ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. ГИТТЛ, 1951.
2. Летов А. М. Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования. ГИТТЛ, 1955.
3. Красовский Н. Н. Некторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
4. Малкин И. Г. К теории устойчивости регулируемых систем, ПММ, 1951, т. XV, вып. 1.
5. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. ГИТТЛ, 1952.
6. Розенвассер Е. Н. К вопросу об устойчивости нелинейных регулируемых систем. Автоматика и телемеханика, 1959, № 2.
7. Розенвассер Е. Н. О построении функции Ляпунова для одного класса нелинейных регулируемых систем. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 2.
8. Плисс В. А. Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом. Изд-во ЛГУ, 1958.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ МАТРИЦ

Н. В. Крючков

(Москва)

Рассматривается приведение уравнений прямого регулирования к специальному каноническому виду, в котором нелинейная функция регулирующего органа входит в систему с коэффициентами нуль и единица. При наличии простых характеристических чисел матрицы коэффициентов исходной системы метод приведения совпадает с методом, данным в работе [1]. Для случая кратных характеристических чисел этой матрицы порядок канонической системы, равный степени минимального многочлена исходной матрицы, может быть меньше порядка исходной системы. Показывается, что в последнем случае из устойчивости канонической системы уравнений не всегда следует устойчивость исходной системы, хотя из неустойчивости канонической системы всегда следует неустойчивость исходной системы. Приводится способ, как из решений канонической системы строить решения исходной системы и, наоборот, из решений исходной системы строить решения канонической системы.

1. Компоненты $A_\gamma^{(k)}$ матрицы A размеров $(n \times n)$ можно определить как числители при разложении $(\lambda E_{n,\,n} - A)^{-1}$ на простейшие дроби [2]

$$(\lambda E_{n,\,n} - A)^{-1} = \frac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{D_{n-1}(\lambda)\, C(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)\, \Delta_r(\lambda)} = \sum_{k=1}^{s} \sum_{\gamma=1}^{m_k} \frac{A_\gamma^{(k)}}{(\lambda - \lambda_k)^\gamma} \tag{1.1}$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} \qquad (n_1 + \ldots + n_s = n) \tag{1.2}$$

$$\Delta_r(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{m_s} \qquad (m_1 + \ldots + m_s = m \leqslant n) \tag{1.3}$$

Здесь $F(\lambda)$ и $C(\lambda)$ — присоединенная и приведенная присоединенная [2] матрицы для $(\lambda E_{n,\,n} - A)$; $D_{n-1}(\lambda)$ — наибольший делитель всех миноров $(n-1)$-го порядка матрицы $(\lambda E_{n,\,n} - A)$; $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_r(\lambda)$ — характеристический и минимальный многочлены [2] матрицы A (т. е. $\Delta_r(\lambda)$ — старший инвариантный множитель характеристической матрицы $(\lambda E_{n,\,n} - A)$; s — число различных характеристических чисел матрицы A.

Компоненты $A_\gamma^{(k)}$ являются линейно-независимыми и отличными от нуля и полностью определяются заданием матрицы A.

Компоненты матрицы A можно применять для практического нахождения функции от матрицы

$$f(A) = \sum_{k=1}^{s} \left[f(\lambda_k) A_1^{(k)} + f'(\lambda_k) A_2^{(k)} + \cdots + \frac{f^{(m_k-1)}(\lambda_k)}{(m_k-1)!} A_{m_k}^{(k)} \right] \tag{1.4}$$

В частности, для функции $e^{\mathrm{A}t}$ имеем соотношение [2]

$$e^{\mathrm{A}t} = \sum_{k=1}^{s} \left[\mathrm{A}_1^{(k)} + \mathrm{A}_2^{(k)} t + \cdots + \mathrm{A}_{m_k}^{(k)} \frac{t^{m_k - 1}}{(m_k - 1)!} \right] e^{\lambda_k t} \tag{1.5}$$

В свою очередь, функции от матрицы можно использовать для интегрирования системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В настоящей статье компоненты матрицы используются при исследовании систем регулирования.

2. Использование компонент матрицы для преобразования уравнений теории регулирования. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha + h_k \varphi(\sigma) \quad (k = 1, \ldots, n), \qquad \sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha x_\alpha \tag{2.1}$$

которую перепишем в форме

$$\dot{x} = \mathrm{B}x + \mathrm{H}\varphi(\sigma), \qquad \sigma = \mathrm{R}x \tag{2.2}$$

Здесь x и H матрицы-столбцы величин x_k и h_k соответственно, B — квадратная матрица коэффициентов $b_{k\alpha}$ размеров $(n \times n)$, R — матрица-строка величин r_α.

Если в уравнениях (2.1) величина σ будет представлять произвольную функцию времени, то решение для x можно записать в виде

$$x = e^{\mathrm{B}t} x_0 + \int_0^t e^{\mathrm{B}(t-\tau)} \mathrm{H}\varphi\{\sigma(\tau)\}\, d\tau \tag{2.3}$$

Функция $e^{\mathrm{B}t}$ имеет вид, аналогичный (1.5)

$$e^{\mathrm{B}t} = \sum_{k=1}^{s} \left[\mathrm{B}_1^{(k)} + \mathrm{B}_2^{(k)} t + \cdots + \mathrm{B}_{m_k}^{(k)} \frac{t^{m_k - 1}}{(m_k - 1)!} \right] e^{\lambda_k t} \tag{2.4}$$

Величины $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — различные характеристические числа матрицы B

$$|\lambda \mathrm{E}_{n,n} - \mathrm{B}| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} \tag{2.5}$$

Следовательно, соотношению (2.3) можно придать форму

$$x = e^{\mathrm{B}t} x_0 + \mathrm{U}\xi^\circ \tag{2.6}$$

где U — прямоугольная матрица $(n \times m)$, столбцами которой являются произведения компонент матрицы B на столбец H

$$\mathrm{U} = \| \mathrm{B}_\gamma^{(k)} \mathrm{H} \| = \| \mathrm{B}_1^{(1)} \mathrm{H}, \ \mathrm{B}_2^{(1)} \mathrm{H}, \ldots, \mathrm{B}_{m_s}^{(s)} \mathrm{H} \| \tag{2.7}$$

а ξ° есть сложная матрица-столбец

$$\xi^\circ = \begin{Vmatrix} \xi^{(1)\circ} \\ \cdots \\ \xi^{(s)\circ} \end{Vmatrix} \tag{2.8}$$

элементами которой являются столбцы

$$\xi^{(k)\circ} = \begin{Vmatrix} \xi_1^{(k)\circ} \\ \cdots \\ \xi_{m_k}^{(k)\circ} \end{Vmatrix} = \int_0^t e^{\lambda_k (t-\tau)} \begin{Vmatrix} 1 \\ \cdots \\ \dfrac{(t-\tau)^{m_k - 1}}{(m_k - 1)!} \end{Vmatrix} \varphi\{\sigma(\tau)\}\, d\tau \quad (k=1, \ldots, s) \tag{2.9}$$

Непосредственным дифференцированием можно убедиться, что ξ° является частным решением системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^{(k)} &= \lambda_k \xi_1^{(k)} + \varphi(\sigma) \\ \dot{\xi}_2^{(k)} &= \lambda_k \xi_2^{(k)} + \xi_1^{(k)} \qquad (k = 1, \ldots, s) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \dot{\xi}_{m_k}^{(k)} &= \lambda_k \xi_{m_k}^{(k)} + \xi_{m_k - 1}^{(k)} \end{aligned} \tag{2.10}$$

матричная форма которой имеет вид

$$\dot{\xi} = \Lambda\xi + G\varphi(\sigma) \tag{2.11}$$

где

$$\underset{(m\times m)}{\Lambda} = \begin{Vmatrix} \Lambda^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Lambda^{(2)} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \Lambda^{(s)} \end{Vmatrix}, \qquad \underset{(m\times 1)}{G} = \begin{Vmatrix} G^{(1)} \\ G^{(2)} \\ \cdots \\ G^{(s)} \end{Vmatrix}$$

$$\underset{(m_k\times m_k)}{\Lambda^{(k)}} = \begin{Vmatrix} \lambda_k & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_k \end{Vmatrix}, \qquad \underset{(m_k\times 1)}{G^{(k)}} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{Vmatrix}$$

Общее решение уравнения (2.11)

$$\xi = e^{\Lambda t}\xi_0 + \xi^\circ \tag{2.12}$$

зависит от m произвольных постоянных

$$\xi_{10}^{(k)}, \quad \xi_{20}^{(k)}, \ldots \xi_{m_k 0}^{(k)} \qquad (k = 1, \ldots, s)$$

Подставляя ξ° из (2.12) в (2.6), получаем

$$x = e^{Bt}x_0 - Ue^{\Lambda t}\xi_0 + U\xi \tag{2.13}$$

Уравнение (2.13) представляет собой соотношение, при помощи которого при произвольном значении σ решения уравнений (2.1) получаются из решений уравнений (2.10). Столбец x_0 представляет собой столбец начальных значений переменных x_k, а столбец ξ_0 является столбцом произвольных постоянных. При выборе значений этих постоянных будем требовать, чтобы произведение Rx не зависело от x_0 и ξ_0. Тогда будем иметь

$$Rx = RU\xi, \qquad Re^{Bt}x_0 = RUe^{\Lambda t}\xi_0 \tag{2.14}$$

Если обозначить произведение RU через Q

$$Q = \| q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, \ldots, q_{m_s}^{(s)} \|, \qquad q_\gamma^{(k)} = RB_\gamma^{(k)}H \tag{2.15}$$

то уравнениям (2.14) можно придать форму

$$Rx = Q\xi, \qquad Re^{Bt}x_0 = Qe^{\Lambda t}\xi_0 \tag{2.16}$$

В последнем из этих уравнений выражение для e^{Bt} имеет вид (2.4). Можно показать, что выражение для $e^{\Lambda t}$ будет иметь аналогичный вид

$$e^{\Lambda t} = \sum_{k=1}^{s}\left[\Lambda_1^{(k)} + \Lambda_2^{(k)}t + \ldots + \Lambda_{m_k}^{(k)}\frac{t^{m_k-1}}{(m_k-1)!}\right]e^{\lambda_k t} \tag{2.17}$$

причем число компонент $\Lambda_\gamma^{(k)}$ будет равно числу компонент $B_\gamma^{(k)}$.

Следовательно, второе уравнение (2.16) эквивалентно m уравнениям

$$Q\,\Lambda_\gamma^{(k)}\xi_0 = RB_\gamma^{(k)}x_0 \qquad (k = 1, \ldots, s;\ \gamma = 1, \ldots, m_k) \tag{2.18}$$

с m неизвестными $\xi_{10}^{(1)}, \xi_{20}^{(1)}, \ldots, \xi_{m_s 0}^{(s)}$. Строками определителя, составленного из коэффициентов при этих неизвестных, являются произведения строки Q на компоненты $\Lambda_\gamma^{(k)}$. Так как эти компоненты линейно-независимы, то этот определитель отличен от нуля и система (2.18) имеет единственное решение, которое мы обозначим при помощи матрицы V размеров $(m \times n)$ следующим образом:

$$\xi_0 = Vx_0 \qquad \left(V = \|Q\,\Lambda_\gamma^{(k)}\|^{-1}\|RB_\gamma^{(k)}\|\right) \tag{2.19}$$

Здесь для сокращения записи стро́ки матриц записаны в виде произведений строк Q и R на компоненты соответствующих матриц. Таким образом, если $\xi_0 = Vx_0$, то $Rx = Q\xi$ и решение уравнений (2.2) при помощи соотношения

$$x = [e^{Bt} - Ue^{\Lambda t}V]\,x_0 + U\xi \tag{2.20}$$

можно получить из решений уравнений

$$\dot{\xi} = \Lambda\xi + G\varphi(\sigma), \qquad \sigma = Q\xi \tag{2.21}$$

форму которых по аналогии с работами Лурье, Летова, Троицкого можно назвать канонической формой уравнений систем регулирования. Отличие этой формы уравнений от канонической формы уравнений в работах упомянутых авторов состоит в том, что порядок системы этих уравнений совпадает с числом компонент матрицы B, а это число может равняться порядку исходной системы (2.2) только в том случае, если минимальный многочлен совпадает с характеристическим многочленом матрицы B. Этот случай, в частности, имеет место тогда, когда среди характеристических чисел матрицы B нет кратных.

3. Свойства матриц U и V. Продифференцировав второе уравнение (2.16) по времени, получим уравнение

$$Re^{Bt}Bx_0 = Qe^{\Lambda t}\Lambda\xi_0 \tag{3.1}$$

аналогичное уравнению (2.16) и, следовательно, $\Lambda\xi_0$ должно удовлетворять уравнению $\Lambda\xi_0 = VBx_0$. Подставляя вместо ξ_0 в это уравнение Vx_0, будем иметь

$$\Lambda Vx_0 = VBx_0 \quad \text{или} \quad \Lambda V = VB \tag{3.2}$$

так как это должно выполняться для произвольного столбца x_0. Также легко видеть, что

$$e^{Bt}H = Ue^{\Lambda t}G \tag{3.3}$$

Дифференцируя это равенство по времени, получаем

$$Be^{Bt}H = U\Lambda e^{\Lambda t}G \quad \text{или} \quad (BU - U\Lambda)\, e^{\Lambda t}G = 0 \tag{3.4}$$

последнее имеем, основываясь на (3.3).

Вследствие того, что $e^{\Lambda t}G$ представляет собой столбец из линейно-независимых функций

$$e^{\lambda_1 t}, \qquad te^{\lambda_1 t}, \ldots, \qquad t^{m_s - 1}e^{\lambda_s t} \tag{3.5}$$

равенство (3.4) справедливо только тогда, когда $BU = U\Lambda$. Полагая $t = 0$ в (3.3), имеем $H = UG$.

По определению $Q = RU$; умножая (3.3) на R, получаем уравнение

$$Re^{Bt}H = Qe^{\Lambda t}G \tag{3.6}$$

аналогичное уравнению (2.16); следовательно

$$G = VH \tag{3.7}$$

Заменив ξ_0 во втором уравнении (2.16) на Vx_0, имеем

$$Re^{Bt}x_0 = Qe^{\Lambda t}Vx_0 \tag{3.8}$$

Учитывая, что (3.8) должно выполняться для произвольного столбца x_0 и произвольного времени $t > 0$, получим

$$Re^{Bt} = Qe^{\Lambda t}V, \qquad R = QV \tag{3.9}$$

Умножив равенство (3.3) слева на матрицу V, будем иметь

$$Ve^{Bt}H = VUe^{\Lambda t}G$$

Так как из равенства (3.2) следует $e^{\Lambda t}V = Ve^{Bt}$, то $e^{\Lambda t}VH = VUe^{\Lambda t}G$ или $e^{\Lambda t}G = VUe^{\Lambda t}G$, что возможно только тогда, когда

$$VU = E_{m,\,m} \tag{3.10}$$

Наконец, если мы умножим U справа на V и возведем это произведение в квадрат, то получим

$$(UV)^2 = UVUV = UE_{m,\,m}V = UV \tag{3.11}$$

Отсюда следует, что произведение UV есть идемпотентная матрица [2], для которой справедливы соотношения

$$BUV = U\Lambda V = UVB \tag{3.12}$$

Резюмируя сказанное, в итоге будем иметь

$$
\begin{array}{ccc}
e^{Bt}H = Ue^{\Lambda t}G, & BU = U\Lambda, & UG = H \\
Re^{Bt} = Qe^{\Lambda t}V, & \Lambda V = VB, & QV = R \\
Q = RU, & VU = E_{m,m}, & VH = G \\
(UV)^2 = UV, & RUV = R, & UVH = H
\end{array}
$$

4. Некоторые теоремы относительно систем регулирования с кратными корнями. Перепишем системы (2.2) и (2.21) в форме

$$\dot{x} = Bx + H\varphi(Rx) \tag{4.1}$$

$$\dot{\xi} = \Lambda\xi + G\varphi(Q\xi) \tag{4.2}$$

Согласно изложенному выше, чтобы получить решение уравнения (4.1) с начальным значением $x(0) = x_0$, можно сначала найти решение для ξ в уравнении (4.2) с начальным значением $\xi(0) = Vx_0$ и затем, в соответствии с формулами (2.20) и (3.2), построить решение уравнения (4.1)

$$x = (E_{n,n} - UV)\, e^{Bt} x_0 + U\xi \tag{4.3}$$

Если необходимо построить решение для ξ в уравнении (4.2) с начальным значением $\xi(0) = \xi_0$, то можно, выбрав столбец x_0, удовлетворяющим соотношению $\xi_0 = Vx_0$, найти решение для x в уравнении (4.1) с начальным значением $x(0) = x_0$ и затем по формуле $\xi = Vx$ построить решение уравнения (4.2). Действительно, если $\xi = Vx$ подставить в уравнение (4.2)

$$V\dot{x} - \Lambda Vx - G\varphi(QVx) = 0 \tag{4.4}$$

и учесть равенства (3.2), (3.7), (3.9), то можно получить тождество

$$V[\dot{x} - Bx - H\varphi(Rx)] = 0 \tag{4.5}$$

ибо x есть решение уравнения (4.1).

Перейдем в уравнении (4.3) к анализу выражения в скобках. Если характеристический многочлен матрицы B совпадает с минимальным многочленом матрицы B, то $m = n$ и

$$E_{n,n} - UV = 0$$

Это следует из того факта, что U и V будут в этом случае матрицами $(n \times n)$ и в силу равенства (3.10)

$$VU = E_{n,n} = UV$$

Если же степень минимального многочлена будет меньше степени характеристического многочлена ($m < n$), что возможно только для случая кратных характеристических чисел матрицы B, то

$$E_{n,n} - UV \neq 0$$

так как в этом неравенстве матрица $E_{n,n}$ имеет ранг n, а ранг произведения UV в силу теоремы Сильвестра будет равен $m < n$.

Рассмотрим подробнее второй случай и докажем для него следующие теоремы.

Теорема 1. Если решение уравнения (4.2) для ξ неустойчиво, то и решение уравнения (4.1) для x неустойчиво.

Теорема 2. Если решение уравнения (4.2) для ξ устойчиво и если кратность корней с положительной вещественной частью в минимальном многочлене матрицы B равна кратности корней с положительной вещественной частью в характеристическом многочлене матрицы B, то решение уравнения (4.1) для x устойчиво, а если меньше — то неустойчиво.

Доказательство первой теоремы вытекает из того факта, что решения для ξ получаются из решений для x при помощи линейного преобразования $\xi = Vx$. Откуда видно, что для того чтобы решение для ξ было неустойчиво, необходимо, чтобы решение для x также было неустойчиво. Очевидно, что первая теорема будет верна и для $m = n$.

При доказательстве второй теоремы будем считать, что матрица B в исходном уравнении имеет жорданову нормальную форму (при помощи линейного неособенного преобразования неизвестных в исходном уравнении ее всегда можно привести к этому виду). Каждая такая матрица всегда может быть разбита на число блоков, равное числу различных корней характеристического многочлена

$$B = \begin{Vmatrix} B^{(1)} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & B^{(s)} \end{Vmatrix}$$

причем размер блока равен кратности корня в характеристическом многочлене. Что касается матрицы Λ, то она уже имеет такой блочный вид, причем размер блока $\Lambda^{(k)}$ в матрице Λ равен кратности корня в минимальном многочлене. Матрицы R, H и x разбиваем на блоки так, чтобы имели смысл произведения RB, BH, Bx, а матрицы Q, G и ξ по своему строению уже имеют такой вид.

Тогда можно показать, что матрицы U, V и UV имеют квазидиагональный вид

$$U = \begin{Vmatrix} U^{(1)} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & U^{(s)} \end{Vmatrix}, \qquad V = \begin{Vmatrix} V^{(1)} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & V^{(s)} \end{Vmatrix}, \qquad UV = \begin{Vmatrix} U^{(1)}V^{(1)} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & U^{(s)}V^{(s)} \end{Vmatrix}$$

Здесь блоки $U^{(k)}$ имеют размеры $(n_k \times m_k)$, а блоки $V^{(k)}$ имеют размеры $(m_k \times n_k)$; произведение UV образуется по правилу умножения блочных матриц, при этом ранг блока $U^{(k)}V^{(k)}$ равен m_k. Так как

$$(E_{n,n} - UV)\, e^{Bt} = \begin{Vmatrix} (E_{n_1,n_1} - U^{(1)}V^{(1)})\, e^{B^{(1)}t} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & (E_{n_s,n_s} - U^{(s)}V^{(s)})\, e^{B^{(s)}t} \end{Vmatrix}$$

то разбив x_0 также на блоки, будем иметь

$$(E_{n,n} - UV)\, e^{Bt}x_0 = \begin{Vmatrix} (E_{n_1,n_1} - U^{(1)}V^{(1)})\, e^{B^{(1)}t} x_0^{(1)} \\ \ldots\ldots \\ (E_{n_s,n_s} - U^{(s)}V^{(s)})\, e^{B^{(s)}t} x_0^{(s)} \end{Vmatrix}$$

Рассмотрим k-ый блок

$$(E_{n_k,n_k} - U^{(k)}V^{(k)})\, e^{B^{(k)}t} x_0^{(k)}$$

Этот блок при произвольном $x_0^{(k)}$ может равняться нулю только тогда, когда

$$E_{n_k,n_k} = U^{(k)}V^{(k)}$$

что возможно только для случая, когда кратность корня в минимальном многочлене совпадает с кратностью корня в характеристическом многочлене. Если же это условие не выполняется, то такое равенство невозможно. Так как функция $\exp \lambda_k t$ является скалярным множителем этого блок-столбца, то при $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ величина элементов блок-столбца неограниченно растет при $t \to \infty$, а это и является свидетельством о неустойчивости, что и требовалось доказать.

Поступила 27 II 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Гостехиздат, 1953.
3. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. Гостехиздат, 1955.
4. Троицкий В. А. О канонических преобразованиях уравнений теории регулирования при наличии кратных корней. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 4.