ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

А. П. Проскуряков

(Москва)

Рассмотрим механическую систему с n степенями свободы, уравнения движения которой имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{x}_k + c_{ik}x_k) = \mu F_i(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, \mu) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

Функции $F_i(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, \mu)$ предполагаются аналитическими от своих аргументов в области их изменения. Величина μ является малым параметром.

Порождающая система

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{x}_k + c_{ik}x_k) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \qquad a_{ik} = a_{ki}, \qquad c_{ik} = c_{ki} \tag{2}$$

представляет собою линейную консервативную систему с постоянными коэффициентами, кинетическая и потенциальная энергия которой выражается однородными квадратичными формами

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k, \qquad V = \frac{1}{2}\sum_{i, k=1}^{n} c_{ik}x_i x_k$$

Известно, что квадратичная форма, представляющая кинетическую энергию, является определенно положительной. Следовательно

$$\Delta_0 = |a_{ik}| > 0 \tag{3}$$

Если искать частные решения системы (2) в виде

$$x_{k0}(t) = A_k \cos \omega t + \frac{B_k}{\omega} \sin \omega t$$

то для определения A_k получается система однородных линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} (c_{ik} - \omega^2 a_{ik}) A_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Аналогичная система имеет место для B_k. Условием существования нетривиального решения этих систем служит уравнение

$$\Delta(\omega^2) = |c_{ik} - \omega^2 a_{ik}| = 0 \tag{4}$$

Это уравнение n-ой степени относительно ω^2 имеет, согласно теореме Сильвестра, n вещественных корней. Все корни положительны, если потенциальная энергия также представляется определенно положительной квадратичной формой.

Предположим, что корень ω_r^2 — некратный. Тогда для коэффициентов A_{kr} и B_{kr}, относящихся к колебанию с частотой ω_r, имеют место соотношения

$$p_k^{(r)} = \frac{A_{kr}}{A_{1r}} = \frac{B_{kr}}{B_{1r}} = \frac{\Delta_{ik}(\omega_r^2)}{\Delta_{i1}(\omega_r^2)} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

где $\Delta_{ik}(\omega_r^2)$ — алгебраическое дополнение элемента $c_{ik} - \omega_r^2 a_{ik}$ в определителе $\Delta(\omega_r^2)$ Очевидно, что $p_1^{(r)} = 1$.

Пусть решение порождающей системы содержит l частот, соизмеримых между собой, среди которых нет равных, например, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l$. Этим частотам соответствует периодическое решение системы с некоторым периодом, равным T_0. При этом начальные условия системы должны быть выбраны следующим образом:

$$x_{k0}(0) = \sum_{r=1}^{l} p_k^{(r)} A_r, \qquad \dot{x}_{k0}(0) = \sum_{r=1}^{l-1} p_k^{(r)} B_r \tag{6}$$

Первый индекс «1» у A_{1r} и B_{1r} опущен. В силу автономности системы принято, что $B_l = 0$. Величины $p_k^{(r)}$ определяются формулами (5).

Решение порождающей системы может быть представлено в следующем виде:

$$x_{10}(t) = x_0^{(1)}(t) + x_0^{(2)}(t) + \ldots + x_0^{(l)}(t) \tag{7}$$

$$x_{k0}(t) = p_k^{(1)}x_0^{(1)}(t) + p_k^{(2)}x_0^{(2)}(t) + \ldots + p_k^{(l)}x_0^{(l)}(t) \qquad (k = 2, 3, \ldots, n)$$

причем вид решения для линейной системы не зависит от соизмеримости частот $\omega_1, \ldots, \omega_l$.

Допустим, что указанному решению порождающей системы отвечает периодическое решение системы (1), которое обращается в порождающее при $\mu = 0$. Это решение будет иметь период $T = T_0 + \alpha$, где α — величина, уничтожающаяся при $\mu = 0$. Докажем, что такое периодическое решение может быть представлено в виде, совершенно аналогичном виду (7) решения порождающей линейной системы.

Согласно методу малого параметра начальные условия для системы (1) получаются из начальных условий для порождающей системы путем добавления к ним некоторых величин, уничтожающихся при $\mu = 0$. В данном случае начальные условия удобно взять в следующем виде

$$x_k(0) = x_{k0}(0) + \sum_{j=1}^{n} b_{kj}\beta_j^\circ, \qquad \dot{x}_k(0) = \dot{x}_{k0}(0) + \sum_{j=1}^{n} e_{kj}\gamma_j^\circ$$

где b_{kj} и e_{kj} — неопределенные пока коэффициенты, а β_j° и γ_j° — функции от μ, обращающиеся в нуль при $\mu = 0$.

Решение системы (1) будет зависеть от параметров β_j°, γ_j° и μ. Предположим, что функции $x_k(t)$ могут быть разложены в ряды по целым степеням этих параметров. Определим те члены этих рядов, которые зависят от параметров β_j° и γ_j°, но не зависят от параметра μ. Из этих членов сохранятся только линейные члены относительно β_j° и γ_j°. Остальные члены обратятся в нуль, так как коэффициенты при них удовлетворяют системе однородных уравнений (2) с нулевыми начальными условиями. Таким образом функции $x_k(t)$ будут иметь вид

$$x_k(t, \beta_j^\circ, \gamma_j^\circ, \mu) = x_{k0}(t) + \sum_{j=1}^{n} P_{kj}\beta_j^\circ + \sum_{j=1}^{n} Q_{kj}\gamma_j^\circ + \mu\,[\ldots]$$

Для определения коэффициентов P_{kj} при параметре β_j° имеем систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{P}_{kj} + c_{ik}P_{kj}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и аналогичную систему для коэффициентов Q_{kj} при параметре γ°_t.

Для построения периодического решения системы (1) с периодом $T = T_0 + \alpha$ могут быть использованы только те частоты, которые входят в решение порождающей системы. Кроме того, в силу автономности системы (1) частота ω_l не используется при определении коэффициентов Q_{kj}. Учитывая начальные условия, будем иметь

$$P_{kj} = \sum_{r=1}^{l} p_k^{(r)}U_j^{(r)}\cos\omega_r t, \qquad Q_{kj} = \sum_{r=1}^{l-1} p_k^{(r)}V_j^{(r)}\sin\omega_r t$$

где $U_j^{(r)}$ и $V_j^{(r)}$ — некоторые постоянные. Коэффициенты b_{kj} и e_{kj} будут при этом равны

$$b_{kj} = \sum_{r=1}^{l} p_k^{(r)}U_j^{(r)}, \qquad e_{kj} = \sum_{r=1}^{l-1} p_k^{(r)}V_j^{(r)}$$

Введем новые величины

$$\beta_r = \sum_{j=1}^{n} U_j^{(r)}\beta_j^\circ \quad (r = 1, \ldots, l), \qquad \gamma_r = \sum_{j=1}^{n} V_j^{(r)}\gamma_j^\circ \quad (r = 1, \ldots, l-1)$$

Получим

$$x_k(t, \beta_r, \gamma_r, \mu) = x_{k0}(t) + \sum_{r=1}^{l} p_k^{(r)}\beta_r\cos\omega_r t + \sum_{r=1}^{l-1} p_k^{(r)}\frac{\gamma_r}{\omega_r}\sin\omega_r t +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\left[\underline{C}_{km}(t) + \frac{\partial C_{km}}{\partial\beta_1}\beta_1 + \ldots + \frac{\partial C_{km}}{\partial\gamma_1}\gamma_1 + \ldots\right]\mu^m$$

При этом начальные условия примут вид

$$x_k(0) = x_{k0}(0) + \sum_{r=1}^{l} p_k^{(r)}\beta_r, \quad \dot{x}_k(0) = \dot{x}_{k0}(0) + \sum_{r=1}^{l-1} p_k^{(r)}\gamma_r \qquad (k=1, \ldots, n) \tag{8}$$

Нетрудно доказать, аналогично тому, как это сделано в работах [1] и [2], что дифференцирование по β_r и γ_r можно заменить дифференцированием по A_r и B_r соответственно. Итак, имеем окончательно

$$x_k(t, \beta_r, \gamma_r, \mu) = \sum_{r=1}^{l} p_k^{(r)}(A_r + \beta_r)\cos\omega_r t + \sum_{r=1}^{l-1} p_k^{(r)} \frac{B_r + \gamma_r}{\omega_r} \sin\omega_r t +$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\left[C_{km}(t) + \frac{\partial C_{km}}{\partial A_1}\beta_1 + \ldots + \frac{\partial C_{km}}{\partial B_1}\gamma_1 + \ldots\right]\mu^m \qquad (k=1, \ldots, n) \tag{9}$$

Коэффициенты $C_{km}(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{C}_{km} + c_{ik}C_{km}) = H_{im}(t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

при нулевых начальных условиях

$$C_{km}(0) = 0, \qquad \dot{C}_{km}(0) = 0$$

Величины $H_{im}(t)$ определяются формулой

$$H_{im}(t) = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^{m-1}F_i}{d\mu^{m-1}}\right)_{\mu=0}$$

причем

$$H_{i1}(t) = F_i(x_{10}, \ldots, x_{n0}, \dot{x}_{10}, \ldots, \dot{x}_{n0}, 0)$$

Обозначим оператор дифференцирования по времени t через D. Тогда система (10) может быть записана так:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}D^2 + c_{ik})C_{km} = H_{im}(t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

Отсюда находим

$$C_{km}(t) = \frac{1}{\Delta^*(D^2)}\sum_{i=1}^{n}\Delta_{ik}^*(D^2)H_{im}(t)$$

Здесь $\Delta^*(D^2)$ — определитель системы (11), а $\Delta_{ik}^*(D^2)$ — алгебраическое дополнение к элементу $a_{ik}D^2 + c_{ik}$. Легко видеть, что

$$\Delta^*(D^2) = \Delta(-D^2) \tag{12}$$

где Δ — определитель, стоящий в левой части уравнения частот (4). Аналогичные соотношения имеют место для алгебраических дополнений соответствующих элементов этих определителей.

Из формул (3), (4) и (12) следует

$$\Delta^*(D^2) = \Delta_0 \prod_{r=1}^{n}(D^2 + \omega_r^2)$$

Учитывая, что частоты $\omega_1, \ldots, \omega_l$ — различные, воспользуемся следующим разложением на простейшие дроби:

$$\frac{\Delta_{ik}^*(D^2)}{\Delta^*(D^2)} = \frac{1}{\Delta_0}\left[\sum_{r=1}^{l}\frac{K_{ik}^{(r)}}{D^2 + \omega_r^2} + \ldots\right], \qquad K_{ik}^{(r)} = \Delta_{ik}(\omega_r^2)\left[\prod_{s \neq r}^{n}(\omega_s^2 - \omega_r^2)\right]^{-1}$$

Так как ищется периодическое решение системы (1) с периодом $T = T_0 + \alpha$, то при построении коэффициентов $C_{km}(t)$ нужно сохранить только те слагаемые, которые связаны с частотами $\omega_1, \ldots, \omega_l$. Поэтому

$$C_{km}(t) = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{r=1}^{l} \Big[\omega_r \prod_{s \neq r}^{n} (\omega_s^2 - \omega_r^2)\Big]^{-1} \int_0^t R_{km}^{(r)}(\tau) \sin \omega_r (t - \tau)\, d\tau \tag{13}$$

где

$$R_{km}^{(r)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ik}(\omega_r^2) H_{im}(t) \tag{14}$$

Введем обозначение

$$C_m^{(r)}(t) = \Big[\Delta_0 \omega_r \prod_{s \neq r}^{n} (\omega_s^2 - \omega_r^2)\Big]^{-1} \int_0^t R_{1m}^{(r)}(\tau) \sin \omega_r (t - \tau)\, d\tau \tag{15}$$

Учитывая соотношения (5), получаем

$$C_{1m}(t) = \sum_{r=1}^{l} C_m^{(r)}(t), \qquad C_{km}(t) = \sum_{r=1}^{l} p_k^{(r)} C_m^{(r)}(t), \qquad (k = 2, 3, \ldots, n) \tag{16}$$

Из формул (6), (8) и (16) непосредственно следует, что решение системы (1) будет иметь вид

$$\begin{gathered} x_1(t) = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t) + \ldots + x^{(l)}(t) \\ x_k(t) = p_k^{(1)} x^{(1)}(t) + p_k^{(2)} x^{(2)}(t) + \ldots + p_k^{(l)} x^{(l)}(t) \qquad (k = 2, 3, \ldots n) \end{gathered} \tag{17}$$

что доказывает высказанное выше утверждение. Величины $x^{(r)}(t)$ определяются формулой

$$\begin{aligned} x^{(r)}(t) = (A_r + \beta_r) \cos \omega_r t + \frac{B_r + \gamma_r}{\omega_r} \sin \omega_r t + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \Big[C_m^{(r)}(t) + \frac{\partial C_m^{(r)}}{\partial A_1} \beta_1 + \cdots + \frac{\partial C_m^{(r)}}{\partial B_1} \gamma_1 + \cdots\Big] \mu^m \qquad (r = 1, \ldots, l) \end{aligned} \tag{18}$$

Заметим, что в выражение для $x^{(l)}(t)$ не будет входить член с $\sin \omega_l t$.

В частном случае, когда данная частота, например ω_1, не имеет соизмеримых среди других частот, получим

$$x_k(t) = p_k^{(1)} x^{(1)}(t) \qquad (k = 2, 3, \ldots, n) \tag{19}$$

Формулируем полученный результат.

Если порождающее решение квазилинейной автономной системы (1) содержит l различных соизмеримых частот, которые определяют периодическое решение с некоторым периодом T_0, то соответствующее периодическое решение нелинейной системы с периодом $T = T_0 + \alpha$ (α исчезает при $\mu = 0$), обращающееся в порождающее при $\mu = 0$, будет иметь вид (17), аналогичный виду решения порождающей линейной системы.

Поступила 10 V 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Проскуряков А. П. Построение периодических решений автономных систем с одной степенью свободы в случае произвольных вещественных корней уравнения основных амплитуд. ПММ, т. XXII, 1958, вып. 4.
2. Проскуряков А. П. Колебания квазилинейных неавтономных систем с одной степенью свободы вблизи резонанса. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
3. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.