# ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И НЕЕДИНСТВЕННОСТИ ВИХРЕВЫХ ВОЛН ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТИПА

**Н. Н. Моисеев**

(Москва)

1. Определение установившихся гравитационных волн на поверхности завихренной жидкости сводится к следующей краевой задаче:

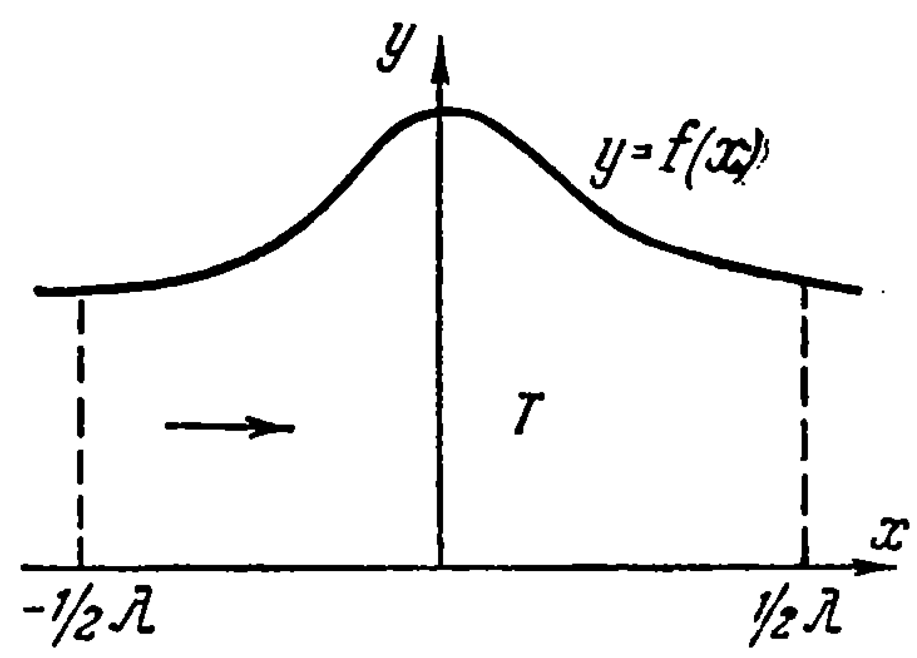
$$\Delta\psi = F(\psi) \quad \text{в области } T$$
$$\psi(x, 0) = 0, \qquad \psi(x, f) = 1$$
$$\psi_x^2 + \psi_y^2 + 2\nu f = 0 \quad \text{при } y = f \qquad \left(\nu = \frac{gh^3}{Q^2},\ h = \frac{Q}{c}\right) \tag{1}$$

Здесь $y = f(x)$ — уравнение неизвестной свободной границы (фигура), $\psi$ — функция тока, $h$ — «глубина» жидкости, $Q$ — расход, $c$ — скорость.

В соотношениях (1) все неизвестные предполагаются безразмерными,— в качестве характерных размеров приняты $h$ и $Q$.

Постановка и первые результаты задачи (1) принадлежат Дюбреи-Жакотен [1]. К настоящему времени наиболее общие результаты в этой области опубликованы Гуйоном [2, 3]. Его основные предположения следующие: $F(\psi)$ — непрерывная функция, а поток близок к равномерному потоку $\psi = y$.

2. Если в качестве независимых переменных выбрать $x$ и $\psi$, а в качестве искомых принять $u = \psi_y$ и $v = -\psi_x$, то задача сводится к следующей [2]:




$$uv_\psi - vu_\psi + u_x = 0, \qquad uu_\psi + vv_\psi - v_x = F(\psi)$$
$$v = 0 \quad \text{при } \psi = 0,$$
$$uu_x + vv_x + \nu v/u = 0 \quad \text{при } \psi = 1 \tag{2}$$

Задача (2) всегда допускает решение

$$v = 0, \qquad u \equiv z(\psi) = \left(2\int_0^\psi F(\xi)\,d\xi + 1\right)^{1/2}$$

Предположим, что функция $F(\psi)$ такова, что $z(\psi) \geqslant d > 0$, где $d$ — некоторая положительная постоянная.

Введем новые переменные

$$u = ze^\tau \cos\theta, \qquad v = ze^\tau \sin\theta \qquad \left(\tau = \frac{1}{2}\ln\frac{u^2 + v^2}{z^2}\right)$$

Здесь $\theta$ — угол наклона вектора скорости. В этих переменных задача (2) эквивалентна следующей

$$z\theta_\psi + \tau_x = \Phi_1(\theta, \tau), \qquad z\tau_\psi - \theta_x = \Phi_2(\theta, \tau) \tag{3}$$
$$\theta = 0 \quad \text{при } \psi = 0 \tag{4}$$
$$\tau_x^* = -\nu e^{-2\tau^*}\frac{\operatorname{tg}\theta^*}{z^2(1)} \tag{5}$$

Звездочка означает, что значения $\tau$ и $\theta$ — граничные. $\Phi_1$ и $\Phi_2$ — нелинейные операторы

$$\Phi_1(\theta, \tau) = -z\theta_\psi(e^\tau - 1) - \tau_x(\cos\theta - 1) + \theta_x \sin\theta$$
$$\Phi_2(\theta, \tau) = \frac{F(\psi)}{z(\psi)}(e^{-\tau} - e^\tau) - z\tau_\psi(e^\tau - 1) + \theta_x(\cos\theta - 1) + \tau_x \sin\theta$$

Задача (3) — (5) допускает тривиальное решение $\tau \equiv \theta \equiv 0$. Поставим задачу отыскания периодических по $x$ решений задачи (3) — (5) периода $\lambda$ (безразмерная длина волны), добавив к перечисленным условиям условие симметрии

$$\theta(-{}^1/_2\lambda) = \theta({}^1/_2\lambda) = 0 \tag{6}$$

3. Рассмотрим вспомогательную задачу, в которой условие (5) мы заменим следующим:

$$\tau(x, 1) \equiv \tau^*(x) = f_1(x) \tag{7}$$

Положим $\theta = \theta_1 + \theta_2$; $\tau = \tau_1 + \tau_2$, где $\tau_1$ и $\theta_1$ — решение краевой задачи (4), (6) и (7) для системы (задача А)

$$z\theta_\psi + \tau_\psi = 0, \qquad z\tau_\psi - \theta_x = 0 \tag{8}$$

где $\theta_2$ и $\tau_2$ решают однородную краевую задачу для систем (3), в которой выражения правых частей заменены следующими (задача В)

$$\Phi_i\,(\theta_1 + \theta_2,\ \tau_1 + \tau_2)$$

*Лемма 1.* Решение задачи А имеет вид

$$\theta_1 = A_1\,(\xi), \qquad \tau_1 = B_1\,(\xi) + \tau_0 \qquad \left(\xi = \frac{d\tau^*}{dx}\right) \tag{9}$$

Здесь операторы $A_1$ и $B_1$ — линейные интегральные операторы со слабой особенностью и $\tau_0 = \tau^*\,(0)$.

*Лемма 2.* Задача В эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered}\theta_2\,(x, \psi) = -\int_0^{{}^1\!/_2\lambda}\int_0^1 K_{11}\,(x, \psi;\ x', \psi')\,\Phi_1\,(\theta_1 + \theta_2,\ \tau_1 + \tau_2)\,dx'd\psi' - \\ - \int_0^{{}^1\!/_2\lambda}\int_0^1 K_{12}\Phi_2\,\{\theta_1\,(x', \psi') + \theta_2\,(x', \psi');\ \tau_1 + \tau_2\}\,dx'd\psi' \\ \tau_2\,(x, \psi) = -\int_0^{{}^1\!/_2\lambda}\int_0^1 K_{21}\Phi_1\,dx'\,d\psi' + \int_0^{{}^1\!/_2\lambda}\int_0^1 K_{22}\Phi_2\,dx'\,d\psi'\end{gathered} \tag{10}$$

где

$$K_{11} = \sum_{n,\,m} \frac{\mu_m}{\mu_m^2 + (\alpha n)^2}\,\frac{2\alpha\sin n\alpha x\sin n\alpha x'}{\pi}\,\frac{\chi_m(\psi)\,\chi_m(\psi')}{z\,(\psi')}$$

$$K_{12} = \sum_{n,\,m} \frac{\alpha n}{\mu_m^2 + (\alpha n)^2}\,\frac{2\alpha\sin n\alpha x\cos n\alpha x'}{\pi}\,\frac{\chi_m(\psi)\,\chi_m(\psi')}{z\,(\psi')}$$

$$K_{21} = \sum_{n,\,m} \frac{\alpha n}{\mu_m^2 + (\alpha n)^2}\,\frac{2\alpha\cos n\alpha x\sin n\alpha x'}{\pi}\,\frac{g_m(\psi)\,g_m(\psi')}{z\,(\psi')}$$

$$K_{22} = \sum_{n,\,m} \frac{\mu_m}{\mu_m^2 + (\alpha n)^2}\,\frac{2\alpha\cos n\alpha x\cos n\alpha x'}{\pi}\,\frac{g_m(\psi)\,\chi_m(\psi')}{z\,(\psi')}$$

Здесь $\alpha = 2\pi / \lambda$, $g_n$ и $\mu_n$ — собственные функции и числа оператора:

$$\frac{d}{d\psi}\left(z\,\frac{dg_n}{d\psi}\right) = -\mu_n^2\,\frac{g_n}{z}, \qquad g\,(1) = \left(\frac{dg}{d\psi}\right)_{\psi=0} = 0, \qquad \chi_n = \frac{z}{\mu_n}\,\frac{dq_n}{d\psi}$$

Функции $g_n$ и $x_n$ нормированы с весом $1/z$.

*Лемма 3.* Для любых дифференцируемых $\tau_1$ и $\theta_1$, удовлетворяющих условиям $|\tau_1| < \varepsilon$, $|\tau_{1x}| < \varepsilon_1 \ldots$, $|\theta_{1\psi}| < \varepsilon$, где $\varepsilon$ — некоторое достаточно малое положительное число, система (10) имеет единственное решение

$$\theta_2 = A_2\,(\theta_1,\ \tau_1), \qquad \tau_2 = B_2\,(\theta_1,\ \tau_1) \tag{11}$$

где $A_2$ и $B_2$ — интегростепенные ряды своих переменных; они сходятся равномерно в прямоугольнике $T$

$$-{}^1\!/_2\,\lambda \leqslant x \leqslant {}^1\!/_2\,\lambda, \qquad 0 \leqslant \psi \leqslant 1$$

Справедливость этой леммы следует из теории интегродифференциальных уравнений, развитой в [5], частным случаем которых является система (10). Кроме того, доказательство опирается на тот факт, что однородная краевая задача (4), (6), (7) для системы (3) имеет только тривиальное решение.

Обозначим через $A_i^*$ операторы $A_i$ при условии, что $\psi = 1$. Тогда

$$\theta_2^* = A_2^*\,(A,\ \xi) = D\xi \tag{12}$$

На основании сказанного $D\xi$ — интегростепенной ряд, который сходится равномерно на $-{}^1/_2\lambda$, ${}^1/_2\lambda$, если величина $\xi$ достаточно мала. Подставляя полученные выражения в уравнение (5), получим

$$\xi = -\frac{\nu}{z^2}\exp(-2\tau_0)\exp\left(-2\int_0^x \xi dx'\right) \tag{13}$$

Функционал $\exp(-2\tau_0)$ — аналитический. Обозначим

$$k = -\nu\exp(-2\tau_0)$$

Тогда задача сведется к уравнению вида

$$\xi = kR\xi \tag{14}$$

Согласно предыдущему оператор $R$ — это оператор Ляпунова и, следовательно, в силу общей теории уравнение (14) имеет нетривиальные решения с малой нормой в окрестности однократных собственных значений соответствующей линейной задачи. Отсюда, принимая во внимание структуру функционала $k$, мы приходим к следующей основной теореме.

*Теорема.* Если функция $F(\psi)$ такова, что существует интеграл

$$\int_0^1 F(\psi)\,d\psi \qquad (z \geqslant d > 0)$$

то для достаточно малого $\varepsilon > 0$ задача (3) — (5) при фиксированном значении периода $\lambda$ имеет однопараметрическое семейство решений, если только

$$\nu_n - \nu < \varepsilon$$

где $\nu_n$ — собственные числа линеаризированной задачи.

*Примечания.* 1. Для расчета параметров волн нет необходимости строить эффективно оператор $R$. Можно показать, что решение задачи (3) — (5) является аналитической функцией параметра $\sqrt{\nu_n - \nu}$. Поэтому проще всего непосредственно искать решение исходной краевой задачи в виде рядов по степеням этого параметра.

2. Полученное решение будет близко не к равномерному потоку, как это было в предыдущих исследованиях, а к некоторому вихревому потоку. При $F \equiv 0$ из полученных результатов следуют классические результаты Некрасова — Леви-Чивита.

3. Для определения функционала $\tau_0$ может быть использовано равенство:

$$1 = \int_0^1 (u)_{x=0}\,d\psi = \int_0^1 z(\psi)\exp\tau(0,\psi)\,d\psi$$

где

$$\tau = \tau_0 + B_1(\xi) + B_2(A_1(\xi), \qquad \tau_0 + B_1(\xi))$$

Операторы $A_i$ и $B_i$ имеют следующий вид:

$$0_1 = A_1(\xi) = \int_0^{{}^1/_2\pi} \xi(x')\sum \frac{2\alpha\sin n\alpha x'\sin n\alpha x}{\pi n\alpha}\,\frac{z(1)\,g_n^{*\prime}(1)}{n\alpha}\,dx'$$

$$\tau_1' = \tau_0 + B_1(\xi) = \tau_0 + \int_0^{{}^1/_2\pi} \xi(x')\sum \frac{2\alpha\cos n\alpha x\sin n\alpha x'}{\pi n\alpha}\,g_n^*(1)\,dx'$$

Здесь $g_n$ — функции, удовлетворяющие уравнению

$$z\frac{d}{d\psi}(zg_n^*) - n^2\alpha^2 g_n^* = 0$$

и условию $g_n'(0) = 0$. Функции $g_n^*$ имеют вид

$$g_n^*(\psi) = \mathrm{ch}\left(n\alpha\int_0^\psi \frac{d\psi}{z(\psi)}\right)$$

5. Функции $g_n$, введенные в лемме 2, имеют вид

$$g_n(\psi) = \delta \cos \mu_n \int_0^1 \frac{d\psi}{z(\psi)} \left(\mu_n = n\pi \left[ \int_0^z \frac{d\psi}{z(\psi)} \right]^{-1}\right)$$

где $\delta$ — нормирующий множитель.

Следовательно, все вычисления могут быть проведены эффективно при любом задании функции $F(\psi)$.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить признательность Ю. А. Кравченко (Франция, Гренобль), обратившего мое внимание на эти задачи и дискуссии, которые послужили причиной этого исследования.

Поступила 13 IV 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Dubreil Jacotoin M. L. Sur la determination rogoureuse des ondes permanents periodiques d'ampleur finie. J. Math. pures et appl. 13, 1934.
2. Gouyon R. Sur les houles planes en profondeur infinie CR t 247, 33—35, 1958.
3. Gouyon R. Sur les houles planes en profondeur finie CR t 247, 180—182, 1958.
4. Моисеев Н. Н. О течении тяжелой жидкости над волнистым дном. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
5. Lichtenstein Vorlesungen ueber nichtlinearen Integral und Integrodifferenzial gleichungen. Berlin, 1931.

## ПРЕДЕЛЬНАЯ УЕДИНЕННАЯ ВОЛНА ПРИ ДВИЖЕНИИ ВИХРЯ ПОД ПОВЕРХНОСТЬЮ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

**И. Г. Филиппов**

(Москва)

Из теории волн конечной амплитуды известно, что с увеличением амплитуды волна становится все более крутой и при некотором значении амплитуды $a_0$ в ее вершине появляется угловая точка. Угол между касательными в этой точке, как показал Стокс, всегда равен 120°. При больших значениях $a$ волна разрушается.

Естественно ожидать, что предельная волна может возникнуть и при движении вихря под поверхностью идеальной тяжелой жидкости. Как показал Н. Н. Моисеев [1], при числах Фруда, близких к единице, но больших единицы, возможны, во всяком случае, два решения этой задачи. Существование решения, которое описывает поток, переходящий в плоско-параллельный при стремлении интенсивности вихря к нулю, доказал А. М. Тер-Крикоров [2]. В работе [3] доказано существование второго решения, которое при тех же условиях переходит в уединенную волну.

Ниже рассматривается обтекание вихря потоком жидкости, свободная поверхность которого имеет особенность в вершине волны типа предельной уединенной волны и стремится к последней при стремлении интенсивности вихря к нулю.

Рассмотрим движение вихря интенсивности $\Gamma$ под поверхностью тяжелой идеальной жидкости глубины $H$. Будем предполагать, что вихрь движется со скоростью $c$ такой, что безразмерная скорость, или число Фруда, $F^2 = c^2 / gH > 1$. Движение считаем установившимся и потенциальным, с потенциалом скоростей $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$.

Перейдем к безразмерным переменным в физической плоскости (фиг. 1, $a$) течения $z$; задача о движении вихря, находящегося в точке $z = i\alpha$, сведется к определению аналитической в области $D$ функции $w(z)$, имеющей логарифмическую особенность в точке $z = i\alpha$ и особенность на вершине волны и удовлетворяющей граничным и асимп-