ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н. К. Куликов
(Сталинград)

Уравнения решаются методом последовательных приближений, являющимся развитием работы [1]. Доказана сходимость последовательных приближений и показано, что исходное приближение для определенного класса задач дает удовлетворительные результаты.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$ay'' + f(x)\,y' + F(x)\,y = 0 \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx},\; y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\; a = \mathrm{const}\right) \tag{1.1}$$

Здесь x и y — действительные переменные; $f(x)$ и $F(x)$ — действительные непрерывные функции, имеют непрерывные производные $f'(x)$, $F'(x)$ и $F(x) \neq 0$.

Общее решение уравнения (1.1) будем искать при помощи соотношений [1]

$$\psi = A_1e^{r_1x} + A_2e^{r_2x}, \qquad y' = A_1r_1e^{r_1x} + A_2r_2e^{r_2x}, \qquad y'' = A_1r_1^2e^{r_1x} + A_2r_2^2e^{r_2x} \tag{1.2}$$

Здесь r_1 и r_2 — корни характеристического уравнения

$$r^2 + mr + p = 0 \tag{1.3}$$

определяются равенствами

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{m}{2} + k, \quad r_2 = -\frac{m}{2} - k, \quad \text{если } k^2 = \left(\frac{m^2}{4} - p\right) > 0 \quad (r_1 \neq r_2) \\ r_1 &= -\frac{m}{2} + qi, \quad r_2 = -\frac{m}{2} - qi, \quad \text{если } q^2 = \left(p - \frac{m^2}{4}\right) > 0 \quad (i = \sqrt{-1}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Параметры m и p подлежат определению в дальнейшем; функция ψ определяется соотношением

$$\psi = \left[\frac{f(x) - m}{p}\right] y' + \frac{F(x)}{p}\, y \tag{1.5}$$

В соответствии с (1.2) функции A_1 и A_2 должны определяться из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} A_1'e^{r_1x} + A_2'e^{r_2x} = \mu, \qquad A_1'r_1e^{r_1x} + A_2'r_2e^{r_2x} = 0 \\ \mu = \psi' - y', \qquad A_1' = \frac{dA_1}{dx}, \qquad A_2' = \frac{dA_2}{dx}, \qquad \psi' = \frac{d\psi}{dx} \end{gathered} \tag{1.6}$$

Подставив ψ согласно (1.5) в первое равенство (1.2) и учитывая второе, получим

$$y = \frac{1}{F(x)}\left\{[p - (f(x) - m)\, r_1]\, A_1e^{r_1x} + [p - (f(x) - m)\, r_2]\, A_2e^{r_2x}\right\} \tag{1.7}$$

Выражение функции μ согласно (1.6) с учетом (1.1) и (1.5) можно представить в виде

$$\mu = \left[\frac{f(x) - m}{p} - \frac{aF'(x)}{pF(x)}\right] y'' + \left[\frac{f'(x) + F(x) - p}{p} - \frac{F'(x)\, f(x)}{pF(x)}\right] y' \tag{1.8}$$

Из дифференциальных уравнений (1.6) получаем

$$A_1 = A_{10} - \frac{r_2}{(r_1 - r_2)} \int_{x_0}^{x} \mu e^{-r_1x} dx, \qquad A_2 = A_{20} + \frac{r_1}{(r_1 - r_2)} \int_{x_0}^{x} \mu e^{-r_2x} dx \tag{1.9}$$

Здесь A_{10} и A_{20} — постоянные интегрирования, значения функций A_1 и A_2 в начальный момент $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0' = z_0$. Значения A_{10} и A_{20} найдутся, если положить в первых равенствах $x = x_0$ (1.2) и разрешить полученную систему

$$A_{10} = \left(\frac{z_0 - \psi_0r_2}{r_1 - r_2}\right) e^{-r_1x_0}, \qquad A_{20} = \left(\frac{\psi_0r_1 - z_0}{r_1 - r_2}\right) e^{-r_2x_0}, \qquad \psi_0 = \frac{[f(x_0) - m]\, z_0 + F(x_0)\, y_0}{p} \tag{1.10}$$

Если заданное уравнение (1.1) имеет постоянные коэффициенты $f(x) \equiv \mathrm{const}$, $F(x) \equiv \mathrm{const}$, то можно положить $f(x) \equiv m$, $F(x) \equiv p$ и, согласно (1.8), функция

μ будет тождественно равна нулю, а функции A_1 и A_2 в силу (1.6) будут просто постоянными интегрирования

$$A_1 \equiv A_{10} = \mathrm{const}, \quad A_2 = A_{20} = \mathrm{const}$$

В общем случае, когда коэффициенты заданного уравнения (1.1) переменны, функция μ не равна тождественно нулю, а функции A_1 и A_2 не являются постоянными. Их необходимо найти. Покажем, что функции A_1 и A_2 могут быть найдены методом последовательных приближений.

2. Обратимся к системе дифференциальных уравнений (1.6) или уравнениям (1.9). Функция μ определяется согласно (1.8), т. е. зависит от функций $f(x)$ и $F(x)$, а также y' и y''. Выразим функцию μ через переменные A_1, A_2 и x. Подставив в (1.8) выражение y'' и y' согласно (1.2) и обратившись к (1.6), найдем систему однородных линейных дифференциальных уравнений

$$A_1' = \theta_1(x) A_1 + \theta_2(x) A_2, \qquad A_2' = \theta_3(x) A_1 + \theta_4(x) A_2 \tag{2.1}$$

Коэффициенты $\theta_1(x), \ldots, \theta_4(x)$ окажутся зависящими от функций $f(x)$, $f'(x)$, $F(x)$, $F'(x)$ и параметров m и p. Но во всех случаях коэффициенты уравнений (2.1) будут непрерывными функциями переменной x. В таком случае для нахождения функций A_1 и A_2 может быть применен метод последовательных приближений [2]. Сходимость последовательных приближений гарантирована по меньшей мере в интервале непрерывности функций $f(x)$, $F(x)$, $f'(x)$ и $F'(x)$. Быстрота сходимости зависит от вида последних функций и значений параметров m и p. В дальнейшем будем находить различные приближения для функций A_1 и A_2, используя интегральные соотношения (1.9). К сказанному добавим, что в некоторых случаях функции $f(x)$ и $F(x)$ могут иметь такой вид, что выполнение операций интегрирования при нахождении последовательных приближений практически затруднительно. Эту трудность можно обойти, если использовать для y не выражение (1.7), а соотношение, полученное интегрированием второго равенства (1.2). Имеем

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} A_1 r_1 e^{r_1 x} dx + \int_{x_0}^{x} A_2 r_2 e^{r_2 x} dx \tag{2.2}$$

Если выражения функций A_1 и A_2 в некотором приближении будут известны, то, использовав связи (2.2) и (1.2), найдем μ и затем по (1.9) — выражения A_1 и A_2 в последующем приближении; подставив уточненные выражения для A_1 и A_2 в (1.2), найдем уточненное общее решение.

В зависимости от точности A_1 и A_2 будут получаться различные приближения для общего решения уравнения (1.1). Общее решение в исходном и простейшем (нулевом) приближении получится, если положить: $A_1 \equiv A_{10} = \mathrm{const}$, $A_2 \equiv A_{20} = \mathrm{const}$, т. е. вместо переменных функций A_1 и A_2 использовать только начальные значения их; тогда из (1.2) имеем

$$y = y(x), \qquad y' = y'(x), \qquad y'' = y''(x)$$

Для получения функции A_1 и A_2 в следующем, первом приближении, подставляем в (1.8) выражения y' и y'' согласно решению в нулевом приближении, находим выражение функции μ через x и постоянные A_{10} и A_{20}. Выполняя вычисления квадратур согласно (1.9), найдем выражение функций $A_1 = A_1^{(1)}$, $A_2 = A_2^{(1)}$ в первом приближении. Подставив в формулы (1.2) вместо A_1 и A_2 функции $A_1^{(1)}$ и $A_2^{(1)}$, найдем общее решение уравнения в первом приближении. Опираясь на первое приближение, установим решение во втором приближении, и т. д.

Изложенный процесс последовательных приближений поясняет, почему данный метод решения уравнений будет давать повышенную точность расчетов по сравнению с обычным методом последовательных приближений. В излагаемом методе нулевое приближение соответствует постоянству функций A_1 и A_2. Искомая переменная y в нулевом приближении получается, согласно общему решению, зависящим определенным образом от x; более того, для линейных уравнений с постоянными коэффициентами нулевое приближение совпадает с точным решением. В обычном методе последовательных приближений нулевым решением являются просто начальные значения искомой функции и ее производной $y = y_0 = \mathrm{const}$, $y' = y_0' = z_0 = \mathrm{const}$.

3. Для получения общего решения уравнения (1.1) в нулевом приближении нужно положить $A_1 \equiv A_{10} = \mathrm{const}$, $A_2 \equiv A_{20} = \mathrm{const}$ и заменить в (1.2) функции A_1 и A_2 через A_{10} и A_{20}. Соответственно получим

$$\left[\frac{f(x)-m}{p}\right]y' + \frac{F(x)}{p}y = A_{10}e^{r_1x} + A_{20}e^{r_2x} \tag{3.1}$$

$$y' = A_{10}r_1e^{r_1x} + A_{20}r_2e^{r_2x} \tag{3.2}$$

$$y'' = A_{10}r_1^2e^{r_1x} + A_{20}r_2^2e^{r_2x} \tag{3.3}$$

Постоянные интегрирования A_{10} и A_{20} найдутся соответственно начальным условиям $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0' = z$ из (1.10). Следовательно, решение в нулевом приближении получается без решения системы вспомогательных дифференциальных уравнений и может быть написано для любых функций $f(x)$ и $F(x)$, при любом способе их задания.

Если исключить y' из (3.1) и (3.2) и заменить A_{10} и A_{20} согласно (1.10), то получим связь между y и x в нулевом приближении для любых функций $f(x)$ и $F(x)$ и действительном параметре k

$$y = \frac{1}{F(x)}e^{-\frac{1}{2}m(x-x_0)}\left[(ab-cd)\operatorname{ch}k(x-x_0) + \left(\frac{bd-ack^2}{k}\right)\operatorname{sh}k(x-x_0)\right] \tag{3.4}$$

При мнимом k (действительном q) соответствующее выражение будет

$$y = \frac{1}{F(x)}e^{-\frac{1}{2}m(x-x_0)}\left[(ab-cd)\cos q(x-x_0) + \left(\frac{bd+acq^2}{q}\right)\sin q(x-x_0)\right] \tag{3.5}$$

В последних формулах

$$a = \frac{F(x_0)y_0 + [f(x_0)-m]z_0}{p}, \qquad b = p + \frac{1}{2}m[f(x)-m]$$
$$c = f(x) - m, \qquad d = z_0 + \frac{1}{2}am \tag{3.6}$$

4. В общее решение уравнения (1.1), находимое по излагаемому методу, входят пока неопределенные параметры m и p и, соответственно (1.4), неопределенные корни r_1 и r_2. Для линейных уравнений с постоянными коэффициентами $f(x) \equiv \mathrm{const}$, $F(x) \equiv \mathrm{const}$, и если выбрать параметры так, чтобы $m \equiv f(x) = \mathrm{const}$, $f'(x) \equiv 0$; $p \equiv F(x) = \mathrm{const}$, $F'(x) = 0$ то, согласно (1.8), функция $\mu \equiv 0$ и из системы (1.6) находим $A_1' \equiv A_2' = 0$, т. е. приходим к известному точному решению. Для уравнений с переменными коэффициентами параметры m и p, в силу их неопределенности, могут выбираться различным образом, в зависимости от вида рассматриваемого уравнения (1.1) и постановки задачи (отыскание решения уравнения для малого интервала изменений переменной x, исследование решения при больших x и др.). Однако можно высказать соображения по выбору m и p, руководствуясь идеей обеспечения лучшего приближения находимых зависимостей к точному решению и стремясь к возможно большему упрощению расчетов. Наибольшая простота расчетов по излагаемому методу достигается при использовании решения в нулевом приближении, когда полагается $A_1 \equiv A_{10}$, $A_2 \equiv A_{20}$. Напишем систему (1.6) для данного случая, полагая известными начальные условия $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0' = z$, и имея в виду, что $A_1' = A_2' = 0$. Находим единственное соотношение $\mu = 0$, которое согласно (1.8) примет вид:

$$\left[\frac{f(x_0)-m}{p} - \frac{\alpha F'(x_0)}{pF(x_0)}\right]y_0'' + \left[\frac{f'(x_0)+F(x_0)-p}{p} - \frac{F'(x_0)f(x_0)}{pF(x_0)}\right]y_0' = 0 \tag{4.1}$$

В зависимости от вида функций $f(x)$ и $F(x_0)$ в (1.1) переменные y' и y'' могут иметь самый разнообразный закон изменения, но во всяком случае $y'_0 \not\equiv 0$ и $y'' \not\equiv 0$. Поэтому равенство (4.1) будет выполняться, если приравнять к нулю коэффициенты перед переменными y_0' и y_0''. Наложив эти условия, получим связи между параметрами m, p и значениями заданных функций $f(x_0)$ и $F(x_0)$ в начальной точке

$$m = m_0 = f(x_0) - \alpha\frac{F'(x_0)}{F(x_0)} \tag{4.2}$$

$$p = p_0 = F(x_0) + f'(x_0) - \frac{F'(x_0)f(x_0)}{F(x_0)} \tag{4.3}$$

Из последних формул видно, что для линейного уравнения с постоянными коэффициентами $f(x) \equiv \text{const}$, $f'(x) \equiv 0$, $F(x) \equiv \text{const}$, $F'(x) \equiv 0$ и параметры m, p оказываются постоянными при любом значении аргумента x. Для уравнений с переменными коэффициентами величины m и p, определенные согласно (4.2) и (4.3), будут зависеть от аргумента x_0. Это значит, что при попытке решения уравнения (1.1) излагаемым методом в нулевом приближении параметры m и p должны браться различными в зависимости от начального значения аргумента x_0 и нулевое приближение будет пригодно (при выбранном x_0) для такого интервала $(x_1 - x_0)$ изменения переменной x, когда m и p изменяются незначительно.

После этого нужно вычислить новые значения параметров по (4.2) и (4.3) согласно новому начальному значению аргумента x_1 и применить вновь формулы нулевого приближения и т. д. Вместо того, чтобы брать различные значения m и p для частных интервалов переменной x (m_0, p_0 для $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, m_1, p_1 для $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, m_n, p_n для $x_n \leqslant x \leqslant x^\circ$), можно условиться брать средние значения параметров в рассматриваемом общем интервале $x_0 \leqslant x \leqslant x^\circ$, т. е. вычислять их по формулам

$$m^\circ = \frac{1}{x^\circ - x_0}\int_{x_0}^{x^\circ} m\,dx, \qquad p^\circ = \frac{1}{x^\circ - x_0}\int_{x_0}^{x^\circ} p\,dx$$

Так как конец рассматриваемого интервала $x = x^\circ$ ничем не зафиксирован, то в дальнейшем вместо x° будем писать просто x, а вместо m° и p° — просто m и p

$$m = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x}\left[f(x) - \frac{\alpha F'(x)}{F(x)}\right]dx = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx - \frac{\alpha}{x - x_0}\ln\frac{F(x)}{F(x_0)} \tag{4.4}$$

$$p = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x}\left[F(x) + f'(x) - \frac{F'(x)f(x)}{F(x)}\right]dx = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} +$$

$$+\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x}\left[F(x) - \frac{F'(x)f(x)}{F(x)}\right]dx \tag{4.5}$$

При этом необходимо следить, чтобы корни r_1 и r_2 оказывались различными. В противном случае параметры m и p нужно определить по-иному. В частности, можно осреднять непосредственно функции $f(x)$ и $F(x)$

$$m = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx, \qquad p = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$$

5. Для иллюстрации и попутной оценки изложенного метода рассмотрим уравнение Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x}y' + x = 0 \qquad (x > 0) \tag{5.1}$$

Применим изложенный метод. Согласно (1.1) и (5.1) имеем

$$\alpha \equiv 1, \qquad f(x) = \frac{1}{x}, \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad F(x) \equiv 1, \qquad F'(x) \equiv 0$$

Характеристическое уравнение (1.3) для данного случая принимает вид

$$r^2 + mr + p = 0, \qquad r_1 = -\frac{1}{2}m + k, \qquad r_2 = -\frac{1}{2}m - k, \qquad k = \sqrt{\frac{1}{4}m^2 - p} \tag{5.2}$$

Согласно (1.7) и (1.2) имеем общее решение уравнения (5.1)

$$y = \left[p - \left(\frac{1}{x} - m\right)r_1\right]A_1e^{r_1x} + \left[p - \left(\frac{1}{x} - m\right)r_2\right]A_2e^{r_2x} \tag{5.3}$$

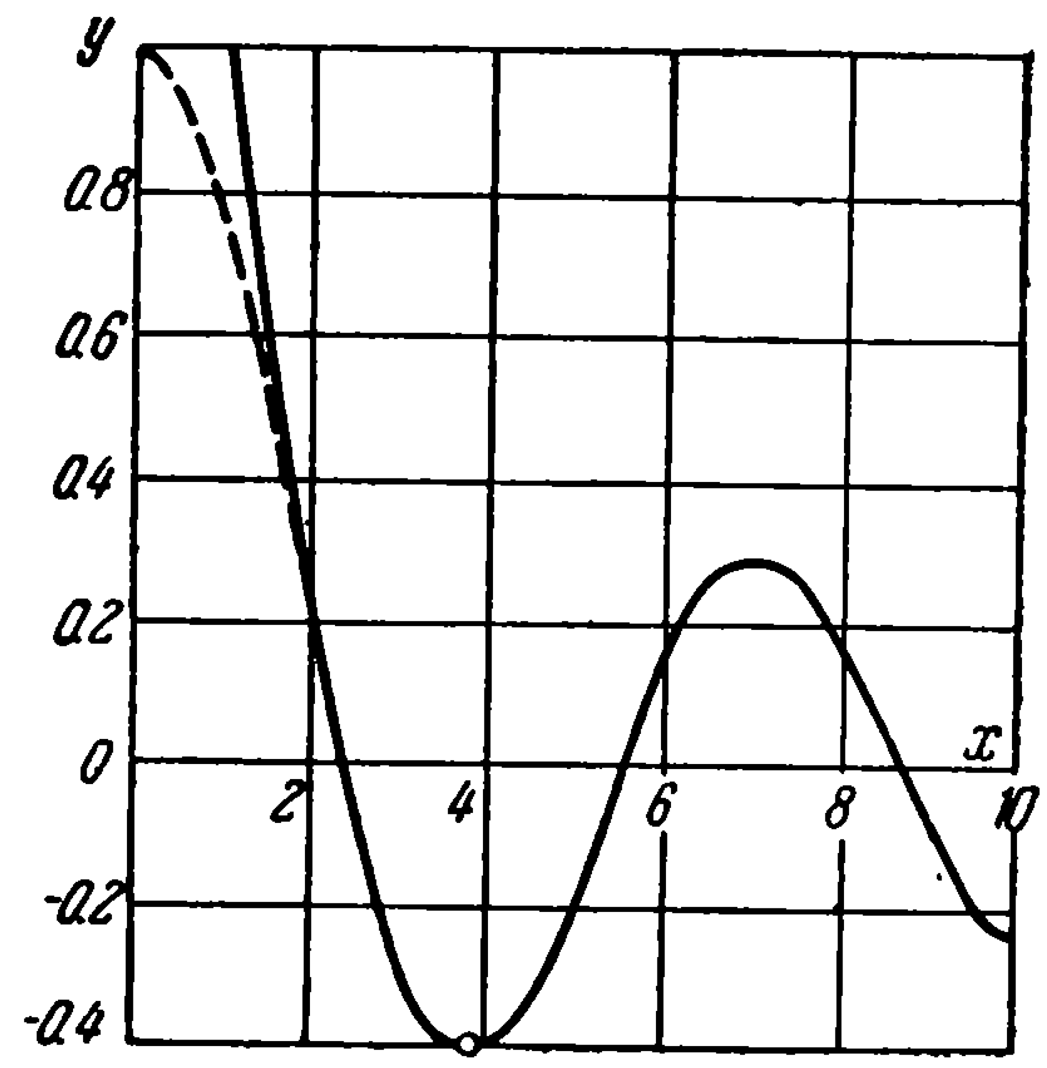
$$y' = A_1r_1e^{r_1x} + A_2r_2e^{r_2x} \tag{5.4}$$

Если начальные условия $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0' = z_0$ заданы, то согласно (1.10) находим A_{10} и A_{20} и затем по (3.4) — связь между y и x в нулевом приближении

$$y = e^{-{}^1\!/_2 m(x-x_0)}\left[(ab - cd)\operatorname{ch} k(x - x_0) + \left(\frac{bd - ack^2}{k}\right)\operatorname{sh} k(x - x_0)\right] \tag{5.5}$$

В последней формуле a, b, c, d определяются согласно (3.6). Параметры m и p найдем согласно (4.4) и (4.5)

$$m = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \frac{1}{x - x_0} \ln \frac{x}{x_0}$$
$$p = \frac{1}{x - x_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right) + \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} dx = 1 - \frac{1}{x_0 x} \tag{5.6}$$



В соответствии (5.6) имеем

$$e^{-m(x - x_0)} = e^{-\ln(x/x_0)} = x_0 / x$$

Учитывая, что при достаточно больших x

$$k^2 < 0, \qquad q^2 = p - \frac{m^2}{4} > 0 \tag{5.7}$$

получим согласно (3.5) и (5.5) общее решение уравнения (5.1) в нулевом приближении

$$y = \sqrt{\frac{x_0}{x}} \left[(ab - cd) \cos q (x - x_0) + \left(\frac{bd + acq^2}{q}\right) \sin q (x - x_0)\right] \tag{5.8}$$

Как известно, точное общее решение уравнения (5.1) дается функциями Бесселя

$$y = C_1 I_0(x) + C_2 Y_0(x) \tag{5.9}$$

где C_1 и C_2 — постоянные, $I_0(x)$ и $Y_0(x)$ — функции Бесселя нулевого порядка первого и второго родов.

На фигуре (пунктирная линия) изображена точная зависимость $y = y(x)$ согласно (5.9) при $C_2 = 0$ и $C_1 = 1$

$$y = I_0(x) \tag{5.10}$$

Для проверки точности нового метода зададимся начальными условиями $x_0 = 3.88$, $y_0 = -0.40276$, $y_0' = z_0 = 0$ (эта точка указана на фигуре), удовлетворяющими точному решению (5.10) и построим зависимость $y = y(x)$ по формуле (5.8) (сплошная линия на фигуре). Сравнение графиков показывает, что (5.8) дает практически одинаковые результаты при $x > 2$. При малых x погрешность расчетов по нулевому приближению возрастает вследствие того, что уравнение (5.1) имеет особую точку при $x = 0$ и $q \to 0$. Из (5.8), в частности, следует упрощенная приближенная формула для больших x. Если $x \to \infty$, то

$$m \approx 0, \quad p \approx 1, \quad f(x) \approx 0, \quad q \approx 1, \quad k^2 = -1$$
$$a \approx y_0 + z_0 f(x_0), \quad b \approx 1, \quad c \approx 0, \quad d \approx z_0$$
$$ab - cd \approx y_0 + z_0 f(x_0) = \text{const}, \qquad \frac{bd + acq^2}{q} \approx z_0 = \text{const}$$

Соответственно, (5.8) дает

$$y = \sqrt{\frac{x_0}{x}} \left[\left(y_0 + \frac{z_0}{x_0}\right) \cos(x - x_0) + z_0 \sin(x - x_0)\right] = \frac{B_1 \cos x}{\sqrt{x}} + \frac{B_2 \sin x}{\sqrt{x}}. \tag{5.11}$$

Здесь B_1 и B_2 — постоянные. Как известно, (5.11) получается и при помощи функции Бесселя [3].

Поступила 9 XII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликов Н. К. Новый метод решения дифференциальных уравнений. Нахождение периодических решений, Изв. Высш. учебн. завед., серия матем. Казань, 1958, вып. 4.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики. ГТТИ, М.—Л., 1952.
3. Карман Т. и Био М. Математические методы в инженерном деле, ОГИЗ, М.—Л., 1948.