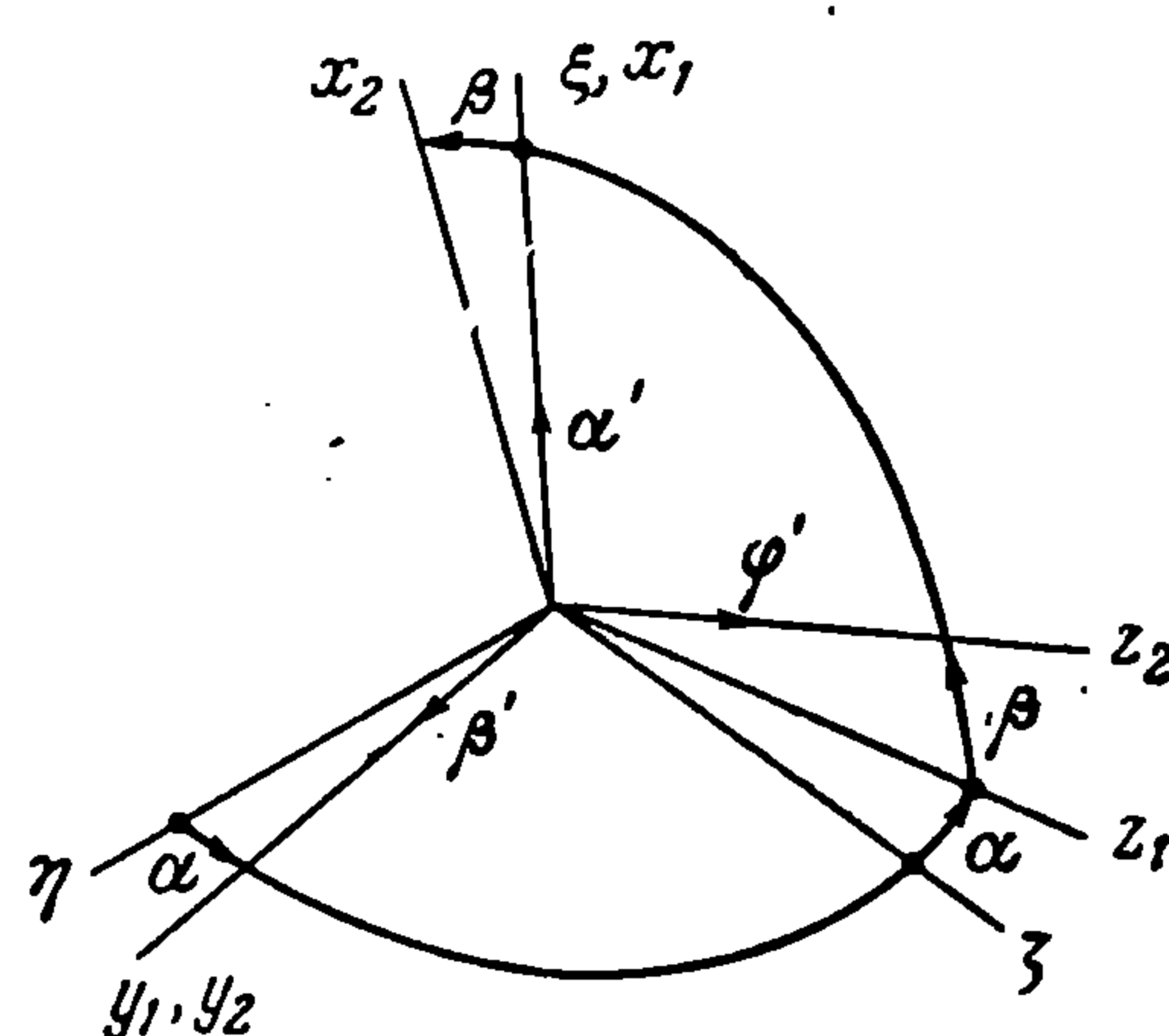
Д. М. Климов (Москва)

Е. Л. Николаи [1,2] поставил и решил задачу о движении уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе с учетом влияния постоянных по величине моментов трения на осях подвеса. Ниже изучается движение астатического гироскопа в кардановом подвесе на неподвижном основании. Предполагается, что на осях подвеса имеются силы трения, величины которых пропорциональны нормальным составляющим динамических реакций. Некоторые результаты опубликованы [3].

1. Вывод уравнений движения гироскопа. Свяжем с неподвижным пространством систему координат  $\xi\eta\zeta$ , с внешним кольцом систему координат  $x_1, y_1, z_1$ , с внутренним —  $x_2, y_2, z_2$ ; при этом: ось вращения внешнего кольца совпадает с осью  $\xi$ ; ось  $y_1$  — с осью вращения внутреннего кольца; ось  $z_2$  — с осью вращения ротора. Положение гироскопической системы будем определять углами  $\alpha, \beta$  и  $\varphi$ , направление отсчета которых показано на фиг. 1.

Обозначим момент инерции внешнего кольца относительно оси его вращения через  $A_1$ , моменты инерции внутреннего кольца относительно осей  $x_2, y_2, z_2$  через  $A_2, B_2, C_2$  экваториальный и полярный моменты инерции ротора через  $A$  и  $C$ . Обозначая проекцию угловой скорости внешнего кольца на ось  $x_1$  через  $p_1$ , проекции угловой скорости внутреннего кольца на оси  $x_2, y_2, z_2$  через  $p_2, q_2, r_2$ , проекции угловой скорости ротора на те же оси через  $p, q, r$ , имеем

$$\begin{aligned} p_2 &= \alpha' \cos \beta, & p &= \alpha' \cos \beta \\ p_1 &= \alpha', & q_2 &= \beta', & q &= \beta' \\ r_2 &= \alpha' \sin \beta, & r &= \varphi' + \alpha' \sin \beta \\ & & & \left( \alpha' = \frac{d\alpha}{dt}, \beta' = \frac{d\beta}{dt}, \varphi' = \frac{d\varphi}{dt} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Обозначим, наконец, через  $K_{x_1}, K_{y_1}, K_{z_1}$  — суммы моментов сил воздействия основания на внешнее кольцо относительно осей  $x_1, y_1, z_1$ ;  $L_{x_1}, L_{y_1}, L_{z_1}$  — суммы моментов сил, действующих на внутреннее кольцо со стороны внешнего кольца;  $M_{x_2}, M_{y_2}, M_{z_2}$  — моменты воздействия внутреннего кольца на ротор [4].]

Тогда, используя (1.1) получим систему уравнений, описывающих движение внешнего кольца, внутреннего кольца и ротора

$$\begin{aligned} A_1 \alpha'' &= K_{x_1} - L_{x_1}, & 0 &= K_{y_1} - L_{y_1}, & 0 &= K_{z_1} - L_{z_1} \\ A_2 \alpha'' \cos \beta - (A_2 + B_2 - C_2) \alpha' \beta' \sin \beta &= L_{x_1} \cos \beta - L_{z_1} \sin \beta - M_{x_2} \\ B_2 \beta'' + (A_2 - C_2) \alpha'^2 \sin \beta \cos \beta &= L_{y_1} - M_{y_2} \\ C_2 \alpha'' \sin \beta + (C_2 + B_2 - A_2) \alpha' \beta' \cos \beta &= L_{x_1} \sin \beta + L_{z_1} \cos \beta - M_{z_2} \\ A \alpha'' \cos \beta + H \beta' - 2A \alpha' \beta' \sin \beta &= M_{x_2} \\ A \beta'' + A \alpha'^2 \sin \beta \cos \beta - H \alpha' \cos \beta &= M_{y_2} \\ \frac{d}{dt} [C (\varphi' + \alpha' \sin \beta)] &= \frac{dH}{dt} = M_{z_2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Рассмотрим силы взаимодействия основания с внешним кольцом. Предположим, что подшипник и шип в сечении, перпендикулярном оси вращения, представляют две окружности, незначительно отличающиеся радиусами. На фиг. 2 изображено сечение подшипника внешнего кольца, расположенного на положительной части оси  $x_1$ . Нормальная сила реакции основания на внешнее кольцо обозначена через  $R_1$ , где  $R_1 \geq 0$ ; сила трения  $F_1 = f_1 R_1$  направлена перпендикулярно к  $R_1$  и препятствует вращению внешнего кольца. Во втором подшипнике силы имеют такие же величины, а направление противоположное.

Будем считать, что ось вращения внешнего кольца направлена вертикально. Тогда, обозначая через  $r_1$  радиус подшипника,  $l_1$  — длину оси внешнего кольца, имеем

$$\begin{aligned} K_{x_1} &= -(2f_1 r_1 R_1 + K_{x_1}^*) \operatorname{sign} \alpha' \\ K_{y_1} &= -R_1 l_1 (\sin \vartheta_1 + f_1 \cos \vartheta_1 \operatorname{sign} \alpha') \\ K_{z_1} &= R_1 l_1 (\cos \vartheta_1 - f_1 \sin \vartheta_1 \operatorname{sign} \alpha') \end{aligned} \quad (1.3)$$

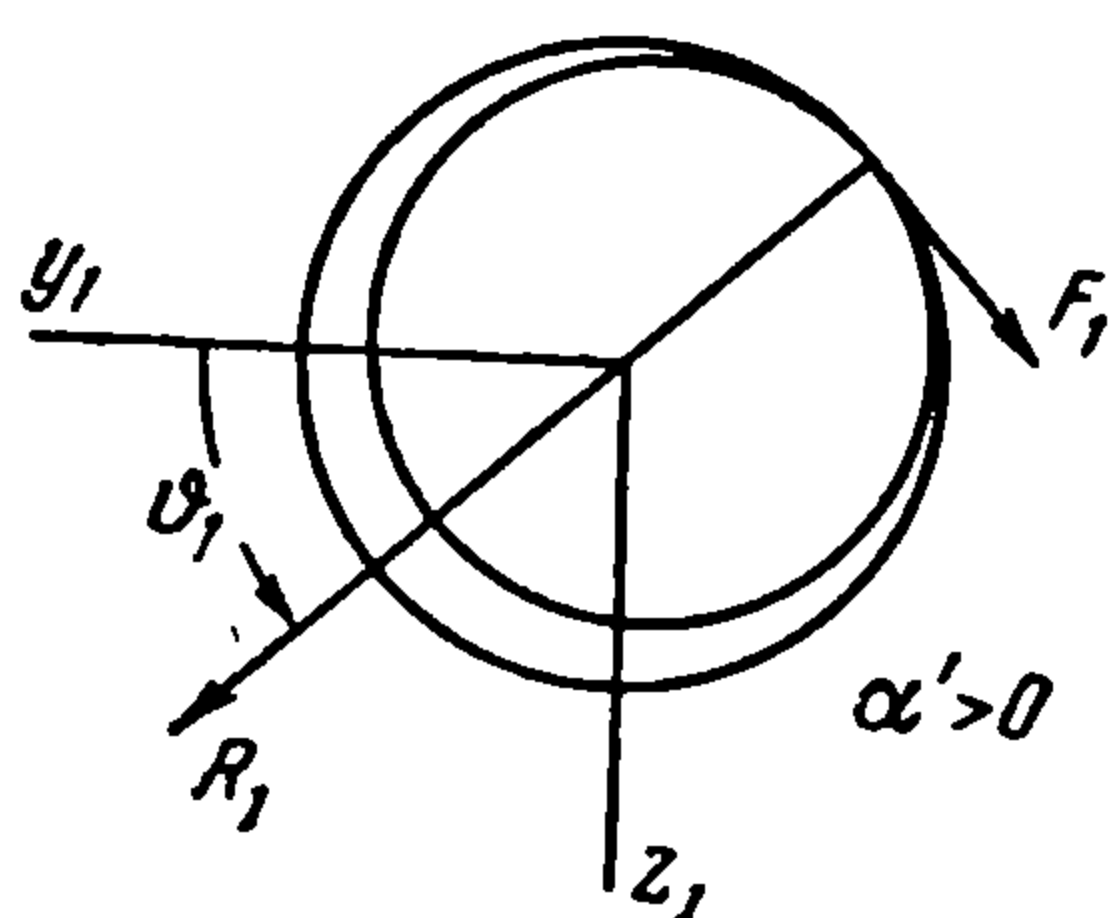
где  $K_{x_1}^*$  есть момент трения вращения, зависящей от силы тяжести. Ввиду того что ось внешнего кольца направлена вертикально, сила тяжести не оказывает влияния на величину  $R_1$ .

Перейдем теперь к рассмотрению сил воздействия внешнего кольца на внутреннее. Сечения подшипников, расположенных на положительной и отрицательной частях оси  $y_1$ , приведены на фиг. 3 и 4. Используя приведенные там обозначения, получим

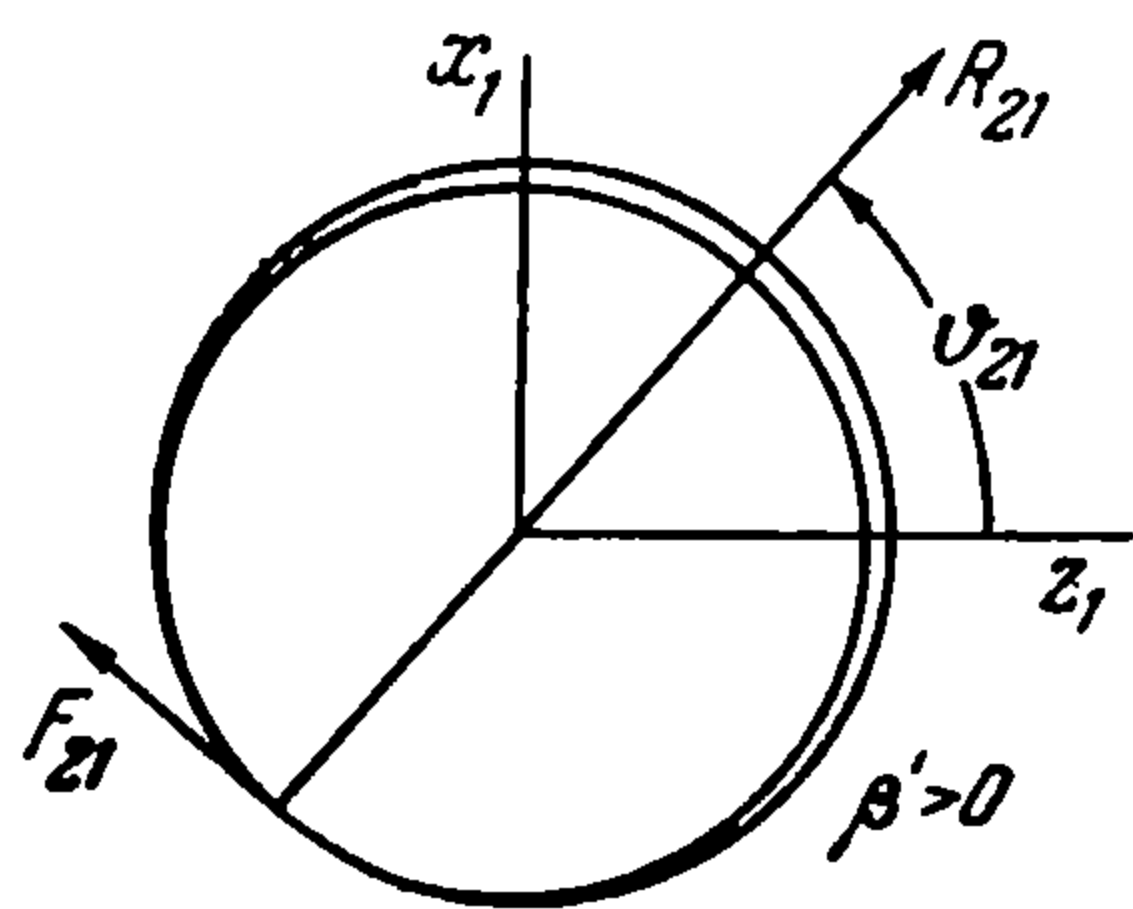
$$\begin{aligned} L_{x_1} &= R_{21} (\cos \vartheta_{21} - f_{21} \sin \vartheta_{21} \operatorname{sign} \beta') \frac{l_2}{2} + R_{22} (\cos \vartheta_{22} + f_{22} \sin \vartheta_{22} \operatorname{sign} \beta') \frac{l_2}{2} \\ L_{y_1} &= -f_2 r_2 (R_{21} + R_{22}) \operatorname{sign} \beta' \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$L_{z_1} = -R_{21} (\sin \vartheta_{21} + f_{21} \cos \vartheta_{21} \operatorname{sign} \beta') \frac{l_2}{2} + R_{22} (\sin \vartheta_{22} - f_{22} \cos \vartheta_{22} \operatorname{sign} \beta') \frac{l_2}{2}$$

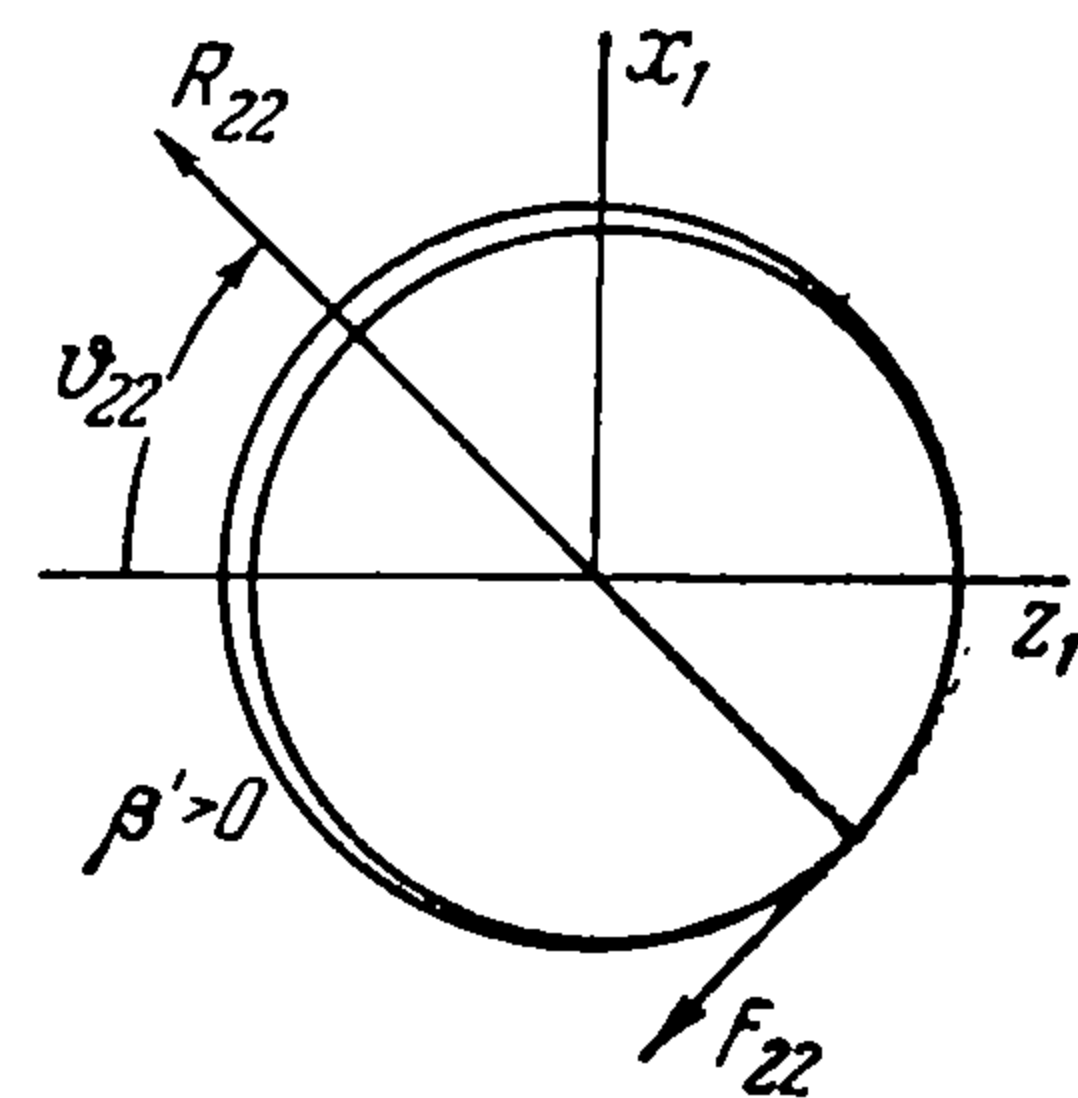
Здесь  $r_2$  — радиус подшипника,  $l_2$  — длина оси внутреннего кольца.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Обозначая вес ротора и внутреннего кольца через  $P$  и проектируя силы, действующие на внутреннее кольцо, на оси  $x_1$  и  $z_1$ , имеем

$$\begin{aligned} R_{21} (\sin \vartheta_{21} + f_{22} \cos \vartheta_{21} \operatorname{sign} \beta') + R_{22} (\sin \vartheta_{22} - f_{22} \cos \vartheta_{22} \operatorname{sign} \beta') &= P \\ R_{21} (\cos \vartheta_{21} - f_{22} \sin \vartheta_{21} \operatorname{sign} \beta') - R_{22} (\cos \vartheta_{22} + f_{22} \sin \vartheta_{22} \operatorname{sign} \beta') &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Используя (1.2) — (1.5), получим систему уравнений, описывающих движение гироскопа в кардановом подвесе с сухим трением

$$A_1 \alpha'' = -(2f_1 r_1 + K_{x_1}^*) \operatorname{sign} \alpha' - R_{21} (\cos \vartheta_{21} - f_2 \sin \vartheta_{21} \operatorname{sign} \beta') l_2 \quad (1.6)$$

$$0 = -R_1 l_1 (\sin \vartheta_1 + f_1 \cos \vartheta_1 \operatorname{sign} \alpha') + f_2 r_2 (R_{21} + R_{22}) \operatorname{sign} \beta' \quad (1.7)$$

$$0 = R_1 l_1 (\cos \vartheta_1 - f_1 \sin \vartheta_1 \operatorname{sign} \alpha') + R_{21} (\sin \vartheta_{21} + f_2 \cos \vartheta_{21} \operatorname{sign} \beta') l_2 - \frac{1}{2} P l_2 \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} A_2 \alpha'' \cos \beta - (A_2 + B_2 - C_2) \alpha' \beta' \sin \beta &= R_{21} (\cos \vartheta_{21} - f_2 \sin \vartheta_{21} \operatorname{sign} \beta') l_2 \cos \beta + \\ + [R_{21} (\sin \vartheta_{21} + f_2 \cos \vartheta_{21} \operatorname{sign} \beta') - \frac{1}{2} P] l_2 \sin \beta - M_{x_2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$B_2 \beta'' + (A_2 - C_2) \alpha'^2 \sin \beta \cos \beta = -f_2 r_2 (R_{21} + R_{22}) \operatorname{sign} \beta' - M_{y_2} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} C_2 \alpha'' \sin \beta + (C_2 + B_2 - A_2) \alpha' \beta' \cos \beta &= R_{21} (\cos \vartheta_{21} - f_2 \sin \vartheta_{21} \operatorname{sign} \beta') l_2 \sin \beta - \\ - [R_{21} (\sin \vartheta_{21} + f_2 \cos \vartheta_{21} \operatorname{sign} \beta') - \frac{1}{2} P] l_2 \cos \beta - M_{z_2} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$A \alpha'' \cos \beta + H \beta' - 2A \alpha' \beta' \sin \beta = M_{x_2} \quad (1.12)$$

$$A \beta'' + A \alpha'^2 \sin \beta \cos \beta - H \alpha' \cos \beta = M_{y_2} \quad (1.13)$$

$$\frac{dH}{dt} = M_{z_2} \quad (1.14)$$

К ним следует присоединить соотношения (1.5).

2. Движение гироскопа под действием постоянного момента. Рассмотрим движение гироскопа под действием постоянного момента вне поля тяготения (случай движения при отсутствии внешних воздействий изложен [3]).

Предположим, что трение на оси ротора отсутствует, т. е.  $M_{z_2} = 0$ , а постоянный момент  $M$  приложен к внешнему кольцу по его оси. Из (1.14) находим, что  $H = \text{const.}$

Так как  $P = 0$ , то из соотношений (1.5) видно, что  $R_{21} = R_{22}$ .

Будем считать углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и угловые скорости  $\alpha'$ ,  $\beta'$  малыми величинами и пренебрегать их квадратами, произведениями и членами порядка  $\alpha''\beta$ . Тогда, например,  $M_{x_2} = A\alpha'' + H\beta'$ ,  $M_{x_2} \sin \beta \approx (A\alpha'' + H\beta') \beta \approx 0$ .

Используя (1.9) — (1.13), получим

$$\begin{aligned} R_{21} (\cos \vartheta_{21} - f_2 \sin \vartheta_{21} \text{sign } \beta') l_2 &= (A + A_2) \alpha'' + H\beta' \\ -2f_2 r_2 R_{21} \text{sign } \beta' &= (A + B_2) \beta'' - H\alpha' \\ R_{21} (\sin \vartheta_{21} + f_2 \cos \vartheta_{21} \text{sign } \beta') l_2 &= 0 \end{aligned}$$

Возводя в квадрат первое и третье уравнения последней системы и складывая их, имеем

$$R_{21} = \frac{1}{l_2 \sqrt{1 + f_2^2}} | (A + A_2) \alpha'' + H\beta' |$$

После исключения  $R_{21}$  находим

$$(A + B_2) \beta'' - H\alpha' = - \frac{2f_2 r_2}{l_2 \sqrt{1 + f_2^2}} | (A + A_2) \alpha'' + H\beta' | \text{sign } \beta' \quad (2.1)$$

Исключая  $R_1$  и  $\vartheta_1$  из уравнений (1.6) — (1.8), получаем

$$(A + A_1 + A_2) \alpha'' + H\beta' = - \frac{2f_1 r_1}{l_1 \sqrt{1 + f_1^2}} | (A + B_2) \beta'' - H\alpha' | \text{sign } \alpha' + M \quad (2.2)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \alpha' = x, \quad \beta' = y, \quad A + A_1 + A_2 = I_1, \quad A + A_2 = I_2, \quad A + B_2 = I_3 \\ \frac{2f_1 r_1}{l_1 \sqrt{1 + f_1^2}} = a_1 > 0, \quad \frac{2f_2 r_2}{l_2 \sqrt{1 + f_2^2}} = a_2 > 0 \end{aligned}$$

Уравнения (2.1) и (2.2) переписутся в следующей форме:

$$\begin{aligned} I_1 x' + Hy = -a_1 | I_3 y' - Hx | \text{sign } x + M \\ I_3 y' - Hx = -a_2 | I_2 x' + Hy | \text{sign } y \end{aligned} \quad (2.3)$$

Первое уравнение системы (2.3) можно привести к виду

$$I_1 x' + Hy = -a_1 a_2 | I_2 x' + Hy | \text{sign } x + M \quad (2.4)$$

Отсюда

$$x' = \frac{M - (1 \pm a_1 a_2 \text{sign } x) Hy}{I_1 \pm a_1 a_2 I_2 \text{sign } x} \quad \begin{array}{l} \text{плюс при } I_2 x' + Hy > 0 \\ \text{минус при } I_2 x' + Hy < 0 \end{array} \quad (2.5)$$

Учитывая (2.5), получим

$$I_2 x' + Hy = \frac{MI_2 + A_1 Hy}{I_1 \pm a_1 a_2 I_2 \text{sign } x}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} I_2 x' + Hy > 0 & \text{для } y > y_0 \\ I_2 x' + Hy = 0 & \text{для } y = y_0 \\ I_2 x' + Hy < 0 & \text{для } y < y_0 \end{cases} \quad \left( y_0 = - \frac{I_2 M}{A_1 H} \right)$$

Рассмотрим движение «изображающей» точки  $Q(x, y)$  на плоскости угловых скоростей  $y$ ,  $x$ , введенной Е. Л. Николаи.

Из уравнений (2.3) видно, что плоскость Николаи разбивается на шесть областей, в каждой из которых движение гироскопа описывается линейными уравнениями. Эти уравнения в каждой из областей преобразованием координат приводятся к уравнению вида

$$\frac{dy}{dx} = -m_i \frac{x}{y} \pm n_i \quad (i = 1, 2) \quad (2.6)$$

в котором

$$m_1 = \frac{I_1 + a_1 a_2 I_2}{I_3 (1 + a_1 a_2)}, \quad m_2 = \frac{I_1 - a_1 a_2 I_2}{I_3 (1 - a_1 a_2)}, \quad n_1 = \frac{a_2 A_1}{I_3 (1 + a_1 a_2)}, \quad n_2 = \frac{a_2 A_1}{I_3 (1 - a_1 a_2)}$$

Из уравнения (2.6) следует, что движение «изображающей» точки происходит по деформированным логарифмическим спиральям (фиг. 5), центры которых соответствуют шести областям плоскости Николаи.

Области		Центры спиралей
I	$(x > 0, y > 0)$	$O_1 \left( \frac{a_2}{1 + a_1 a_2} \frac{M}{H}, \frac{1}{1 + a_1 a_2} \frac{M}{H} \right)$
II	$(x < 0, y > 0)$	$O_2 \left( \frac{a_2}{1 - a_1 a_2} \frac{M}{H}, \frac{1}{1 - a_1 a_2} \frac{M}{H} \right)$
III	$(x < 0, y_0 < y < 0)$	$O_3 \left( -\frac{a_2}{1 - a_1 a_2} \frac{M}{H}, \frac{1}{1 - a_1 a_2} \frac{M}{H} \right)$
IV	$(x < 0, y < y_0)$	$O_4 \left( \frac{a_2}{1 + a_1 a_2} \frac{M}{H}, \frac{1}{1 + a_1 a_2} \frac{M}{H} \right)$
V	$(x > 0, y < y_0)$	$O_5 \left( \frac{a_2}{1 - a_1 a_2} \frac{M}{H}, \frac{1}{1 - a_1 a_2} \frac{M}{H} \right)$
VI	$(x > 0, y_0 < y < 0)$	$O_6 \left( -\frac{a_2}{1 + a_1 a_2} \frac{M}{H}, \frac{1}{1 + a_1 a_2} \frac{M}{H} \right)$

Рассмотрим переход «изображающей» точки через координатные оси. Если «изображающая» точка пересекает ось  $y$ , то угловая скорость внешнего кольца  $\alpha' = x$  обращается в нуль и в соответствии с уравнением (2.4) может представиться два случая:

$$(1) \quad |M - Hy| > a_1 a_2 |I_2 x' + Hy|, \quad x' \neq 0,$$

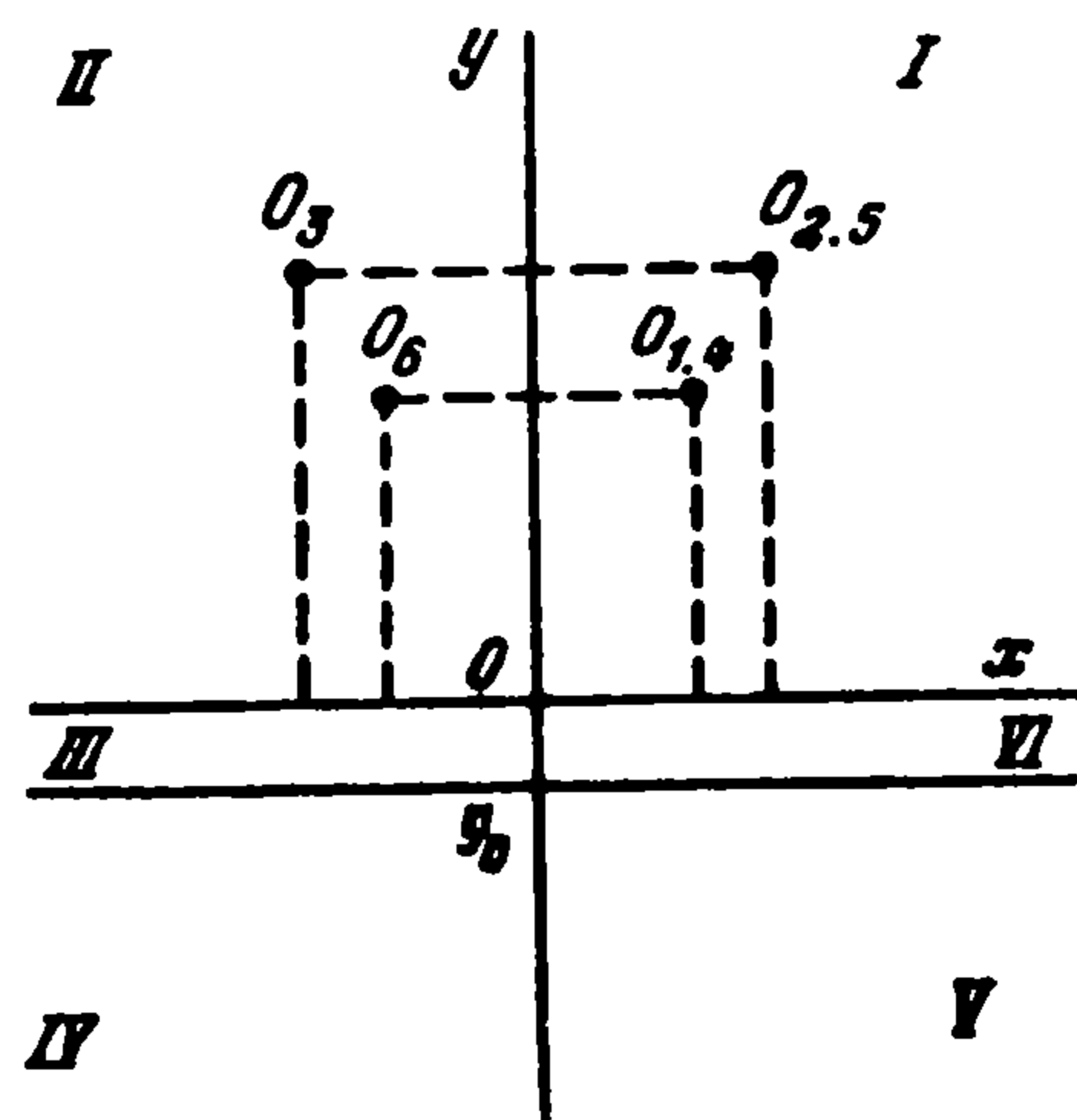
изображающая точка переходит через ось  $y$

$$(2) \quad |M - Hy| \leq a_1 a_2 |Hy|, \quad x' = 0$$

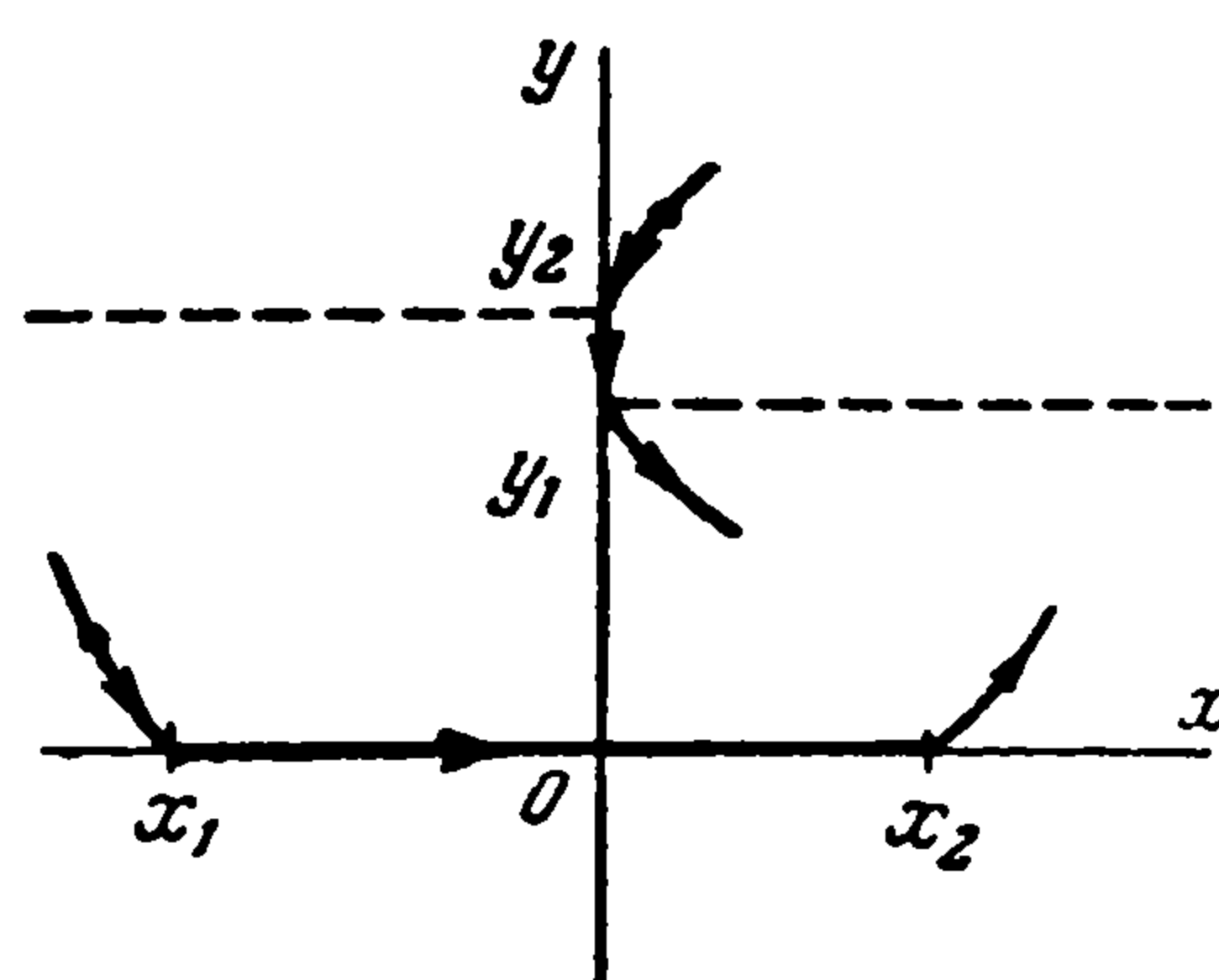
«изображающая» точка скользит по оси  $y$ . Участок скольжения определяется неравенством

$$y_1 \leq y \leq y_2 \quad \left( y_1 = \frac{1}{1 + a_1 a_2} \frac{M}{H}, \quad y_2 = \frac{1}{1 - a_1 a_2} \frac{M}{H} \right)$$

Картина движения «изображающей» точки подтверждает существование участка скольжения на оси  $y$ . Действительно, из (2.4) видно, что если  $x > 0, y = y_1$ , то  $x' = 0$ ; если  $x < 0, y = y_2$ , то также  $x' = 0$ . Прямые  $x' = 0$  изображены на фиг. 6 пунктирными линиями. Выше пунктирных линий движение «изображающей» точки происходит справа налево, ниже — слева направо. Участок  $y_1 y_2$  притягивает к себе «изображающую» точку, единственно возможным движением для которой остается скольжение по оси  $y$  с направлением к началу координат.



Фиг. 5



Фиг. 6

Аналогичное рассуждение показывает, что участок скольжения существует на оси  $x$  (фиг. 6) и определяется неравенством

$$x_1 \leq x \leq x_2 \quad \left( x_1 = -a_2 \frac{I_2 M}{(I_1 - a_1 a_2 I_2) H}, \quad x_2 = a_2 \frac{I_2 M}{(I_1 + a_1 a_2 I_2) H} \right)$$

В точке  $x_2$  «изображающая» точка сходит с оси  $x$ , переходит в область I и с течением времени бесконечно близко приближается к  $O_1$ . Таким образом, после затухания переходного процесса в системе устанавливаются две постоянные угловые скорости

$$\beta' = \frac{1}{1 + a_1 a_2} \frac{M}{H}, \quad \alpha' = \frac{a_2}{1 + a_1 a_2} \frac{M}{H}$$

Предположим теперь, что к внутреннему кольцу по оси его вращения приложен внешний момент  $L$ , постоянный по своей величине. Несложный анализ показывает, что в системе после переходного процесса устанавливается одна постоянная угловая скорость  $\alpha' = L/H$ . В этом случае участки скольжения «изображающей» точки по координатным осям отсутствуют.

**3. О движении весоного гироскопа.** Предположим опять, что  $M_{z_2} = 0$ ,  $H = \text{const}$  и рассмотрим движение весоного гироскопа, ограничиваясь случаем малых углов и малых скоростей. Из (1.11) и (1.5) видно, что

$$R_{21} (\sin \vartheta_{21} + f_2 \cos \vartheta_{21} \text{sign } \beta') = R_{22} (\sin \vartheta_{22} - f_2 \cos \vartheta_{22} \text{sign } \beta') = \frac{P}{2}, \text{ или } R_{21} = R_{22}$$

Используя уравнения (1.9) — (1.13) и последние соотношения, находим

$$L_{x_1} = R_{21} (\cos \vartheta_{21} - f_2 \sin \vartheta_{21} \text{sign } \beta') l_2 = (A + A_2) \alpha'' + H\beta'$$

$$L_{y_1} = -2f_2 r_2 R_{21} \text{sign } \beta' = (A + B_2) \beta'' - H\alpha'$$

$$L_{z_1} = \left[ \frac{P}{2} - R_{21} (\sin \vartheta_{21} + f_2 \cos \vartheta_{21} \text{sign } \beta') \right] l_2 = 0$$

Обозначим  $1/2 Pl_2 = m$ . Тогда, исключая  $R_{21}$  и  $\vartheta_{21}$ , имеем

$$(A + B_2) \beta'' - H\alpha' = -a_2 \sqrt{m^2 + [(A + A_2) \alpha'' + H\beta']^2} \text{sign } \beta' \quad (3.1)$$

Будем считать подшипники внешнего кольца устроенными таким образом, что моментом трения вращения  $K_{x_1}^*$ , зависящим от силы тяжести, можно пренебречь.

После исключения  $R_1$  и  $\vartheta_1$  из уравнений (1.6) — (1.8), получим

$$(A + A_1 + A_2) \alpha'' + H\beta' = -a_1 [(A + B_2) \beta'' - H\alpha'] \text{sign } \alpha' \quad (3.2)$$

Используя обозначения предыдущего параграфа, запишем уравнения (3.1) и (3.2) в следующей форме:

$$I_1 x' + Hy = -a_1 a_2 \sqrt{m^2 + (I_2 x' + Hy)^2} \text{sign } x \quad (3.3)$$

$$I_3 y' - Hx = -a_2 \sqrt{m^2 + (I_2 x' + Hy)^2} \text{sign } y$$

Первоначально рассмотрим случай, когда, вследствие малости трения, можно пренебречь правой частью первого уравнения системы (3.3). Тогда

$$x' = -\frac{H}{I_1} y, \quad I_3 y' - Hx = -a_2 \sqrt{m^2 + n^2 H^2 y^2} \text{sign } y \quad \left( n = \frac{A_1}{I_1} \right)$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{I_1}{I_3} \frac{Hx - a_2 \sqrt{m^2 + n^2 H^2 y^2} \text{sign } y}{Hy}$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\begin{aligned} \ln (m_1^2 + n^2 y^2 - a_2 b x \sqrt{m_1^2 + n^2 y^2} \text{sign } y + b x^2) = \\ = D - \frac{a_2 b \text{sign } y}{p} \text{arc tg } \frac{2 \sqrt{m_1^2 + n^2 y^2} - a_2 b x \text{sign } y}{2 p x} \\ \left( m_1 = \frac{m}{H}, \quad b = n^2 \frac{I_1}{I_3}, \quad p^2 = b - \frac{a_2^2 b^2}{4} \right) \end{aligned}$$

Здесь  $D$  — произвольная постоянная.

Рассмотрим переход «изображающей» точки через координатные оси. Из первого уравнения системы (3.3) имеем

$$x' = -\frac{H}{I_1} y - \frac{a_1 a_2}{I_1} \sqrt{m^2 + (I_2 x' + Hy)^2} \text{sign } x$$

Подставляя  $x'$  во второе уравнение, получим

$$I_3 y' - Hx = -a_2 \left[ m^2 + \left( n^2 H^2 y^2 - a_1 a_2 \frac{I_2}{I_1} \sqrt{m^2 + (I_2 x' + Hy)^2} \operatorname{sign} x \right)^2 \right]^{1/2} \operatorname{sign} y$$

Пусть трение на осях подвеса настолько мало, что членами уравнений с множителем  $a_1 a_2^2$  можно пренебречь. Тогда (3.3) принимает вид

$$\begin{aligned} I_3 y' - Hx &= -a_2 \sqrt{m^2 + n^2 H^2 y^2} \operatorname{sign} y \\ I_1 x' + Hy &= -a_1 a_2 \sqrt{m^2 + n^2 H^2 y^2} \operatorname{sign} x \end{aligned} \quad (3.4)$$

Легко видеть, что на оси  $x$  существует участок скольжения «изображающей» точки к началу координат, определяемый неравенством  $|x| \leq a_2 m / H$ . Представим, что «изображающая» точка в момент начала движения находилась на границе этого участка, т. е.

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = 0, \quad \alpha' = x = a_2 \frac{m}{H}, \quad \beta' = 0 \quad \text{при } t = 0.$$

Далее «изображающая» точка будет скользить по оси  $x$ ; значит, внутреннее кольцо остается неподвижным относительно внешнего кольца. Скорость последнего определяется формулой

$$\alpha' = a_2 \frac{m}{H} - a_1 a_2 \frac{m}{I_1} t$$

Приравнявая  $\alpha'$  нулю, находим время движения  $\tau_1$  гироскопа

$$\tau_1 = \frac{I_1}{a_1 H}$$

За это время отклонение по оси внешнего кольца достигает величины

$$\alpha = a_2 \frac{m}{H} \tau_1 - \frac{1}{2} a_1 a_2 \frac{m}{I_1} \tau_1^2 = \frac{I_1}{2} \frac{a_2}{a_1} \frac{m}{H^2} = \frac{I_1}{4} \frac{a_2}{a_1} \frac{Pl_2}{H^2}$$

*Пример.* Пусть у нас имеется гироскоп со следующими параметрами:

$$I_1 = 11 \text{ гсмсек}^2, \quad P = 300 \text{ г}, \quad l_2 = 5 \text{ см}, \quad H = 7500 \text{ гсмсек}, \quad a_1 = a_2$$

У него отклонение по  $\alpha$  за время скольжения «изображающей» точки по оси  $x$  достигает  $0.25'$ .

Участок скольжения на оси  $y$  определяется неравенством

$$|y| \leq a_1 a_2 \frac{m}{H}$$

За время движения «изображающей» точки по нему отклонение гироскопа по углу  $\beta$  совсем незначительно.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. Ю. Ишлинскому за его руководство при выполнении данной работы.

Поступила 31 X 1959

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Николаи Е. Л. О влиянии трения на движение гироскопа в кардановом подвесе. ДАН СССР, 1943, т. 38, № 2—3.
2. Николаи Е. Л. Гироскоп в кардановом подвесе. Гостехиздат. 1944.
3. Климов Д. М. Затухание собственных колебаний гироскопа в кардановом подвесе с сухим трением. ДАН СССР, 1958, т. 123, № 3.
4. Ишлинский А. Ю. К теории гироскопического маятника, ПММ, 1957, т. XXI, вып. 1.