О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОСИ ФИГУРЫ ГИРОСКОПА

Я. Л. Лунц

(Ленинград)

Используя первые интегралы уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе, устанавливается, что при сколь угодно малом возмущении внутренней рамки, возникает прецессионное движение наружной рамки, уводящее ось ротора гироскопа из начального положения.

В известных работах В. В. Румянцева [7], [8] и В. Н. Скимель [10] при помощи построения функций Ляпунова были даны условия устойчивости регулярных прецессий и перманентных вращений тяжелого гироскопа. Случай перманентного вращения уравновешенного гироскопа вокруг произвольной оси в этих исследованиях выпадал.

Неустойчивость оси фигуры гироскопа может быть доказана, исходя из уравнений движения гиросистемы [1] и получаемых из них квадратур, указанных Н. Г. Четаевым [9] и В. Н. Скимель [10]. Уравнения движения имеют вид

$$\dot\psi = -\frac{J\Omega_0(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0)}{A - B\sin^2\vartheta}, \qquad \dot\vartheta^2 = \dot\vartheta_0^2 - \frac{J^2\Omega_0^2(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0)^2}{J_B(A - B\sin^2\vartheta)} \tag{1}$$

Здесь ψ — угол поворота наружной рамки; ϑ — угол поворота внутренней рамки вокруг своей оси вращения (этот угол измеряется в системе координат, связанной жестко с наружной рамкой); J — момент инерции ротора относительно его оси вращения; Ω_0, $\dot\vartheta_0$, ϑ_0 — начальные значения угловой скорости ротора, угловой скорости внутренней рамки и угла поворота внутренней рамки (угол отсчитывается от такого положения внутренней рамки, когда ось ротора перпендикулярна оси наружной рамки)

$$A = J_z^{(1)} + J_z^{(2)} + J_z, \qquad B = J_z^{(2)} + J_z - J_x^{(2)}, \qquad J_B = J_y^{(2)} + J_z \tag{2}$$

Здесь $J_z^{(1)}$ — момент инерции наружной рамки относительно своей оси вращения; $J_x^{(2)}$, $J_y^{(2)}$, $J_z^{(2)}$ — моменты инерции внутренней рамки относительно взаимно перпендикулярных осей, при этом ось x совпадает с осью вращения ротора, а ось y — с осью вращения внутренней рамки; J_z — экваториальный момент инерции ротора.

Легко видеть, что при любом ϑ

$$J_C(\vartheta) = A - B\sin^2\vartheta > 0, \qquad J_B > 0 \tag{3}$$

Второе уравнение (1) дает уравнение семейства фазовых траекторий на плоскости (ϑ, $\dot\vartheta$) с параметрами ϑ_0, $\dot\vartheta_0$. Все фазовые траектории симметричны относительно оси $\dot\vartheta = 0$, так как если точка (ϑ, $\dot\vartheta$) принадлежит фазовой траектории, то ей принадлежит и точка (ϑ, $-\dot\vartheta$). Фиксируя ϑ_0 и меняя $\dot\vartheta_0$, мы получим однопараметрическое семейство траекторий. Точка $\vartheta = \vartheta_0$, $\dot\vartheta = 0$ является центром. В достаточно малой окрестности этого положения равновесия все фазовые траектории замкнуты. В самом деле, найдем точки пересечения фазовой траектории с осью $\dot\vartheta = 0$.

Для этого во втором уравнении положим $\dot\vartheta = 0$ и решим получившееся уравнение относительно $\sin\vartheta$; имеем

$$\sin\vartheta_{2,1} = \frac{\sin\vartheta_0 \pm \mu\sqrt{A - B\sin^2\vartheta_0 + AB\mu^2}}{1 + B\mu^2} \qquad \left(\mu = \frac{\dot\vartheta_0\sqrt{J_B}}{J\Omega_0}\right) \tag{4}$$

Условием существования двух действительных корней ϑ_1 и ϑ_2 уравнения (3) является выполнение неравенств: $-1 \leqslant \sin\vartheta_1 \leqslant 1$, $-1 \leqslant \sin\vartheta_2 \leqslant 1$.

Из выражения (4) видно, что при $\vartheta_0 \neq {}^1/_2\pi$ и достаточно малом $\dot\vartheta_0$ (а значит и μ) оба условия будут выполнены.

Таким образом, каждому достаточно малому значению начальной угловой скорости $\dot\vartheta_0$ отвечает замкнутая фазовая траектория пересекающая ось $\dot\vartheta = 0$ в двух точках ϑ_1 и ϑ_2 ($\vartheta_1 < \vartheta_0 < \vartheta_2$), определяемых из уравнений (4).

Замкнутым фазовым траекториям отвечают периодические решения второго уравнения (1). Начальным условиям $\vartheta_0 = \dot\vartheta_0 = 0$ отвечает положение равновесия $\vartheta \equiv \vartheta_0$, $\psi \equiv \psi_0$.

Итак, в некоторой окрестности центра все решения $\vartheta(t)$ периодичны. Периодичной является и функция $\dot\psi$, так как при подстановке в правую часть первого уравнения (1) периодической функции $\vartheta(t)$ она (правая часть) также будет периодической функцией времени.

Найдем приращение угла ψ за один период.

Очевидно, что если T — период, то

$$\Delta\psi = \int_0^T \dot\psi\, dt$$

Перейдем от переменной t к ϑ, пользуясь вторым уравнением (1); имеем [9], [10]

$$dt = \frac{(\operatorname{sign}\dot\vartheta)\sqrt{J_B}\sqrt{A - B\sin^2\vartheta}\, d\vartheta}{J\Omega_0\sqrt{(A - B\sin^2\vartheta)\mu^2 - (\sin\vartheta - \sin\vartheta_0)^2}}.$$

Интегрирование по ϑ должно вестись от ϑ_1 до ϑ_2 при $\operatorname{sign}\dot\vartheta = 1$ (ϑ растет) и от ϑ_2 до ϑ_1 при $\operatorname{sign}\dot\vartheta = -1$. Таким образом, имеем

$$\Delta\psi = 2\sqrt{J_B}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0)\, d\vartheta}{\sqrt{(A - B\sin^2\vartheta)\,[(A - B\sin^2\vartheta)\mu^2 - (\sin\vartheta - \sin\vartheta_0)^2]}}$$

Заметим, что

$$(A - B\sin^2\vartheta)\mu^2 - (\sin\vartheta - \sin\vartheta_0)^2 = (1 + B\mu^2)(\sin\vartheta_2 - \sin\vartheta)(\sin\vartheta - \sin\vartheta_1)$$

Откуда

$$\Delta\psi = -2\sqrt{\frac{J_B}{1 + B\mu^2}}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0)\, d\vartheta}{\sqrt{(A - B\sin^2\vartheta)(\sin\vartheta - \sin\vartheta_1)(\sin\vartheta_2 - \sin\vartheta)}} \tag{6}$$

Элементарное доказательство существования несобственного интеграла опускаем (6), докажем, что интеграл, стоящий в правой части (6), отличен от нуля при $\mu \neq 0$, $\sin\vartheta_0 \neq 0$.

Сделаем замену переменных

$$\sin t = \frac{\sin\vartheta - z_1}{z_0} \tag{7}$$

Здесь

$$z_1 = \frac{\sin\vartheta_1 + \sin\vartheta_2}{2} = \frac{\sin\vartheta_0}{1 + B\mu^2}, \qquad z_0 = \frac{\sin\vartheta_2 - \sin\vartheta_1}{2} = \frac{\mu\sqrt{A - B\sin^2\vartheta_0 + AB\mu^2}}{1 + B\mu^2}$$

Тогда формула (6) примет вид

$$a(\mu) \equiv \Delta\psi = -2\mu\sqrt{J_B(1 + B\mu^2)}\, b(\mu), \qquad b(\mu) = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} F(\mu, t)\, dt \tag{8}$$

$$F(\mu, t) = \frac{\sqrt{J_C + AB\mu^2}\sin t - B\mu\sin\vartheta_0}{\theta(t;\, A, B)\,\theta(t;\, 1,1)}$$
$$\theta(t;\, a, b) = [a(1 + b\mu^2)^2 - b(\mu\sqrt{J_C + AB\mu^2}\sin t + \sin\vartheta_0)^2]^{1/2} \tag{9}$$

Примем $a(0) = \lim a(\mu) = 0$ при $\mu \to 0$. Для доказательства того, что $a(\mu) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $\mu = 0$, достаточно показать, что непрерывно дифференцируемая по μ функция $b(\mu)$ имеет при $\mu = 0$ производную, отличную от нуля. Законность дифференцирования вытекает из аналитичности функции $F(\mu, t)$ по μ и непрерывности всех производных относительно t в некоторой окрестности $\mu = 0$.

Простые вычисления дают

$$b(0) = 0, \qquad b'(0) = \frac{\pi(A - B)\sin\vartheta_0}{2\cos^3\vartheta_0\sqrt{A - B\sin^2\vartheta_0}}$$

Таким образом, разложение функции $a(\mu)$ в ряд Тэйлора

$$a(\mu) = a_0 + a_1\mu + a_2\mu^2 + \ldots$$

начинается с третьего члена, при этом

$$a_2 = -\frac{\pi \sqrt{J_B}\,(A-B)\sin\vartheta_0}{\cos^3\vartheta_0 \sqrt{A-B\sin^2\vartheta_0}} \qquad (10)$$

Итак, при $\mu \neq 0$ приращение $\Delta\psi$ угла поворота наружной рамки за период T нутационных колебаний внутренней рамки отлично от нуля. Значит, гироскоп в кардановом подвесе неустойчив.

Ось фигуры совершает прецессию вокруг наружной рамки со средней угловой скоростью $\dot\psi_0 = \dfrac{\Delta\psi}{T}$.

Из второго уравнения (1) следует, что период нутационных колебаний

$$T = \frac{2\sqrt{J_B}}{J\Omega_0\sqrt{1+B\mu^2}} \int\limits_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\sqrt{A-B\sin^2\vartheta}\,d\vartheta}{\sqrt{(\sin\vartheta-\sin\vartheta_1)(\sin\vartheta_2-\sin\vartheta)}}$$

После замены (7) и разложения T в ряд $T = T_0 + T_1\mu + \ldots$ получим

$$T_0 = \frac{2\pi\sqrt{J_B(A-B\sin^2\vartheta_0)}}{J\Omega_0\cos\vartheta_0}$$

Таким образом, разложение $\dot\psi_0$ в ряд Тэйлора

$$\dot\psi_0(\mu) = b_0 + b_1\mu + b_2\mu^2 + \ldots$$

начинается с члена $b_2\mu^2$, так что

$$\dot\psi_0 = -\frac{J_B\,(J_z^{(1)} + J_x^{(2)})\,\dot\vartheta_0^2\,\sin\vartheta_0}{2JJ_C(\vartheta_0)\,\Omega_0\cos^2\vartheta_0} + \ldots$$

Первый член этого разложения совпадает с формулами, выведенными приближенными методами в работах [2] — [6].

Поступила 20 II 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаи Е. Л. Теория гироскопов. Гостехиздат, 1948.
2. Magnus. Beitrage zur Dynamik des kräftfreien kardanisch gelagerten Kreisels. ZAMM, Band 35, Heft 1/2, Januar — Februar, 1955.
3. Plymal by B. T. Goodstein R. Nutation of Free Gyro Subjected to an Impulse. Journal of Applied Mechanic, September, Transactions of American Society of Mechanical Engineers. 22 (3) 1955.
4. Павлов В. А. О влиянии нутационных колебаний гироскопа на его систематический уход от заданного направления. Тр. ЛИАП, вып. XIX, 1958.
5. Пельпор Д. С. Свободное движение гироскопа, заключенного в кардановом подвесе. Науч. докл. высш. школы. Машиностроение и приборостроение. 1958, № 3.
6. Лунц Я. Л. О движении по инерции гироскопа в кардановом подвесе. Изв. высш. учебы. завед. МВО СССР, 1959, № 3.
7. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3,
8. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. II. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
9. Четаев Н. Г. О гироскопе в квардановом подвесе. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
10. Скимель В. Н. Некоторые задачи движения и устойчивости тяжелого гироскопа. Тр. Казан. Авиац. ин-та. 1958. т. XXXVIII.