ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Е. Н. Розенвассер

(Ленинград)

Будем рассматривать нелинейные регулируемые системы, описываемые уравнениями

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha + h_k f(\sigma), \qquad \sigma = \sum_{s=1}^{n} j_s x_s \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

где $b_{k\alpha}$, h_k, j_s — постоянные, а $f(\sigma)$ — нелинейная функция, определенная с точностью до соотношения

$$\sigma f(\sigma) > 0 \tag{2}$$

Будем искать для системы (1) функцию Ляпунова вида

$$V = \Phi + \beta \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma, \qquad \Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} m_{k\alpha} x_k x_\alpha \tag{3}$$

Здесь Φ — знакопостоянная (или знакоопределенная) квадратичная форма переменных $x_1, \ldots, x_n$, а β — постоянная, такая, что

$$\operatorname{sign} \beta = \operatorname{sign} \Phi \tag{4}$$

Устойчивость нулевого решения системы (1) исследовалась при помощи функций Ляпунова вида (3) в ряде работ [1, 2, 3]. В работе [4] [1] был предложен следующий прием установления критериев устойчивости с помощью функции Ляпунова вида (3), который использовался также в некоторых последующих работах.

Производная от функции (3) в силу системы (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} m_{ki} b_{k\alpha} x_i x_\alpha + f(\sigma) \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{ki} h_k x_i + \\ + \beta f(\sigma) \sum_{s=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} b_{s\alpha} j_s x_\alpha + \beta f^2(\sigma) \sum_{s=1}^{n} j_s h_s \end{aligned} \tag{5}$$

и может рассматриваться как квадратичная форма $n+1$ переменных $x_1, \ldots, x_n, f(\sigma)$.

В работе [4] условия устойчивости системы (1) формулировались как условия существования таких $m_{k\alpha}$ и β, чтобы функция (3) была знакоопределенной, а функция (5) — знакоопределенной квадратичной формой переменных $x_1, \ldots, x_n, f(\sigma)$, знака противоположного V.

Оказывается, однако, что такой прием построения функции Ляпунова не эффективен. Именно, имеет место утверждение: нельзя подобрать параметры системы (1) так, чтобы существовала функция вида (3), знакоопределенная при любой функции (2), и такая, чтобы ее производная в силу системы (1) была знакоопределенной квадратичной формой $n+1$ переменных $x_1, \ldots, x_n, f(\sigma)$, знака противоположного V.

Для доказательства предположим противное, что функция V, о которой говорится в формулировке теоремы, существует. Для определенности будем считать, что $V > 0$.

Тогда квадратичная форма

$$V_k = \Phi + \beta \frac{c\sigma^2}{2} \tag{6}$$

является определенно положительной при всех $c > 0$, а ее производная в силу линейной системы

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha + h_k f(\sigma), \qquad \sigma = \sum_{s=1}^{n} j_s x_s \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

получающаяся из (5) заменой $f(\sigma)$ на $c\sigma$, является квадратичной формой, определенно отрицательной при всех c $(-\infty < c < \infty)$.

---

[1] Изложение работы [4] содержится также в [2] и [3].

В силу предположенного характеристическое уравнение системы (7)

$$D(\lambda) - cM(\lambda) = 0 \tag{8}$$

(где D и M — полиномы [1]) при всех $c > 0$ имеет корни с отрицательными вещественными частями.

Предположим сначала, что $M(0) \neq 0$. Будем уменьшать c, и пусть $c^* \leqslant 0$ — наибольшее из чисел, при которых уравнение

$$D(\lambda) - c^* M(\lambda) = 0 \tag{9}$$

имеет корень с вещественной частью, равной нулю. Такое число всегда найдется, так как $M(0) \neq 0$. Тогда в силу предположенного и известной теоремы Ляпунова получаем, что функция (6) является определенно положительной при $c > c^*$.

Отсюда вытекает, что при $c = c^*$ возникают две возможности:

1. Форма (6) определенно положительная.

2. Форма (6) знакопостоянная положительная.

Но если бы имел место первый случай, то на основании теоремы Ляпунова получили бы, что нулевое решение системы (7) при $c = c^*$ асимптотически устойчиво, что противоречит выбору числа c^*.

Вторая возможность, как показал И. Г. Малкин [5], вообще неосуществима. Полученное противоречие и доказывает теорему для случая $M(0) \neq 0$. Однако доказательство легко перенести и на случай $M(0) = 0$, если учесть, что сколь угодно малым изменением коэффициентов системы (7) можно добиться выполнения $M(0) \neq 0$.

Можно привести также чисто алгебраическое доказательство доказанной теоремы. Для этого заметим, что выражение (5) может быть переписано в виде

$$\dot V = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha + h_k y \Big) \Big(\sum_{s=1}^{n} m_{ks} x_s + j_k y \Big) \qquad (y = f(\sigma)) \tag{10}$$

Если

$$D(0) = \det |b_{k\alpha}| \neq 0 \tag{11}$$

то, задавшись любым значанием $y = y_0 \neq 0$, определим величины x_i° ($i = 1, 2, \ldots, n$ из соотношений

$$\sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha^\circ = - h_k y_0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

Среди чисел x_α° заведомо есть отличные от нуля, в то же время имеем

$$\dot V(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, y_0) = 0$$

т. е. при условии (11) производная $\dot V$ не является знакоопределенной. Если же $D(0) = 0$, то можно выбрать $y_0 = 0$, а величины x_i° как ненулевое решение системы

$$\sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha^\circ = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

так как при этом снова $\dot V(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, y_0) = 0$, то $\dot V$ и при $D(0) = 0$ не является знакоопределенной по $n + 1$ аргументу, что и требовалось доказать.

В то же время следует отметить, что знакоопределенные функции вида (3), производная от которых была бы знакопостоянной функцией $n + 1$ переменных, существуют. В частности, достаточные условия существования такой функции даются условиями разрешимости квадратичных уравнений из [6].

В общем же случае производная от функции Ляпунова вида (3) может быть знакоопределенной функцией переменных $x_1, \ldots, x_n$ и знакопеременной, если ее рассматривать как функцию $n + 1$ аргумента [7].

Избежать затруднения, изложенного выше, можно, требуя лишь знакоопределенности квадратичной формы, получающейся из (5) заменой

$$f(\sigma) \text{ на } c \Big(\sum_{s=1}^{n} j_s x_s \Big)$$

При этом можно рассмотреть более общую задачу, полагая лишь, что

$$c_1\sigma^2 < \sigma f(\sigma) < c_2\sigma^2 \tag{13}$$

Составим $\frac{n(n+1)}{2}$ чисел

$$r_{ik}\ (i, k = 1, 2, \ldots, n), \qquad r_{ik} = r_{ki} \tag{14}$$

по формулам

$$r_{i\alpha} = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}b_{k\alpha} + \sum_{k=1}^{n} m_{k\alpha}b_{ki} + c\left(j_\alpha \sum_{s=1}^{n} m_{si}h_s + j_i \sum_{s=1}^{n} m_{s\alpha}h_s\right) +$$

$$+ cp\left(j_\alpha \sum_{s=1}^{n} j_s b_{si} + j_i \sum_{s=1}^{n} j_s b_{s\alpha}\right) + c^2 j_i j_\alpha \left(\sum_{s=1}^{n} j_s h_s\right) p \tag{15}$$

где

$$m_{ik} = m_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

— элементы некоторой симметричной матрицы, p — вещественное число.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Для устойчивости системы (1) при любой функции (13) достаточно:

1°. Чтобы корни уравнений

$$D(\lambda) - (c_1 + \varepsilon) M(\lambda) = 0, \qquad D(\lambda) - (c_2 - \varepsilon) M(\lambda) = 0$$

при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ имели корни с отрицательными вещественными частями;

2°. Чтобы существовали вещественные числа $m_{k\alpha}$ и p, при которых квадратичная форма

$$U = \sum\sum r_{s\alpha}x_s x_\alpha$$

была бы знакоопределенной для всех

$$c_1 < c < c_2 \tag{17}$$

Очевидно, что условие 1° теоремы является также необходимым для устойчивости при любой функции (13).

Условие 2° равносильно неравенствам

$$\Delta_k(c) > 0 \qquad (k = 1, \ldots, n), \qquad c_1 < c < c_2 \tag{18}$$

где $\Delta_k(c)$ определитель Сильвестра порядка k, составленный из чисел r_{sk}.

Доказательство. Пусть при некоторых $m_{i\alpha}$, β выполнены неравенства (18). Тогда в силу условия 1° и теоремы Ляпунова квадратичная форма

$$V_k = \frac{1}{2}\sum\sum m_{i\alpha}x_i x_\alpha + p\,\frac{c\sigma^2}{2} = \frac{1}{2}\sum\sum(m_{i\alpha} + pcj_i j_\alpha)\,x_i x_\alpha \tag{19}$$

является определенно отрицательной при $c = c_1 + \varepsilon$ и $c = c_2 - \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число, так как

$$\frac{dV_k}{dt} = U$$

Отсюда вытекает, что квадратичная форма V_k — определенно отрицательная при всех c, удовлетворяющих условиям (17).

Следовательно, линейная система (7) при условии (17) имеет функцию Ляпунова вида (6), но тогда можно проверить [8], что функция

$$V = \frac{1}{2}\sum\sum m_{i\alpha}x_i x_\alpha + \beta\int_0^\sigma f(\sigma)\,d\sigma$$

является функцией Ляпунова для системы (1) при условии (13), что и требовалось.

Приведенные условия устойчивости — наиболее широкие, какие можно получить, используя функцию Ляпунова вида (3), имеющую знакоопределенную производную в силу системы (1). Рассуждения настоящей заметки без труда распространяются на системы с несколькими регулирующими органами.

Поступила 25 X 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. ГИТТЛ, 1951.
2. Летов А. М. Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования. ГИТТЛ, 1955.
3. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
4. Малкин И. Г. К теории устойчивости регулируемых систем, ПММ, 1951, т. XV, вып. 1.
5. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. ГИТТЛ, 1952.
6. Розенвассер Е. Н. К вопросу об устойчивости нелинейных регулируемых систем. Автоматика и телемеханика, 1959, № 2.
7. Розенвассер Е. Н. О построении функции Ляпунова для одного класса нелинейных регулируемых систем. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 2.
8. Плисс В. А. Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом. Изд-во ЛГУ, 1958.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ МАТРИЦ

И. В. Крючков

(Москва)

Рассматривается приведение уравнений прямого регулирования к специальному каноническому виду, в котором нелинейная функция регулирующего органа входит в систему с коэффициентами нуль и единица. При наличии простых характеристических чисел матрицы коэффициентов исходной системы метод приведения совпадает с методом, данным в работе [1]. Для случая кратных характеристических чисел этой матрицы порядок канонической системы, равный степени минимального многочлена исходной матрицы, может быть меньше порядка исходной системы. Показывается, что в последнем случае из устойчивости канонической системы уравнений не всегда следует устойчивость исходной системы, хотя из неустойчивости канонической системы всегда следует неустойчивость исходной системы. Приводится способ, как из решений канонической системы строить решения исходной системы и, наоборот, из решений исходной системы строить решения канонической системы.

1. Компоненты $A_\gamma^{(k)}$ матрицы A размеров $(n \times n)$ можно определить как числители при разложении $(\lambda E_{n,\,n} - A)^{-1}$ на простейшие дроби [2]

$$(\lambda E_{n,\,n} - A)^{-1} = \frac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{D_{n-1}(\lambda)\, C(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)\, \Delta_r(\lambda)} = \sum_{k=1}^{s} \sum_{\gamma=1}^{m_k} \frac{A_\gamma^{(k)}}{(\lambda - \lambda_k)^\gamma} \tag{1.1}$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} \qquad (n_1 + \ldots + n_s = n) \tag{1.2}$$

$$\Delta_r(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{m_s} \qquad (m_1 + \ldots + m_s = m \leqslant n) \tag{1.3}$$

Здесь $F(\lambda)$ и $C(\lambda)$ — присоединенная и приведенная присоединенная [2] матрицы для $(\lambda E_{n,\,n} - A)$; $D_{n-1}(\lambda)$ — наибольший делитель всех миноров $(n-1)$-го порядка матрицы $(\lambda E_{n,\,n} - A)$; $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_r(\lambda)$ — характеристический и минимальный многочлены [2] матрицы A (т. е. $\Delta_r(\lambda)$ — старший инвариантный множитель характеристической матрицы $(\lambda E_{n,\,n} - A)$; s — число различных характеристических чисел матрицы A.

Компоненты $A_\gamma^{(k)}$ являются линейно-независимыми и отличными от нуля и полностью определяются заданием матрицы A.

Компоненты матрицы A можно применять для практического нахождения функции от матрицы

$$f(A) = \sum_{k=1}^{s} \left[f(\lambda_k) A_1^{(k)} + f'(\lambda_k) A_2^{(k)} + \cdots + \frac{f^{(m_k - 1)}(\lambda_k)}{(m_k - 1)!} A_{m_k}^{(k)} \right] \tag{1.4}$$