ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ МАЛЫЙ ПАРАМЕТР

М. З. Коловский

(Ленинград)

1. Некоторые предварительные замечания. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t) + \mu f(x, t, \mu) \tag{1.1}$$

где x, X, f — n-мерные векторы, μ — малый параметр.

Предполагается:

1) Функции X и f однозначно определены при всех вещественных t, при всех значениях μ, лежащих на отрезке $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$, и при всех x, лежащих в некоторой n-мерной области G;

2) при всех x из G и при $O \leqslant \mu \leqslant \mu_0$ функции X и f от t непрерывные с периодом T

$$X(x, t+T) \equiv X(x, t), \qquad f(x, t+T, \mu) \equiv f(x, t, \mu)$$

3) область G может быть разбита непрерывными гладкими поверхностями на области G_k, в каждой из которых, вплоть до границ, X обладает непрерывными частными производными второго порядка по x, а f — непрерывными производными первого порядка по x и μ при $O \leqslant \mu \leqslant \mu_0$;

4) на границах между областями G_k, которые в дальнейшем будут называться поверхностями разрыва, могут иметь место разрывы первого рода либо самих функций X и f, либо их частных производных первого порядка по x и μ, либо частных производных второго порядка от X по x;

5) уравнение поверхности разрыва между областями G_k и G_{k+1} примем в виде

$$\varphi_k(x) = 0 \tag{1.2}$$

При этом предположим, что на части поверхности (1.2), лежащей в G, функции φ_k имеют непрерывные частные производные второго порядка по x.

Предполагается также, что порождающая система

$$\frac{dx_0}{dt} = X(x_0, t) \tag{1.3}$$

имеет семейство периодических решений, зависящее от l независимых параметров, причем все интегральные кривые этого семейства

$$x_0 = x_0(t, h_1, \ldots, h_l) \tag{1.4}$$

проходят через одну и ту же совокупность областей G_k и для всех этих кривых в точках пересечения их с поверхностями (1.2) выполняется условие

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\frac{dx_0}{dt} \neq 0 \qquad \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \equiv \operatorname{grad} \varphi_k\right) \tag{1.5}$$

и область G содержит n-мерные окрестности всех точек $(l+1)$-мерного многообразия (1.4). Из результатов, полученных в работах [1,2], следует, что при перечисленных выше предположениях могут существовать периодические решения системы (1.1), близкие к некоторым решениям (1.4) и непрерывно в них переходящие при $\mu \to 0$. При этом значения параметров $h_1, \ldots, h_l$ в соответствующих порождающих решениях должны удовлетворять некоторым l условиям вида

$$P_i(h_1, \ldots, h_l) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, l) \tag{1.6}$$

Эти условия найдены в работе [1] в форме определителей порядка $n - l + 1$, для составления которых требуется знание точечного преобразования, осуществляемого решениями системы (1.1). Между тем, для случая уравнений с «гладкими» правыми частями известна иная, интегральная форма условий (1.6) [3].

В настоящей работе показано, что эта форма необходимых условий существования периодического решения может быть обобщена и на случай уравнений с разрывными правыми частями.

2. Уравнения для начальных условий. При сформулированных условиях существование периодического решения уравнения (1.1), близкого к одному из решений (1.4), может быть доказано и без использования метода точечных отображений.

Пусть интегральные кривые (1.4) проходят последовательно через области G_1, $G_2, \ldots, G_m$. В силу замкнутости из области G_m эти кривые должны вновь вернуться в область G_1. Уравнение границы между G_m и G_1 обозначим через

$$\varphi_m(x) = 0$$

В каждой из областей G_k выполнены условия существования и единственности решения уравнения (1.3); следовательно, в этих областях могут быть определены общие решения этого уравнения, зависящие от начального вектора C_k и начального момента t_{0k}

$$x_{0k} = x_{0k}(t, t_{0k}, C_k) \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{2.1}$$

причем

$$x_{0k}(t_{0k}, t_{0k}, C_k) = C_k$$

Интегральные кривые (1.4) в G_k должны совпадать с некоторыми из кривых (2.1). На поверхностях разрыва должны выполняться условия непрерывности и периодичности. Если τ_k — моменты пересечения интегральных кривых с поверхностями разрыва, то имеем

$$x_{0k}(\tau_k, t_{0k}, C_k) - x_{0,\,k+1}(\tau_k, t_{0,\,k+1}C_{k+1}) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m-1) \tag{2.2}$$

$$x_{0m}(\tau_m, t_{0m}, C_m) - x_{01}(\tau_m - T, t_{01}, C_1) = 0 \tag{2.3}$$

$$\varphi_k[x_{0k}(\tau_k, t_{0k}, C_k)] = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{2.4}$$

Уравнение (1.3) имеет семейство решений (1.4), поэтому система (2.2) — (2.4) должна также иметь семейство решений от l параметров вида

$$C_k = C_k(h_1, \ldots, h_l), \qquad \tau_k = \tau_k(h_1, \ldots, h_l) \tag{2.5}$$

При этом t_{0k} могут выбираться произвольно в интервалах $\tau_{k-1} \leqslant t_{0k} \leqslant \tau_k$. С другой стороны, легко показать, что общее решение уравнения (1.1) в G_k может быть представлено в виде

$$x_k = x_k(t, t_{0k}, D_k) = x_{0k}(t, t_{0k}, D_k) + \mu y_k(t, t_{0k}, D_k, \mu) \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{2.6}$$

где t_{0k} имеют те же значения, что и в (2.2) — (2.4).

Начальные векторы D_k и новые моменты встречи интегральных кривых с поверхностями разрыва τ_k' могут быть найдены из уравнений

$$x_{0k}(\tau_k', t_{0k}, D_k) + \mu y_k(\tau_k', t_{0k}, D_k, \mu) - x_{0,\,k+1}(\tau'_k, t_{0,\,k+1}, D_{k+1}) -$$
$$- \mu y_{k+1}(\tau_k', t_{0,\,k+1}, D_{k+1}, \mu) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m-1) \tag{2.7}$$

$$x_{0m}(\tau_m', t_{0m}, D_m) + \mu y_m(\tau_m', t_{0m}, D_m, \mu) - x_{01}(\tau_m' - T, t_{01}, D_1) -$$
$$- \mu y_1(\tau_m' - T, t_{01}, D_1, \mu) = 0 \tag{2.8}$$

$$\varphi[x_{0k}(\tau_k', t_{0k}, D_k) + \mu y_k(\tau_k', t_{0k}, D_k, \mu)] = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{2.9}$$

Нетрудно доказать, что при достаточно малых значениях μ система (2.7) — (2.9) имеет решения, близкие к некоторым из решений (2.5), если соответствующие значения параметров h_i в (2.5) удовлетворяют некоторым l соотношениям вида (1.6). Можно показать также, что если при этих значениях h_i,

$$\frac{\partial(P_1, \ldots, P_l)}{\partial(h_1, \ldots, h_l)} \neq 0$$

то найденное решение системы (2.7) — (2.9) будет простым и ему будет соответствовать изолированное решение системы (1.1). Однако нет нужды приводить это доказательство, так как оно непосредственно следует из результатов, полученных в [1] и [2].

3. Уравнения линейного приближения. Пусть задана некоторая система значений параметров $h_1, \ldots, h_l$. Тем самым задано одно из решений уравнения (1.3), т. е. определены все C_k и τ_k. В каждой из областей G_k можно выбирать в качестве начального любой момент времени в интервале $\tau_{k-1} \leqslant t_{0k} \leqslant \tau_k$; выбираем его так, чтобы

$$t_{0k} = \tau_k \tag{3.1}$$

Тогда, очевидно, имеем

$$x_{0k}(\tau_k, \tau_k, C_k) = C_k, \quad \left\| \frac{\partial x_{0k}(\tau_k, \tau_k, C_k)}{\partial C_k} \right\| = E_n \quad \left(\begin{array}{l} E_n \text{ — единичная матри-} \\ \text{ца } n\text{-го порядка.} \end{array} \right) \tag{3.2}$$

Может показаться, что условие (3.1) не пригодно для подстановки в (2.6), так как при этом может случиться, что t_{0k} не попадет в интервал $[\tau_{k-1}', \tau_k']$, и точка D_k окажется вне области G_k. Однако легко показать, что функции X и f могут быть продолжены с сохранением условий существования и единственности решения системы (1.1) в некоторую окрестность границ области G_k и точка D_k при достаточно малом μ окажется в этой окрестности.

Будем искать теперь решение уравнения (1.1) вида (2.6), удовлетворяющее условиям (2.7) — (2.9). Если такое решение при любом достаточно малом μ существует, то при $\mu \to 0$ оно непрерывно переходит в выбранное порождающее решение, и система (2.7) — (2.9) должна иметь решение, близкое к решению (2.2) — (2.4), т. е. все τ_k' и D_k должны мало отличаться от τ_k и C_k. Поэтому с точностью до малых высшего порядка условия (2.7) — (2.9) должны быть эквивалентны соотношениям:

$$\begin{aligned} x_{0k}(\tau_k, \tau_k, C_k) &+ \left\| \frac{\partial x_{0k}(\tau_k, \tau_k, C_k)}{\partial C_k} \right\| \delta C_k + \frac{\partial x_{0k}(\tau_k, \tau_k, C_k)}{\partial t} \delta\tau_k + \\ &+ \mu y_k(\tau_k, \tau_k, C_k, 0) - x_{0,\,k+1}(\tau_k, \tau_{k+1}, C_{k+1}) - \left\| \frac{\partial x_{0,\,k+1}(\tau_k, \tau_{k+1}, C_{k+1})}{\partial C_{k+1}} \right\| \delta C_{k+1} - \\ &- \mu y_{k+1}(\tau_k, \tau_{k+1}, C_{k+1}, 0) - \frac{\partial x_{0,\,k+1}(\tau_k, \tau_{k+1}, C_{k+1})}{\partial t} \delta\tau_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, m-1) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} x_{0m}(\tau_m, \tau_m, C_m) &+ \left\| \frac{\partial x_{0m}(\tau_m, \tau_m, C_m)}{\partial C_m} \right\| \delta C_m + \frac{\partial x_{0m}(\tau_m, \tau_m, C_m)}{\partial t} \delta\tau_m + \\ &+ \mu y_m(\tau_m, \tau_m, C_m, 0) - x_{01}(\tau_m - T, \tau_1, C_1) - \left\| \frac{\partial x_{01}(\tau_m - T, \tau_1, C_1)}{\partial C_1} \right\| \delta C_1 - \\ &- \frac{\partial x_{01}(\tau_m - T, \tau_1, C_1)}{\partial t} \delta\tau_m - \mu y_1(\tau_m - T, \tau_1, C_1, 0) = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \varphi_k(x_{0k}) + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{0k}} \Bigg[&\left\| \frac{\partial x_{0k}(\tau_k, \tau_k, C_k)}{\partial C_k} \right\| \delta C_k + \frac{\partial x_{0k}(\tau_k, \tau_k, C_k)}{\partial t} \delta\tau_k + \\ &+ \mu y_k(\tau_k, \tau_k, C_k, 0) \Bigg] = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m) \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $\delta\tau_k = \tau_k' - \tau_k$, $\delta C_k = D_k - C_k$. В силу (2.2) — (2.4) и (3.2) уравнения (3.3), (3.4), (3.5) упрощаются; вводя обозначение $y_{0k}(t) = y_k(t, \tau_k, C_k, 0)$, имеем

$$\begin{aligned} \delta C_k &- \left\| \frac{\partial x_{0,\,k+1}(\tau_k, \tau_{k+1}, C_{k+1})}{\partial C_{k+1}} \right\| \delta C_{k+1} + \left[\frac{\partial x_{0k}(\tau_k, \tau_k, C_k)}{\partial t} - \right. \\ &\left. - \frac{\partial x_{0,\,k+1}(\tau_k, \tau_{k+1}, C_{k+1})}{\partial t} \right] \delta\tau_k = \mu \left[y_{0,\,k+1}(\tau_k) - y_{0k}(\tau_k) \right] \quad (k = 1, \ldots, m-1) \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} \delta C_m &- \left\| \frac{\partial x_{01}(\tau_m - T, \tau_1, C_1)}{\partial C_1} \right\| \delta C_1 + \left[\frac{\partial x_{0m}(\tau_m, \tau_m, C_m)}{\partial t} - \right. \\ &\left. - \frac{\partial x_{01}(\tau_m - T, \tau_1, C_1)}{\partial t} \right] \delta\tau_m = \mu \left[y_{01}(\tau_m - T) - y_{0m}(\tau_m) \right] \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{0k}} \left[\delta C_k + \frac{\partial x_{0k}(\tau_k, \tau_k, C_k)}{\partial t} \delta\tau_k \right] = -\mu \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{0k}} y_{0k}(\tau_k) \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{3.8}$$

Отбрасываемые члены здесь, как и во всех последующих формулах, имеют второй порядок малости, так как условия, наложенные на функции X, обеспечивают непрерывность производных от x_{0k} по всем аргументам; поэтому значения этих производных при $\delta\tau_k = \delta C_k = 0$ и при некоторых средних значениях аргументов (для которых записанные формулы становятся точными) отличаются сколь угодно мало при достаточно малом μ. Вместе с тем, подставляя (2.6) в (1.1) и ограничиваясь в полученных уравнениях членами первого порядка малости, получим уравнения

$$\frac{dy_{0k}}{dt} = \left\| \frac{\partial X(x_{0k}, t)}{\partial x_{0k}} \right\| y_{0k}(t) + f_{0k}(t) \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{3.9}$$

где

$$f_{0k}(t) = f[x_{0k}(t, \tau_k, C_k), t, 0]$$

Дифференциальные уравнения (3.9) в совокупности с условиями (3.6) — (3.8) назовем линейным приближением уравнения (1.1),— терминология работы [4].

Уравнения (3.6) — (3.8) образуют линейную неоднородную систему для определения неизвестных δC_k и $\delta\tau_k$. Коэффициенты соответствующей однородной системы образуют матрицу, определитель которой совпадает с якобианом системы (2.2) — (2.4). Поэтому эта однородная система имеет l независимых решений. В таком случае, как известно, для существования решения неоднородной системы необходимо и достаточно, чтобы вектор порядка $m(n+1)$, образуемый правыми частями неоднородной системы, был ортогонален всем l независимым решениям системы, союзной с однородной (т. е. матрица коэффициентов которой является транспонированной матрицей однородной системы).

4. Уравнения в вариациях. Полагая

$$x_k = x_{0k}(t, \tau_k, C_k) + z_k(t) \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{4.1}$$

и предполагая z_k малыми, получим уравнения в вариациях для периодического решения уравнения (1.3)

$$\frac{dz_k}{dt} = \left\| \frac{\partial X(x_{0k}, t)}{\partial x_{0k}} \right\| z_k \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{4.2}$$

Матрица $\| \partial X / \partial x_{0k} \|$ в области G_k непрерывна[1], а уравнение (1.3) имеет общее решение (2.1), поэтому уравнение (4.2) имеет в этой области общее решение

$$z_k = \left\| \frac{\partial x_{0k}(t, \tau_k, C_k)}{\partial C_k} \right\| A_k \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{4.3}$$

где A_k — произвольный вектор-столбец, малый в силу малости функций z_k.

Выясним теперь, можно ли выбрать постоянные A_k таким образом, чтобы варьированное движение (4.1) удовлетворяло условиям непрерывности на границах областей G_k и условиям периодичности с периодом T. Подставляя (4.3) в (4.1), а затем (4.1) в (2.2) — (2.4), получим

$$x_{0k}(\tau_k^*, \tau_k, C_k) + \left\| \frac{\partial x_{0k}(\tau_k^*, \tau_k, C_k)}{\partial C_k} \right\| A_k - x_{0,\,k+1}(\tau_k^*, \tau_{k+1}, C_{k+1}) - \tag{4.4}$$
$$- \left\| \frac{\partial x_{0,\,k+1}(\tau_k^*, \tau_{k+1}, C_{k+1})}{\partial C_{k+1}} \right\| A_{k+1} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m-1)$$

$$x_{0m}(\tau_m^*, \tau_m, C_m) + \left\| \frac{\partial x_{0m}(\tau_m^*, \tau_m, C_m)}{\partial C_m} \right\| A_m - x_{01}(\tau_m^* - T, \tau_1, C_1) - \tag{4.5}$$
$$- \left\| \frac{\partial x_{01}(\tau_m^* - T, \tau_1, C_1)}{\partial C_1} \right\| A_1 = 0$$

$$\varphi_k \left[x_{0k}(\tau_k^*, \tau_k, C_k) + \left\| \frac{\partial x_{0k}(\tau_k^*, \tau_k, C_k)}{\partial C_k} \right\| A_k \right] = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{4.6}$$

---

[1] Во всех матрицах-производных строки состоят из производных от одной и той же составляющей функции по различным составляющим аргумента.

Здесь τ_k^* — моменты времени, в которые варьированная интегральная кривая (4.1) пересекает поверхности разрыва.

Система уравнений (4.4)—(4.6) отличается от системы (2.2) — (2.4) малыми членами. Поэтому τ_k^* будут мало отличаться от τ_k и с точностью до малых высшего порядка система (4.4) — (4.6) эквивалентна системе

$$\left\|\frac{\partial x_{0k}}{\partial C_k}\right\| A_k - \left\|\frac{\partial x'_{0,\,k+1}}{\partial C_{k+1}}\right\| A_{k+1} + \left[\frac{\partial x_{0k}(\tau_k)}{\partial t} - \frac{\partial x'_{0,\,k+1}(\tau_k)}{\partial t}\right]\Delta\tau_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m-1) \tag{4.7}$$

$$\left\|\frac{\partial x_{0m}}{\partial C_m}\right\| A_m - \left\|\frac{\partial x_{01}'}{\partial C_1}\right\| A_1 + \left[\frac{\partial x_{0m}(\tau_m)}{\partial t} - \frac{\partial x_{01}'(\tau_m - T)}{\partial t}\right]\Delta\tau_m = 0 \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{0k}}\left[\left\|\frac{\partial x_{0k}}{\partial C_k}\right\| A_k + \frac{\partial x_{0k}(\tau_k)}{\partial t}\Delta\tau_k\right] = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{4.9}$$

где

$$\left\|\frac{\partial x_{0k}}{\partial C_k}\right\| \equiv \left\|\frac{\partial x_{0k}(\tau_k, \tau_k, C_k)}{\partial C_k}\right\|, \qquad \left\|\frac{\partial x'_{0,\,k+1}}{\partial C_{k+1}}\right\| \equiv \left\|\frac{\partial x_{0,\,k+1}(\tau_k, \tau_{k+1}, C_{k+1})}{\partial C_{k+1}}\right\|$$

$$\left\|\frac{\partial x_{01}'}{\partial C_1}\right\| \equiv \left\|\frac{\partial x_{01}(\tau_m - T, \tau_1, C_1)}{\partial C_1}\right\|, \qquad \frac{\partial x_{0k}(\tau_k)}{\partial t} \equiv \frac{\partial x_{0k}(\tau_k, \tau_k, C_k)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial x'_{0,\,k+1}(\tau_k)}{\partial t} = \frac{\partial x_{0,\,k+1}(\tau_k, \tau_{k+1}, C_{k+1})}{\partial t}, \qquad \Delta\tau_k = \tau_k^* - \tau_k$$

Из уравнений (4.9) однозначно определяются $\Delta\tau_k$

$$\Delta\tau_k = -\frac{1}{d\varphi_k(\tau_k)/dt}\left(\left\|\frac{\partial x_{0k}}{\partial C_k}\right\| A_k\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_{0k}} \qquad \left(\frac{d\varphi_k(\tau_k)}{dt} \neq 0 \text{ в силу (15)}\right) \tag{4.10}$$

Из уравнения (1.3) имеем

$$\frac{\partial x_{0,k}(\tau_k)}{\partial t} - \frac{\partial x_{0,k+1}(\tau_k)}{\partial t} = X_k(\tau_k) - X_{k+1}(\tau_k) = -\Delta_k \tag{4.11}$$

где Δ_k — скачок функции X на поверхности разрыва.

Подставляя (4.10) и (4.11) в (4.7) и (4.8) и учитывая (3.2), получим

$$A_k - \left\|\frac{\partial x'_{0,\,k+1}}{\partial C_{k+1}}\right\| A_{k+1} + \Delta_k \frac{A_k \partial\varphi_k / \partial x_{0k}}{d\varphi_k(\tau_k)/dt} = 0 \qquad \begin{pmatrix} k = 1, \ldots, m \\ m + 1 \equiv 1 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

Полученная система уравнений [1] эквивалентна однородной системе, соответствующей (3.6) — (3.8). Поэтому она также должна иметь l независимых решений, определяющих l непрерывных периодических варьированных решений (4.1). Отметим, что сами функции z_k, вообще говоря, не являются непрерывными; и только в том случае, если все Δ_k равны нулю, т. е. если X — непрерывная функция вдоль всего периодического решения, условия (4.12) совпадают с условиями непрерывности функции z.

Таким образом, может быть построено l периодических решений уравнения в вариациях (4.2), удовлетворяющих условиям (4.12).

Рассмотрим теперь систему линейных уравнений, сопряженную с (4.2)

$$\frac{du_k}{dt} + \left\|\frac{\partial X(x_{0k}, t)}{\partial x_{0k}}\right\|^* u_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{4.13}$$

и систему линейных уравнений

$$B_{k+1} - \left\|\frac{\partial x'_{0,\,k+1}}{\partial C_{k+1}}\right\|^* B_k + \frac{\partial\varphi_{k+1}(\tau_{k+1})}{\partial x_{0k}}\,\frac{(\Delta_{k+1}(\tau_{k+1})\, B_{k+1})}{d\varphi_{k+1}(\tau_{k+1})/dt} = 0 \tag{4.14}$$

Здесь и далее звездочка означает транспонирование матрицы.

---

[1] Нетрудно видеть, что (4.12) в совокупности с (4.2) совпадает с линейным приближением уравнения (1.3), полученным в работе [4].

Легко убедиться, что матрица системы (4.14) получена транспонированием матрицы системы (4.12). Поэтому система (4.14) также имеет l независимых решений

$$B_k^{(1)}, \quad B_k^{(2)}, \ldots, \quad B_k^{(l)} \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{4.15}$$

Будем искать теперь решения системы (4.13), удовлетворяющие условиям

$$u_{k+1}^{(i)}(\tau_k) = B_k^{(i)} \tag{4.16}$$

Подставляя (4.16) в (4.14), получим

$$u_{k+2}^{(i)}(\tau_{k+1}) - \left\| \frac{\partial x'_{0,\,k+1}}{\partial C_{k+1}} \right\|^* u_{k+1}^{(i)}(\tau_k) + \frac{\partial \varphi_{k+1}(\tau_{k+1})}{\partial x_{0k}} \frac{(\Delta_{k+1}(\tau_{k+1}) u_{k+2}^{(i)}(\tau_{k+1}))}{d\varphi_{k+1}(\tau_{k+1}) / dt} = 0$$

$$(k = 0, 1, \ldots, m-1;\ \tau_0 = \tau_m - T) \tag{4.17}$$

В силу известного свойства решений сопряженных систем имеем

$$\left\| \frac{\partial x'_{0,\,k+1}}{\partial C_{k+1}} \right\|^* u_{k+1}^{(i)}(\tau_k) = \left\| \frac{\partial x_{0,\,k+1}}{\partial C_{k+1}} \right\|^* u_{k+1}^{(i)}(\tau_{k+1}) = u_{k+1}^{(i)}(\tau_{k+1}) \tag{4.18}$$

так как

$$\left\| \frac{\partial x_{0,\,k+1}}{\partial C_{k+1}} \right\|^* = E_n$$

Уравнения (4.17) принимают следующий вид

$$u_{k+1}^{(i)}(\tau_k) - u_k^{(i)}(\tau_k) + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{0k}}(\tau_k) \frac{(\Delta_k(\tau_k) \cdot u_{k+1}^{(i)}(\tau_k))}{d\varphi_k(\tau_k) / dt} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{4.19}$$

Очевидно, что если X непрерывна (т. е. все $\Delta_k = 0$), то (4.19) определяет непрерывные периодические решения системы уравнений (4.13).

5. Условия существования периодического решения. Вернемся теперь к решению уравнения (3.9). Непосредственной подстановкой легко убедиться, что это уравнение имеет решение (при $t \leqslant \tau_k$)

$$y_{0k} = \int_{\tau_k}^{t} \left\| \frac{\partial x_{0k}(t, \tau, C_k)}{\partial C_k} \right\| f_{0k}(\tau)\, d\tau \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{5.1}$$

если учесть, что

$$\left\| \frac{\partial x_{0k}(\tau, \tau, C_k)}{\partial C_k} \right\| = E_n \tag{5.2}$$

Подставляя (5.1) в условия (3.6) — (3.8), получим следующую систему:

$$\delta C_k - \left\| \frac{\partial x'_{0,\,k+1}}{\partial C_{k+1}} \right\| \delta C_{k+1} - \Delta_k \delta\tau_k = \mu \int_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} \left\| \frac{\partial x_{0,\,k+1}(\tau_k, \tau, C_{k+1})}{\partial C_{k+1}} \right\| f_{0,\,k+1}(\tau)\, d\tau \tag{5.3}$$

$$(k = 1, \ldots, m-1)$$

$$\delta C_m - \left\| \frac{\partial x_{01}'}{\partial C_1} \right\| \delta C_1 - \Delta_m \delta\tau_m = \mu \int_{\tau_1}^{\tau_m - T} \left\| \frac{\partial x_{01}(\tau_m - T, \tau, C_1)}{\partial C_1} \right\| f_{01}(\tau)\, d\tau \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{0k}} \left[\delta C_k + \frac{\partial x_{0k}(\tau_k)}{\partial t} \delta\tau_k \right] = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{5.5}$$

Учитывая, что (4.16) представляет собой решение союзной однородной системы, условия существования решения системы (5.3) — (5.5) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{m-1} \int_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} \left\| \frac{\partial x_{0,\,k+1}(\tau_k, \tau, C_{k+1})}{\partial C_{k+1}} \right\| f_{0,\,k+1}(\tau)\, u_{k+1}^{(i)}(\tau_k)\, d\tau +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{\tau_m - T} \left\| \frac{\partial x_{01}(\tau_m - T, \tau, C_1)}{\partial C_1} \right\| f_{01}(\tau)\, u_1^{(i)}(\tau_m - T)\, d\tau = 0 \qquad (i = 1, \ldots, l) \tag{5.6}$$

Принимая во внимание (4.18) и обозначая через $f_0(t)$ функцию, равную f_{0k} во всех областях G_k, а через $u^{(i)}(t)$ — функцию, равную $u_k^{(i)}(t)$ в G_k, получаем условия существования периодического решения в окончательном виде

$$\int\limits_{\tau_m - T}^{\tau_m} f_0(\tau)\, u^{(i)}(\tau)\, d\tau = 0 \qquad (i = 1, \ldots, l) \tag{5.7}$$

Для определения параметров $h_1, \ldots, h_l$ получаем систему

$$P_i(h_1, \ldots, h_l) \equiv \int\limits_0^T f_0(\tau)\, u^{(i)}(\tau)\, d\tau = 0 \qquad (i = 1, \ldots, l) \tag{5.8}$$

Если система (5.8) имеет простое решение $h_1^*, \ldots, h_l^*$, т. е. если якобиан

$$\left[\frac{\partial(P_1, \ldots, P_l)}{\partial(h_1, \ldots, h_l)}\right]_{h_j = h_j^*} \neq 0$$

то система (1.1) при достаточно малых μ имеет единственное решение, близкое к порождающему, определяемому этими значениями параметров.

Условия (5.8) формально совпадают с условиями, полученными в [3] для случая уравнений с правыми частями, обладающими непрерывными частными производными второго порядка.

Однако функции $u^{(i)}$ в рассматриваемом случае не являются непрерывными; они должны удовлетворять условиям (4.19), которые в скалярном виде будут

$$u_{s,\,k+1}^{(i)}(\tau_k) - u_{s,\,k}^{(i)}(\tau_k) + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{0s}}(\tau_k)\, \frac{1}{d\varphi_k(\tau_k)/dt} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{kj}(\tau_k)\, u_{j,\,k+1}^{(i)}(\tau_k) = 0 \tag{5.9}$$

$$(i = 1, \ldots, l,\ s = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m)$$

Замечание. Условия (5.7) и (5.9) остаются в силе и в том случае, когда поверхности разрыва заданы в виде периодических, с периодом T функций времени

$$\varphi_k(x,t) = 0 \tag{5.10}$$

При этом только условие (1.5) следует заменить условием

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\, \frac{\partial x_0}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} = 0 \tag{5.11}$$

6. Случай квазиконсервативной системы. В качестве примера, иллюстрирующего полученные результаты, рассмотрим систему, близкую к консервативной

$$\begin{aligned} \dot q_s &= \frac{\partial H}{\partial p_s} + \mu Q_s(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t, \mu) \\ \dot p_s &= -\frac{\partial H}{\partial q_s} + \mu P_s(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t, \mu) \end{aligned} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{6.1}$$

где H — гамильтониан порождающей консервативной системы, не зависящей явно от t; Q_s и P_s — периодические функции t с периодом T.

Предположим, что действующие в порождающей системе

$$\dot q_{s0} = \frac{\partial H}{\partial p_{s0}}, \qquad \dot p_{s0} = -\frac{\partial H}{\partial q_{s0}} \tag{6.2}$$

консервативные силы не являются непрерывными функциями координат q_s, а имеют разрывы первого рода на поверхностях

$$\varphi_k(q_1, \ldots, q_n) = 0 \tag{6.3}$$

В этом случае производные $\partial H / \partial q_s$ будут иметь разрывы первого рода на тех же поверхностях.

Пусть система (6.2) имеет периодическое решение периода T. Тогда, в силу автономности, она имеет однопараметрическое семейство решений вида

$$q_{s0} = q_{s0}(t + h), \qquad p_{s0} = p_{s0}(t + h) \tag{6.4}$$

Система, сопряженная уравнениям в вариациях

$$\dot{u}_s = -\sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_s} u_j + \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_s} v_j, \qquad \dot{v}_s = -\sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_s} u_j + \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_s} v_j \tag{6.5}$$

имеет в таком случае семейство периодических решений

$$u_s = -\dot{p}_{s0}(t+h), \qquad v_s = \dot{q}_{s0}(t+h) \tag{6.6}$$

в чем легко убедиться, подставляя (6.6) в (6.5).

Покажем, что решения (6.6) удовлетворяют условиям (5.9). Действительно, уравнения для v_s удовлетворяются тождественно, так как

$$v_{s,\,k+1} - v_{s,k} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_s} = 0$$

В уравнениях для u_s получаем

$$\sum_{j=1}^{2n} \Delta_{kj} u_{j,\,k+1} = \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial q_{j0}}\right)_k - \left(\frac{\partial H}{\partial q_{j0}}\right)_{k+1} \right] \dot{q}_{j0} = \left(\frac{d\Pi}{dt}\right)_k - \left(\frac{d\Pi}{dt}\right)_{k+1}$$

где Π — потенциальная энергия системы; поэтому

$$u_{s,\,k+1} - u_{s,\,k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_{s0}} \frac{1}{d\varphi_k / dt} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{kj} u_{j,\,k+1} =$$

$$= \dot{p}_{s0,\,k} - \dot{p}_{s0,\,k+1} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_{s0}} \frac{1}{d\varphi_k / dt} \left[\left(\frac{d\Pi}{dt}\right)_k - \left(\frac{d\Pi}{dt}\right)_{k+1} \right] =$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial q_{s0}}\right)_{k+1} - \left(\frac{\partial H}{\partial q_{s0}}\right)_k + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_{s0}}\right)_k - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_{s0}}\right)_{k+1} = 0$$

так как в рассматриваемом случае скачок $\partial H / \partial q_{s0}$ равен скачку $\partial \Pi / \partial q_{s0}$.

Следовательно, условие существования периодических решений системы (6.1), близких к одному из решений (6.4), может быть представлено в виде

$$\int_0^T \sum_s \left[P_s(q_{j0}, p_{j0}, \tau, 0)\, \dot{q}_{s0}(\tau + h) - Q_s(q_{j0}, p_{j0}, \tau, 0)\, \dot{p}_{s0}(\tau + h)\right] d\tau = 0 \tag{6.7}$$

В случае системы второго порядка

$$\ddot{x} + F(x) = \mu f(x, \dot{x}, t, \mu) \tag{6.8}$$

условие (6.7) принимает известную форму

$$\int_0^T f(x_0, \dot{x}_0, \tau, 0)\, \dot{x}_0(\tau + h)\, d\tau = 0 \tag{6.9}$$

где $x_0(t+h)$ — семейство периодических решений порождающей системы

$$\ddot{x}_0 + F(x_0) = 0$$

Условие (6.9) ранее было получено для случая аналитических $F(x)$ и $f(x, \dot{x}, t, \mu)$ (см., например, [5]); оно остается в силе и в том случае, когда эти функции имеют в рассматриваемой области конечное число разрывов первого рода.

Поступила 6 VII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. I, II, III. Изв. Мин. высш. образ. Радиофизика, 1958, № 1, 2, 5—6.
2. Неймарк Ю. И., Шильников Л. П. О применении метода малого параметра к системам дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 6.
3. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
4. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Устойчивость по линейному приближению периодического решения системы уравнений с разрывными правыми частями. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 5.
5. Кац А. М. Вынужденные колебания нелинейных систем с одной степенью свободы, близких к консервативным. ПММ, 1955, т. XIX, вып. 1.