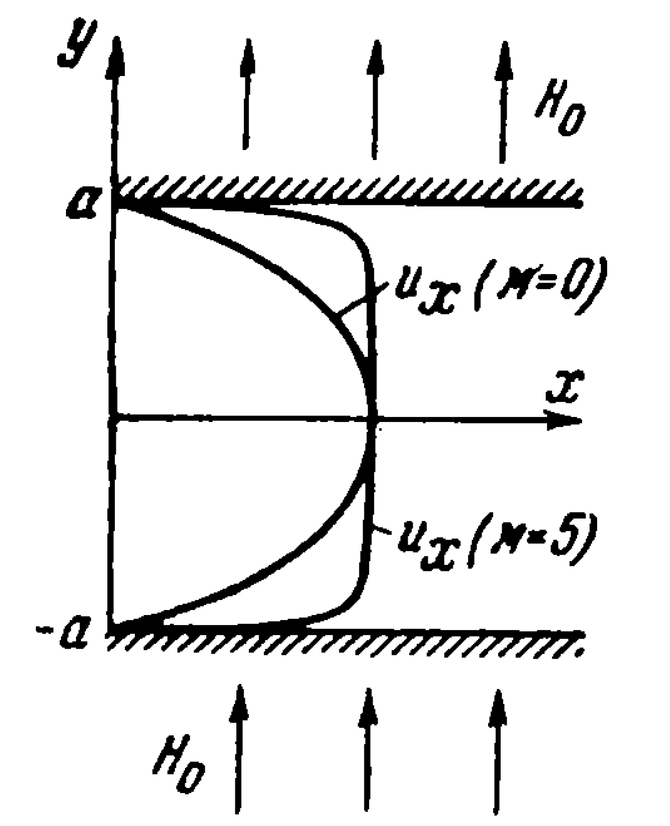
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ В ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

К. Б. Павлов, Ю. А. Тарасов

(Москва)

Устойчивость течения проводящей жидкости между параллельными плоскостями в магнитном поле по отношению к бесконечно-малым возмущениям исследовалась в ряде работ; в частности, в случае продольного поля кривые устойчивости получены [1,2,3] для разных значений магнитного числа Рейнольдса R_m. В этих работах задача сводится к определению собственных значений из решений одного дифференциального уравнения типа Орра — Зоммерфельда четвертого или шестого порядка и соответствующих граничных условий.



Если магнитное поле перпендикулярно течению (фиг. 1), то стационарное распределение скорости $\mathbf{U}$ (u_x, 0, 0) и магнитного поля $\mathbf{H}$ (H_x, H_y, 0) между плоскостями будет следующим [4]:

$$u_x = wU_0 = U_0 \frac{\operatorname{ch} M - y \operatorname{ch} M}{\operatorname{ch} M - 1} \qquad (M = A (R_m R_g)^{1/2})$$

$$H_x = h \frac{H_0 R_m}{M} = \frac{H_0 R_m}{M} \frac{\operatorname{sh} My - y \operatorname{sh} M}{\operatorname{ch} M - 1} \qquad \left(A = \frac{H}{U_0 (4\pi\rho)^{1/2}}\right)$$

$$H_y = H_0 = \text{const}$$

Здесь H_0 — однородное внешнее поле, U_0 — скорость в центре потока, M — число Гартмана, R_p — обычное число Рейнольдса, ρ — плотность.

Параболическое распределение скоростей при $H_0 = M = 0$ по мере увеличения поля деформируется таким образом, что при больших M все изменение профиля происходит в узком пристеночном слое $\sim a / M$. Исследование устойчивости такого течения по отношению к бесконечно-малым возмущениям было проведено в работе [5], при условии, что $R_m \ll 1$. Целью настоящей работы является аналогичная задача для значений $R_m \sim 1$, которые включают область больших скоростей и температур порядка 5000—10 000°.

Если считать возмущения основного течения (1) малыми, а затем систему уравнений магнитной гидродинамики линеаризовать обычным образом, то для y — компонент малых возмущений скорости v_y и магнитного поля h_y можно найти систему двух дифференциальных уравнений, которые удобно представить в безразмерной форме

$$\frac{R_m}{M} h\Psi - i \frac{\Psi'}{\alpha} = (w - c)\Phi + \frac{i}{\alpha R_m} (\Phi'' - \alpha_1^2 \Phi)$$

$$(w - c)(\Psi'' - \alpha_1^2 \Psi) - w''\Psi + \frac{i}{\alpha R_g} (\Psi'''' - 2\alpha_1^2 \Psi'' + \alpha_1^4 \Psi) =$$

$$= \frac{M^2}{R_g R_m} \left\{ \frac{R_m}{M} h (\Phi'' - \alpha_1^2 \Phi) - \frac{i}{\alpha} (\Phi''' - \alpha_1^2 \Phi') - \frac{R_m}{M} h'' \Phi \right\} \tag{2}$$

Здесь

$$h_y = H_0 \Phi(y) \exp \{i [k_x (x - Ct) + k_z z]\}, \qquad \left(c = \frac{C}{U_0}\right)$$
$$v_y = U_0 \Psi(y) \exp \{i [k_x (x - Ct) + k_z z]\},$$

k_x, k_z — волновые числа, C — скорость распространения возмущений; штрихами обозначается производная по $Y = y / a$ ($2a$ — расстояние между плоскостями), $\alpha = k_x a$, $\alpha_1^2 = a (k_x^2 + k_z^2)$. Граничные условия для системы (2) имеют вид:

$$\Phi(Y) = \Psi(Y) = \Psi'(Y) = 0 \qquad \text{при } Y = \pm 1 \tag{3}$$

Если предположить, что $R_m \ll 1$, то система (2) может быть сведена к уравнению Орра-Зоммерфельда для Ψ

$$(w - c)(\Psi'' - \alpha_1^2 \Psi) - w''\Psi + \frac{i}{\alpha R_g} (\Psi'''' - 2\alpha_1^2 \Psi'' + \alpha_1^4 \Psi) = \tag{4}$$

что позволяет решить соответствующую задачу об устойчивости по известной схеме Линя [6] с более сложным профилем w; в то же время для значений $R_m \lesssim 1$ сведение к одному уравнению невозможно и необходимо исследовать непосредственно систему (2). В этой связи ниже будут использованы обычные асимптотические методы [6], что позволит распространить результаты, полученные в работе [5], на значительно больший интервал значений R_m.

Известно, что магнитное поле является стабилизирующим фактором, т. е. неустойчивость наступает при больших значениях Rg в присутствии поля, чем в его отсутствие [1—3, 5]. Поэтому естественно искать решения (2) в виде разложений по степеням $1 / \alpha R_g$

$$\Psi,\ \Phi = \Psi^{(0)},\qquad \Phi^{(0)} + \frac{1}{\alpha R_g}\Psi^{(1)},\qquad \Phi^{(1)} + \ldots \tag{5}$$

Подставляя (5) в (2), имеем:

$$(w-c)(\Psi^{(0)} - \alpha_1^2\Psi) - w''\Psi^{(0)} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{R_m}{M} h\Psi^{(0)} - i\frac{\Psi^{(0)\prime}}{\alpha} = (w-c)\Phi^{(0)} + \frac{i}{\alpha R_m}(\Phi^{(0)\prime\prime} - \alpha_1^2\Phi^{(0)}) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}(w-c)(\Psi^{(1)\prime\prime} - \alpha_1\Psi^{(1)}) - w''\Psi^{(1)} + i(\Psi^{(0)\prime\prime\prime\prime} - 2\alpha_1^2\Psi^{(0)\prime\prime} + \alpha_1^4\Psi^{(0)}) = \\ = \alpha Mh(\Phi^{(0)\prime\prime} - \alpha_1^2\Phi^{(0)}) - \frac{iM^2}{R_m}(\Phi^{(0)\prime\prime} - \alpha_1^2\Phi^{(0)\prime}) - \alpha Mh'\Phi^{(0)}\end{aligned} \tag{8}$$

. . . .

Решения $\Psi_{1,2} = \Phi_{1,2}^{(0)}$, которые могут быть получены из (6), имеют смысл «невязких» решений [6]. Другая пара «невязких» решений $\Phi_{1,2} = \Phi_{1,2}^{(0)}$ находится из (7).

Рассматривая уравнения (7), (8), можно заметить, что для значений $R_m \lll 1$ в разложении (5) для Ψ можно ограничиться нулевым приближением; но по мере возрастания R_m следующее приближение, вообще говоря, может оказаться сравнимым с ним, так что пренебрежение им лишено смысла. Находя выражения $\Phi^{(0)}$ и $\Psi^{(1)}$ из (7) и (8), можно определить верхний предел значений R_m, при котором с достаточной точностью еще можно ограничиться нулевым приближением; однако, это проще сделать с помощью решений системы (2) вблизи критической точки $Y = Y_c$ (в которой $w = c$), используя то, что с этими решениями должны соответственно отождествляться обе пары «невязких» и определяемой ниже пары «вязких» решений [6].

Здесь предполагаются течения при значениях $M \sim 1 \div 4$ (для больших значении M было бы необходимо использовать аппроксимации, введенные в работе [5]). Влияние параметра M на быстроту сходимости разложений (5) несущественно; к тому же малое увеличение M влечет за собой значительное увеличение критического числа R_g, при достижении которого течение становится неустойчивым.

Другие решения системы (2) ищем в виде

$$\begin{gathered}\Psi = \exp\int g\,dY,\qquad \Phi = \exp\int \xi\,dY \\ g,\quad \xi = (\alpha R_g)^{1/2}g_0,\quad \xi_0 + g_1,\quad \xi_1 + (\alpha R_g)^{-1/2}g_2,\quad \xi_2 + \ldots\end{gathered} \tag{9}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях αRg, находим:

$$g_0 = \pm\sqrt{i(w-c)},\qquad g_1 = -\frac{5}{2}\frac{g_0'}{g_0}$$

Алгоритм для нахождения $\xi_0, \xi_1, \ldots$ и $g_2, g_3, \ldots$ отсутствует, так как в каждом соответствующем уравнении имеются одновременно два неизвестных. Если пренебрежение последующими приближениями законно (к этому мы вернемся ниже), то имеются два решения:

$$\Psi_{3,4} = (w-c)^{-\frac{5}{4}} \exp \mp \int_{Y_c}^{Y} [i\alpha R_g (w-c)]^{1/2} dY] \tag{10}$$

имеющих смысл «вязких» решений [6] системы (2).

Асимптотические выражения (10) плохи вблизи критической точки Y_c. Чтобы найти решения вблизи нее, введем новую переменную $\eta = (Y - Y_c) / \varepsilon$, $\varepsilon = (\alpha R_g)^{-1/3}$. Подставляя в уравнения (2)

$$\Psi; \quad \Phi(Y) = \chi, \qquad \varkappa(\eta) = \chi^{(0)}, \qquad \varkappa + \varepsilon\chi^{(1)}, \qquad \varkappa^{(1)} + \ldots$$

$$w - c = w_c'\varepsilon\eta + w_c''\frac{(\varepsilon\eta)^2}{2!} + \ldots, \qquad w'' = w_c'' + w_c'''\varepsilon\eta + \ldots, \qquad (w_c = w(Y_c) \tag{11}$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, имеем:

$$i\chi^{(0)''''} + w_c'\eta\chi^{(0)''} = 0, \qquad i\chi^{(1)''''} + w_c'\eta\chi^{(1)''} = w_c''\chi^{(0)} - \frac{1}{2}w_c''\chi^{(0)}\eta^2 \tag{12}$$

$$\varkappa^{(0)''} = 0, \qquad \varkappa^{(1)''} = -R_m\chi^{(0)'}, \ldots \tag{13}$$

Уравнения (12), (13) дают четыре решения $\chi = \chi_{1,2,3,4}$ и два решения $\varkappa = \varkappa_1$, При выполнении условия

$$R_m^4 \leqslant R_g \tag{14}$$

для решений $\chi = \chi_{1,2,3,4}$ с достаточной точностью можно ограничиться первыми двумя приближениями в (11), так как параметр R_m не может сделать при этом последующие приближения сравнимыми с ними. Используя асимптотические разложения функций Ханкеля, через которые выражаются решения $\chi^{(0)}$ и $\chi^{(1)}$, можно показать, что решения $\chi = \chi_{1,2}$ сравнимы с решениями Ψ_1, Ψ_2, находимыми по методу Фробениуса из (6); решения $\chi = \chi_{3,4}$ — с Ψ_3, Ψ_4, даваемыми (10); решения $\varkappa = \varkappa_{1,2}$ отождествляются с второй парой невязких решений Φ_1, Φ_2 (в этой связи полезно обратить внимание на аналогичные результаты, имеющие место в случае продольного поля в [2, 3]). После этого можно заключить, что приближения в решениях Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, Ψ_4 выбраны правильно, если только выполнено условие (14).

Если применить описанные выше асимптотические методы к отыскиванию решений уравнения (4), то можно убедиться, что соответствующие ему невязкое уравнение, а также вязкие решения и решения вблизи критической точки совпадают с решениями $\Psi_{1,2,3,4}$ $(\chi_{1,2,3,4})$ системы (2) с точностью, допустимой при решении этого класса задач. Поэтому, если выполнено условие (14), вместо системы (2) можно рассматривать уравнение (4), что соответствует тому, что влияние на устойчивость течения магнитного поля, главным образом, происходит благодаря изменению профиля основного течения. Так как уравнение (4) используется для исследования устойчивости течений сред с $R_m \ll 1$, то известные для этого случая результаты [5] можно экстраполировать для больших значений R_m вплоть до значений $R_m \sim 1$, когда условие (14) еще надежно выполняется. В заключение авторы выражают благодарность К. П. Станюковичу за обсуждение результатов.

Поступила 16 III 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Stuart L. T. On the stability of viscous flow between paralled planes in the presence of a coplanar magnetic field. Proc. Roy. Soc., 1954, A221, No. 1145, 189.
2. Тарасов Ю. А. Устойчивость плоского пуазейлева течения плазмы с конечной проводимостью в магнитном поле. ЖЭТФ, 1959, 37, вып. 6 (12), 1708.
3. Велихов Е. П. Устойчивость плоского пуазейлева течения идеально проводящей жидкости в продольном магнитном поле. ЖЭТФ, 1959, 36, вып. 4, 1192.
4. Ландау Л., Лифшиц Е. Электродинамика сплошных сред, § 51, Гостехтеориздат, 1957.
5. Lock R. C. The stability of the flow of an electrically conducting fluid between paralled planes under a transverse magnetic field. Proc. Roy. Soc., 1955, A 233, No 1192, 105.
6. Line C. C. On the stability of two-dimensional parallel flows. Quart. Appl. Math. 3, 1945, 1946, NN 2, 3, 4, 117—142, 218—234, 277—301.