НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ МЕНЯЮЩЕЙСЯ ТОЧКИ

Р. А. Вуйичич

(Белград)

Показывается существование интеграла энергии движения динамически меняющегося объекта (объекта «переменной массы») тогда, когда абсолютная скорость частиц коллинеарна и равна половине скорости точки. При этом условии интегральные кривые уравнений движения динамически меняющейся точки совпадают с геодезическими в конформном пространстве Римана.

1. Рассмотрим движение динамически меняющейся точки в пространстве Римана с метрикой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \qquad (\text{обычно } \alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3) \tag{1}$$

Линейным преобразованием

$$y^i = y^i\,(x', \ldots, x^n)$$

или прямо из динамической формы [1]

$$\Phi = mg_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta dx^\alpha - \left\{m\dot{x}_\alpha\dot{x}^\alpha - T - \int_1^2 (X_\alpha + X_{(r)\alpha})\,dx^\alpha\right\} dt$$

первая система уравнений Пфаффа для координат x^α дает ковариантные

$$\frac{\delta\dot{x}_\alpha}{\delta t} = \ddot{x}_\alpha + \Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = Q_\alpha + P_\alpha \tag{2}$$

и контравариантные

$$\frac{\delta\dot{x}^\alpha}{\delta t} = \ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = Q^\alpha + P^\alpha \tag{3}$$

уравнения движения динамически меняющейся точки. Здесь $\Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma}$ и $\Gamma_{\cdot\beta\gamma}$ — символы Христоффеля первого и второго ряда, а через

$$Q_\alpha = \frac{1}{m}X_\alpha, \qquad P_\alpha = \frac{1}{m}X_{(r)\alpha} = \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}(u_\alpha - \dot{x}_\alpha)$$

обозначены ковариантные координаты активных и реактивных сил.

2. Если точка движется в поле консервативных сил при $\mathbf{u} = {}^1/_2\mathbf{v}$, уравнения (2) и (3) имеют вид

$$\frac{\delta\dot{x}_\alpha}{\delta t} = \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2m}\frac{dm}{dt}\dot{x}^\alpha \tag{4}$$

$$\frac{d\dot{x}^\alpha}{dt} + \underset{(g)}{\Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma}}\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt} = \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x^k}g^{\alpha k} - \frac{1}{2m}\frac{dm}{dt}\dot{x}^\alpha \tag{5}$$

Полная производная кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta \tag{6}$$

равняется

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dm}{dt}g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + m\frac{\delta\dot{x}_\alpha}{\delta t}\dot{x}^\alpha$$

или в силу (4)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\alpha$$

Отсюда получим интеграл энергии

$$T - U = T + V = h = \text{const} \tag{7}$$

Это выполняется и для соответствующей динамически меняющейся системы.

3. В пространстве V_n^0 с метрикой

$$d\sigma^2 = 2(h - V)\, ds^2 = a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{8}$$

конформному пространству V_n метрики (1), рассматриваемое движение происходит по геодезическим линиям. Чтобы показать это, преобразуем (5) из V_n в $V_n{}^\circ$. Для этого достаточно преобразовать

$$\underset{(g)}{\Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma}} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\beta g_{\lambda\gamma} + \partial_\gamma g_{\lambda\beta} - \partial_\lambda g_{\beta\gamma}) \tag{9}$$

где $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$ — частная производная.

Из (7) и (1) можем получить

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= 2(h - V)\, g_{\alpha\beta}, & g_{\alpha\beta} &= \frac{a_{\alpha\beta}}{2(h - V)} \\ a^{\alpha\beta} &= \frac{g^{\alpha\beta}}{2(h - V)}, & g^{\alpha\beta} &= 2(h - V)\, a^{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{10}$$

В силу этого (9) преобразуем в

$$\underset{(g)}{\Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma}} = \underset{(a)}{\Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma}} + \frac{1}{2(h - V)} (\delta_\gamma{}^\alpha \partial_\beta V + \delta_\beta{}^\alpha \partial_\gamma V - \partial_\lambda V a_{\beta\gamma} a^{\alpha\lambda})$$

Подставляя это в (5), в силу (1), (8) и (10) получим

$$\frac{d\dot{x}^\alpha}{dt} + \underset{(a)}{\Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma}} \frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt} = -\frac{1}{h - V}\dot{x}^\alpha \frac{dV}{dt}\frac{dx^\alpha}{dt} - \frac{1}{2m}\frac{dm}{dt}\frac{dx^\alpha}{dt} \tag{11}$$

искомые уравнения движения точки в $V_n{}^\circ$.

С другой стороны, уравнения геодезических в $V_n{}^\circ$ суть

$$\frac{d\dot{x}^\alpha}{dt} + \underset{(a)}{\Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma}} \frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt} = \frac{\ddot{\sigma}}{\dot{\sigma}}\frac{dx^\alpha}{dt} \qquad \left(\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}\right)$$

Правая часть этих уравнений в силу (8), (6) и (7) равняется

$$\frac{\ddot{\sigma}}{\dot{\sigma}}\frac{dx^\alpha}{dt} = -\frac{1}{h - V}\frac{dV}{dt}\frac{dx^\alpha}{dt} - \frac{1}{2m}\frac{dm}{dt}\frac{dx^\alpha}{dt} \tag{12}$$

Откуда в смысле (11) приходим к решению: динамически меняющаяся точка в поле консервативных сил движется по геодезическим

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}\frac{dx^\gamma}{d\sigma} = 0 \tag{13}$$

если скорость частиц коллинеарна и равна половине скорости точки.

4. В этом случае одновременно показано выполнение принципа Мопертюи — Лагранжа.

Поступила 23 IV 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Б и л и м о в и ћ Б. А. О једном општем диференцијалном принципу, Београд, 1959.