

К ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ УДАРНЫХ ВОЛН

К. А. Бежанов

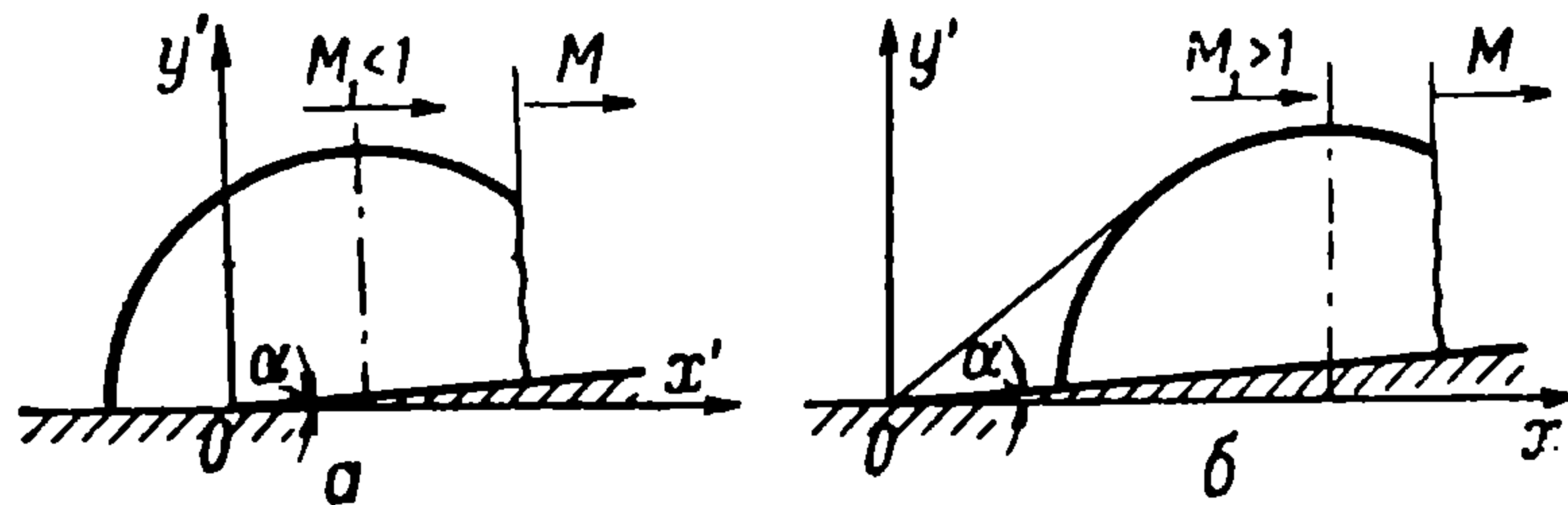
(Москва)

В работе исследуется дифракция ударных волн около прямолинейной стенки, составляющей малый угол с направлением движения фронта ударной волны. Этот вопрос был рассмотрен в статьях [1,2,3,4].

В работе [1] эта задача сводится к краевой задаче Римана -- Гильберта и решается методом подбора. Ниже дается другое решение, при этом устанавливается, что оно неединственно, так как решение задачи с разрывными коэффициентами зависит от специальных ограничений, накладываемых на решение в точках разрыва коэффициентов краевых условий [5,6]. Выбор определенного класса решения не вытекает

из уравнений и граничных условий и требует дополнительного исследования.

Метод решения краевой задачи, применяемый ниже, позволяет решать задачу при более общих физических предположениях. Например, можно найти решение в газе, когда стенка приходит в движение



Фиг. 1

под действием падающей ударной волны и при наличии впереди нестационарных возмущений, вызываемых движением стенки.

1. Постановка задачи. Пусть при $t < 0$ фронт плоской ударной волны движется по гладкой стенке со скоростью V_0 и в момент времени $t = 0$ встречает малый прямолинейный излом стенки угла $\pm \alpha$. Среда впереди ударной волны покоится и имеет плотность ρ_0 , давление p_0 и скорость звука a_0 .

Поступательный поток за ударной волной возмущен и течение в возмущенной области, ограниченной ударной волной, отраженной волной Маха и поверхностью стенки, будет в общем случае завихренным.

За ударной волной вне области возмущенного течения параметры потока постоянны и определяются из соотношений на прямом скачке уплотнения. Обозначим скорость звука, скорость потока, плотность и давление за ударной волной соответственно через a , V_1 , R , P . В зависимости от интенсивности ударной волны поток за ней может быть дозвуковым или сверхзвуковым и картина течения соответственно имеет вид, представленный на фиг. 1, а и б.

Выпишем возмущенные параметры в системе координат, движущейся со скоростью потока за ударной волной

$$\begin{aligned} u &= u_1(x', y', t) + \dots, & v &= v_1(x', y', t) + \dots \\ \rho &= R + \rho_1(x', y', t) + \dots, & p &= P + p_1(x', y', t) + \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

Кроме того, вследствие отсутствия линейных размеров в условиях задачи, параметры потока будут однородными функциями своих аргументов нулевой степени. Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} u_1(x', y', t) &= V_1 \bar{u}_1(x, y), & \rho_1(x', y', t) &= a V_1 R \bar{\rho}_1(x, y) \\ v_1(x', y', t) &= V_1 \bar{v}_1(x, y), & p_1(x', y', t) &= R \bar{p}_1(x, y) \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} x = \frac{x'}{at} \\ y = \frac{y'}{at} \end{array} \right) \quad (1.2)$$

Для упрощения черту у безразмерных величин в дальнейшем опускаем. Подставим выражения (1.1) в основную систему уравнений, определяющих двумерный неустановившийся поток идеального газа, и в граничные условия на стенке и ударной волне. Уравнения для возмущений имеют вид

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = x \frac{\partial p}{\partial x} + y \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1.3)$$

На стенке

$$v = \pm \alpha \quad \text{при } y = 0 \quad (1.4)$$

Если уравнение возмущенного фронта ударной волны представить в виде

$$x = k + \psi(y) + \dots \left(k = \frac{V_0 - V_1}{a} < 1 \right) \quad (1.5)$$

то соотношения на ударной волне примут вид при $x = k$

$$\begin{aligned} M_1(k + M_1)u - k(k + M_1)\rho &= M_1(\psi - y\psi_y), & 2kM_1u - M_1\rho - k^2\rho &= 0 \\ v = -\psi_y, & \frac{\gamma}{\gamma-1}M_1\rho - \frac{1}{\gamma-1}\rho - kM_1u &= (\psi - y\psi_y), & \left(M_1 = \frac{V_1}{a}, \gamma = 1.4 \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

На отраженной волне Маха возмущения будут полностью отсутствовать при дозвуковой скорости потока за ударной волной. В случае сверхзвуковой скорости к части дуги окружности Маха будет примыкать область известного течения разряжения Прандтля — Майера или сжатия Аккерета.

2. Формулировка краевой задачи для функции p . Исключение u и v из системы (1.3) дает

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + (1-y^2)\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - 2\left(x\frac{\partial p}{\partial x} + y\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0 \quad (2.1)$$

Соотношения (1.6) на ударной волне можно сформулировать для одной только функции p , используя уравнения (1.3)

$$\left(\frac{2k^2M^2 + M^2 + 1}{2k(1-k^2)M^2}y - \frac{1}{2ky} \right) \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = k \quad \left(M = \frac{V_0}{a_0} \right) \quad (2.2)$$

На стенке

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (2.3)$$

Кроме того, в точке излома стенки 0 (фиг. 1, а) должно выполняться следующее условие для дозвукового случая [1]:

$$\lim_{\Delta x} \int \frac{\partial p}{\partial y} dx = \mp \alpha M_1 \quad \text{при } \Delta x \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

На отраженной волне Маха можно написать условие

$$\frac{\partial p}{\partial s} = 0 \quad (2.5)$$

где s — направление касательной к дуге окружности Маха.

В сверхзвуковом случае (фиг. 1, б) в точке пересечения волны сжатия или разряжения, исходящей из точки излома стенки, с отраженной волной Маха имеет место условие

$$\lim_{\Delta s} \int \frac{\partial p}{\partial s} ds = \frac{\alpha M_1}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \quad \text{при } \Delta s \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

Задача заключается в определении функции p , удовлетворяющей уравнению (2.1) и всем написанным дифференциальным и интегральным условиям.

3. Переход к краевой задаче теории аналитических функций. Уравнение (2.1) преобразованием

$$r = \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x} \quad (3.1)$$

можно свести к уравнению Лапласа в полярных координатах.

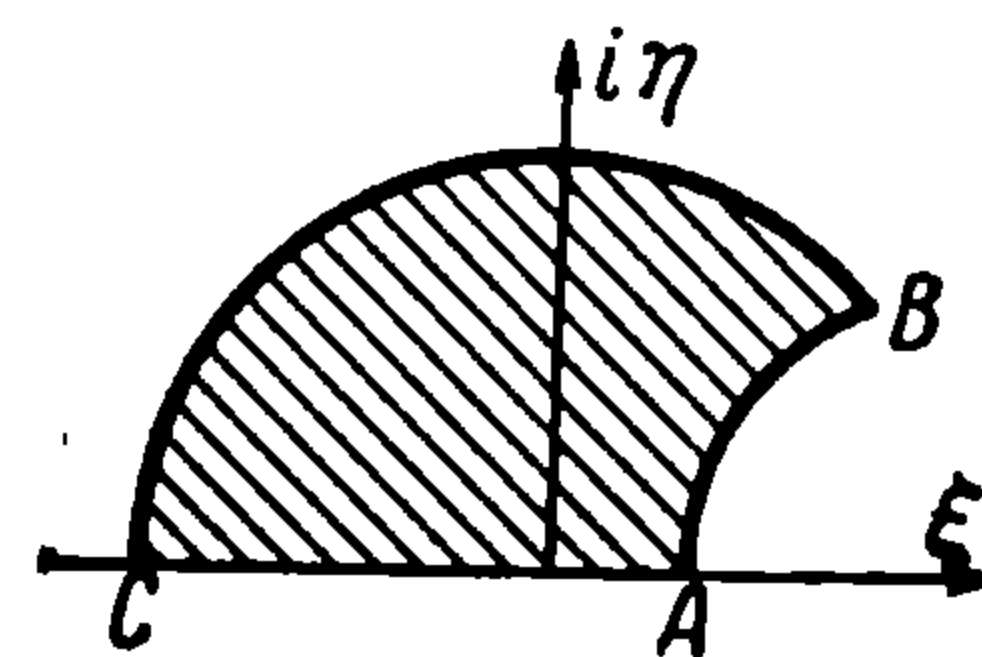
Примем первоначальную физическую плоскость за плоскость комплексного переменного $z = r \exp(i\theta)$. Тогда область возмущенного течения в плоскости $\zeta = \varepsilon \exp(i\theta)$ имеет вид, изображенный на фиг. 2. Преобразуем (2.2) для нормальной и касательной составляющих давления на дуге AB , соответствующей ударной волне

$$\left(\frac{M^2 + 1}{2M^2} \operatorname{tg} \theta - \frac{3(M^2 - 1)}{M^2 + 5} \operatorname{ctg} \theta \right) \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\sqrt{\cos^2 \theta - k^2}}{\cos \theta} \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (3.2)$$

Здесь n — внешняя нормаль, s — касательная в положительном направлении.

Отобразим область, заключенную в криволинейном треугольнике плоскости ζ , на верхнюю полуплоскость плоскости z_1 следующими конформными преобразованиями:

$$\zeta_1 = \zeta_B \left(i - \frac{2k_1}{\zeta - \zeta_B} \right), \quad z_1 = \frac{1}{2} (\zeta_1^2 + \zeta_1^{-2}) \quad (3.3)$$



Фиг. 2

Здесь $k_1 = \sqrt{1 - k^2}$. Условие (3.2) на ударной волне, которое должно выполняться на отрезке действительной оси $1 < x_1 < \infty$, перейдет в следующее:

$$\sqrt{x_1 - 1} \frac{\partial p}{\partial y_1} + (Ax_1 - B) \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \quad \left(A = \frac{1}{2\sqrt{2}kM^2}, B = \frac{2M^2 + 1}{2\sqrt{2}kM^2} \right) \quad (3.4)$$

Граничные условия на остальной части действительной оси будут:

в дозвуковом случае

$$\frac{\partial p}{\partial y_1} = \frac{\mp \alpha M_1}{\sqrt{1 - M_1^2}} \delta(x_1 + x_0) \quad \text{при } -1 < x_1 < 1 \text{ (на стенке)} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \quad \text{при } -\infty < x_1 < -1 \text{ (на отраженной волне Маха)} \quad (3.6)$$

в сверхзвуковом случае

$$\frac{\partial p}{\partial y_1} = 0 \quad \text{при } -1 < x_1 < 1 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\pm \alpha M_1}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \delta(x_1 + x_0) \quad \text{при } -\infty < x_1 < -1 \quad (3.8)$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция.

4. Решение краевой задачи с разрывными коэффициентами. Введем функцию

$$P^+(z_1) = \frac{\partial p}{\partial y_1} + i \frac{\partial p}{\partial x_1}$$

аналитическую в верхней полуплоскости и удовлетворяющую на действительной оси условию

$$a(x_1) \frac{\partial p}{\partial y_1} + b(x_1) \frac{\partial p}{\partial x_1} = c(x_1) \quad (4.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a &= 0, & b &= 1 & \text{при } -\infty < x_1 < -1 \\ a &= 1, & b &= 0 & \text{при } -1 < x_1 < 1 \\ a(x_1) &= \sqrt{x_1 - 1}, & b(x_1) &= Ax_1 - B & \text{при } 1 < x_1 < \infty \\ c(x_1) &= h\delta(x_1 + x_0) & & \text{при } M_1 < 1 & \left(h = \frac{\mp \alpha M_1}{\sqrt{1 - M_1^2}} \right) \\ c(x_1) &= -ih\delta(x_1 + x_0) & & \text{при } M_1 > 1 \end{aligned}$$

Сформулированная выше краевая задача является задачей Римана — Гильберта с разрывными коэффициентами. Она имеет неединственное решение и зависит от того, какими разрывами решения распорядиться в точках разрыва коэффициентов краевых условий. Решение задачи нужно искать в классе функций, ограниченных или имеющих интегрируемый разрыв в точках $x_1 = \pm 1$.

В выбранном классе существует четыре линейно-независимых решения, так как в двух точках разрыва коэффициентов краевой задачи решение может быть:

1°. Ограниченным в обеих точках,

2°. Интегрируемым в обеих точках, т. е. в этих точках должен существовать интеграл

$$\int P^+(z_1) dz_1 \quad (4.2)$$

3°. Ограниченным в одной точке, в другой существует интеграл (4.2), и наоборот.

Неединственность решения краевой задачи выразится в том факте, что краевую задачу с разрывными коэффициентами можно свести к краевой задаче с непрерывными коэффициентами, для которой существует единственное решение, следующей заменой неизвестной функции

$$P^+(z_1) = \omega(z_1) P_1^+(z_1) \quad (4.3)$$

где $\omega(z_1)$ может быть любой из четырех функций

$$\begin{aligned} \omega^{(1)}(z_1) &= \sqrt{z_1^2 - 1}, & \omega^{(2)}(z_1) &= \frac{1}{\sqrt{z_1^2 - 1}} \\ \omega^{(3)}(z_1) &= \sqrt{\frac{z_1 + 1}{z_1 - 1}}, & \omega^{(4)}(z_1) &= \sqrt{\frac{z_1 - 1}{z_1 + 1}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Подставляя (4.3) в условие (4.1), можно получить следующую краевую задачу с непрерывными коэффициентами

$$a_1(x_1) \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + b_1(x_1) \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = c_1(x_1) \quad (4.5)$$

Здесь

$$a_1 = 0 \quad \text{при } -\infty < x_1 < 1, \quad a_1(x_1) = \sqrt{x_1 - 1} \quad \text{при } 1 < x_1 < \infty$$

$$b_1(x_1) = Ax_1 - B, \quad c(x_1) = -\frac{h(Ax_1 - B)}{\omega(x_1)} \delta(x_1 + x_0) \quad \text{при } -\infty < x_1 < \infty$$

Задачу Римана — Гильберта для круга и полуплоскости можно свести к задаче Римана, если искомую аналитическую функцию соответствующим образом дополнить до кусочноаналитической, заданной уже на всей плоскости комплексного переменного [5,6]. Соответствующая задача Римана имеет вид

$$P_1^+(x_1) = G(x_1) P_1^-(x_1) + g(x_1) \quad (4.6)$$

Здесь

$$G(x_1) = -\frac{a+ib}{a-ib} = \begin{cases} 1 & \text{при } -\infty < x_1 < 1 \\ \frac{Ax_1 - B - i\sqrt{x_1 - 1}}{Ax_1 - B + i\sqrt{x_1 - 1}} & \text{при } 1 < x_1 < \infty \end{cases}$$

$$g(x_1) = \frac{2c_1}{a_1 - ib_1} = \frac{2h}{\omega(x_1)} \delta(x + x_0) \quad \text{при } -\infty < x_1 < \infty$$

Решением задачи будет функция $P_1^+(z)$, удовлетворяющая дополнительному условию

$$P_1^+(z_1) = \overline{P_1^-(\bar{z}_1)} \quad (4.7)$$

Функцию $G(x_1)$ на всей действительной оси можно представить в виде

$$G(x_1) = \frac{\Phi^+(x_1)}{\Phi^-(x_1)} = \frac{Ax_1 - B - i\sqrt{x_1 - 1}}{Ax_1 - B + i\sqrt{x_1 - 1}} \quad (4.8)$$

При этом в числителе и знаменателе следует брать разные ветви многозначной функции $\sqrt{x_1 - 1}$ при проходе сквозь точку ветвления $x_1 = 1$, функция $\sqrt{x_1 - 1}$ в знаменателе приобретает множитель $+i$, а в числителе $-i$. Это следует также из факта, что $G(x_1)$ можно представить в виде отношения функций $\Phi^+(x_1)$ и $\Phi^-(x_1)$, являющихся краевыми значениями аналитических функций, определенных соответственно в верхней и нижней полуплоскостях. Функция $G(x_1)$ не будет иметь нулей и полюсов на всей действительной оси. Тогда

$$\Phi^+(z_1) = \frac{1}{Az_1 - B + i\sqrt{z_1 - 1}}, \quad \Phi^-(z_1) = \frac{1}{Az_1 - B - i\sqrt{z_1 - 1}} \quad (4.9)$$

Записав краевое условие (4.6) в виде

$$\frac{P_1^+(x_1)}{\Phi^+(x_1)} = \frac{P_1^-(x_1)}{\Phi^-(x_1)} + \frac{g(x_1)}{\Phi^+(x_1)}$$

получим

$$P_1^+(z_1) = \Phi^+(z_1) [\Psi^+(z_1) + Q_m(z_1)], \quad P_1^-(z_1) = \Phi^-(z_1) [\Psi^-(z_1) + Q_m(z_1)] \quad (4.10)$$

где

$$\Psi(z_1) = \frac{h}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\tau + \tau_0)}{\omega(\tau) \Phi^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z_1} = \frac{h}{\pi i} \frac{1}{\omega(x_0) \Phi^+(x_0) (x_0 - z_1)} \quad (4.11)$$

Здесь $Q_m(z)$ — многочлен степени m с произвольными комплексными коэффициентами. Выбор целого числа m зависит от выбора функции $\omega(z_1)$ и от поведения решения на бесконечности. Тогда общее решение краевой задачи (4.1) примет вид

$$P^+(z_1) = \omega(z_1) \Phi^+(z_1) [\Psi^+(z_1) + Q_m(z_1)] \quad (4.12)$$

Для удовлетворения дополнительному условию (4.7) достаточно потребовать действительность коэффициентов у многочлена $Q_m(z_1)$. Кроме того, для всех функций $\omega(z_1)$ будем полагать $m = 0$, т. е. $Q_0(z_1) = c_0$, так как в противном случае $P^+(z_1)$ обратится в нуль в ряде точек верхней полуплоскости, что физически недопустимо. Постоянную C_0 нужно определить из интегрального условия

$$\int_0^{k_1} \frac{1}{y} \frac{\partial p}{\partial y} dy = \frac{\mp \alpha (M^2 + 5)}{3(M^2 - 1)} \quad (4.13)$$

которое легко получить из соотношений (1.6) на ударной волне.

Интересно отметить, что особенность давления в точке $x = x_0$ хотя и является дефектом линейной теории, но качественно правильно описывает картину течения. На фиг. 1 работы [4] приведен результат эксперимента, из которого видно, что в случае дозвукового течения за ударной волной добавок к статическому давлению на поверхности стенки в точке ее излома хотя и конечен, но по абсолютной величине превышает все остальные.

5. Распределение давления на поверхности тела и выбор решения. Чтобы выбрать нужное решение, исследуем распределения давления на поверхности стенки.

Предельное значение (4.12) на действительной оси получим из формулы Сохоцкого. Рассмотрим случай дозвуковой скорости за ударной волной, тогда при $-1 < x_1 < 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y_1} &= \frac{\mp \alpha M_1}{\sqrt{1 - M_1^2}} \delta(x_1 + x_0) \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} &= \frac{\omega(x_1)}{Ax_1 - B - \sqrt{1 - x_1^2}} \left[\frac{\pm \alpha M_1 (Ax_0 - B - \sqrt{1 - x_0^2})}{\sqrt{1 - M_1^2} \omega(x_0)} \frac{1}{x_0 - x_1} + C_0 \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

Выпишем производные давления по x для всех функций (4.4) в первоначальных автомодельных переменных

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} &= (k - x)^2 \sqrt{1 - x^2} \Phi_1(x), & \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \Phi_2(x) \\ \frac{\partial p^{(3)}}{\partial x} &= \sqrt{1 - x^2} \Phi_3(x), & \frac{\partial p^{(4)}}{\partial x} &= \frac{(k - x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} \Phi_4(x) \end{aligned}$$

где $\Phi_j(x)$ ($j = 1, \dots, 4$) — непрерывные функции, не обращающиеся в нуль и бесконечность на интервале $[-1; k]$, за исключением точки $x = -M_1$, где они обращаются в бесконечность первого порядка.

Выражение для функции $p(x)$ можно получить в элементарных функциях. Из всех четырех решений следует отдать предпочтение выражению для $p^{(2)}(x)$, соответствующего функции $\omega^{(2)}(z_1)$, которое совпадает с решением авторов работ [1, 2] и дает хорошее совпадение с экспериментом.

Распределение давления для функции $p^{(2)}(x)$ и сравнение с экспериментом приведено в работе [4].

Случай, соответствующий функциям $p^{(1)}(x)$ и $p^{(4)}(x)$, приводят к тому, что давление непосредственно за ударной волной в точке ее пересечения со стенкой постоянно, это противоречит физическому смыслу. Обращение в нуль $\partial p^{(1)}/\partial x$ и $\partial p^{(3)}/\partial x$ в точке $x = -1$ приводит к тому, что при $M_1 = 1$ возмущение давления в точке излома стенки при подходе справа равно нулю.

Автор признателен Ф. Д. Гахову и Н. Н. Моисееву за ценные советы.

Поступила 9 II 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. J. The diffraction of blast, Proc. Roy. Soc., 1949, A 198.
2. Chaster W. The diffraction and reflection of shock wave. Quarterly J. of Mech. and Math., 1954, No. 1.
3. Ting L., Ludloff H., Aerodynamic of blast, IAS, 1952, No. 5.
4. Fleeter C. H., Weimer D. K., Bleakney W. Pressure behind a shock wave diffracted through a small angle, Phys. Review, 1950, N. 5, Second Series.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. ГИФМЛ, 1958.
6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1946.