Вариационное уравнение (34) тождественно уравнению термоупругости классической термодинамики равновесных процессов в форме, предложенной Хемпом [3] или, если ввести некоторые фиктивные объемные и поверхностные силы

$$\mathbf{N}_v = -\beta \operatorname{grad} \theta, \qquad \mathbf{N}_\Omega = -\beta\theta\mathbf{n}$$

вариационному уравнению термоупругости Качанова [2]

$$\delta \iiint\limits_{(v)} W dv = \iint\limits_{(\Omega)} (\mathbf{P} - \beta\theta\mathbf{n})\, \delta\mathbf{u} d\Omega - \iiint\limits_{(v)} \beta \operatorname{grad} \theta \delta\mathbf{u} dv$$

Таким образом, вариационные уравнения Л. М. Качанова и У. Хемпа, соответствующие изотермической задаче термоупругости, строго говоря, справедливы только для стационарного температурного поля ($\nabla^2\theta = 0$) при источниках и стоках $w = \beta Te$.

Эти вариационные уравнения можно рассматривать как приближенные, если в процессе деформации можно пренебречь явлением теплопроводности.

Поступила 7 IV 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M. A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics, Journal of Applied Physics, 1956, vol. 27, No. 3.
2. Качанов Л. М. Механика пластических сред, ОГИЗ, 1948.
3. Hemp W. S. Fundamental principles and theorems of thermoelasticity, The Aeronautical Quarterly, 1956, vol. 7, No. 3.

К ТЕОРИИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Д. Д. Ивлев
(Воронеж)

Простейшим вариантом теории пластичности является теория несжимаемого идеального изотропного жестко-пластического тела. При этом условие пластичности является фиксированным, зависящим, вообще говоря, от второго и третьего инвариантов тензора-девиатора напряжений.

В девиаторной плоскости главных напряжений условие пластичности интерпретируется некоторой кривой, называемой кривой пластичности. Известные обобщения теории идеальной пластичности состоят в предположениях об изменении формы кривой текучести в зависимости от деформированного состояния [1-6].

Изменение предела текучести при деформировании характеризует упрочнение материала, причем если при деформировании тело остается изотропным, то процесс носит название изотропного упрочнения. При изотропном упрочнении условие пластичности может зависеть от вторых и третьих инвариантов тензоров-девиаторов напряжений и деформаций. Кривая пластичности в этом случае остается симметричной относительно осей главных напряжений.

Если пределы текучести по разным направлениям не совпадают, то материал является анизотропным. Один из простейших вариантов теории анизотропного упрочнения был впервые предложен Прагером [1], позднее он изучался в работах [4-7]. При этом кривая текучести перемещается как жесткое целое, а условие пластичности зависит от смешанных инвариантов тензоров-девиаторов напряжений и деформаций. Отметим механическую интерпретацию природы анизотропного упрочнения, предложенную в работе [5], объясняющую роль микронапряжений в рамках феноменологической теории.

Ниже рассматриваются соотношения теории анизотропного упрочнения, включающей в себя как частный случай получающегося представления теории изотропного упрочнения, а также теории анизотропного упрочнения Прагера. Изложение ведется для случая плоской деформации.

Предположим, что условие пластичности записывается в виде

$$f(\Sigma_2, \Sigma_3, \Gamma_2, \Gamma_3, T_2, T_3) = 0 \tag{1}$$

Здесь через Σ_2, Σ_3 обозначены второй и третий инварианты тензора — девиатора напряжений (σ_{ij}); через Γ_2, Γ_3 — второй и третий инварианты тензора — девиатора деформаций (ε_{ij}); через T_2, T_3 — второй и третий инварианты тензора — девиатора $(\sigma_{ij} - c\varepsilon_{ij})$, где $c = c\,(\Gamma_2, \Gamma_3)$.

Согласно ассоциированному закону пластического течения

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{2}$$

Так как

$$\Sigma_2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\,(\tau^2_{xy} + \tau_{yz}{}^2 + \tau_{zx}{}^2)\right]$$

$$\Sigma_3 = s_x s_y s_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - s_x\tau_{yz}{}^2 - s_y\tau_{zx}{}^2 - s_z\tau_{xy}{}^2 \tag{3}$$

где $s_i = \sigma_i - \sigma$, $\sigma = {}^1/_3\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$, а остальные инварианты выписываются аналогично, то

$$d\varepsilon_x = d\lambda \left\{\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial \Sigma_2}(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) + \frac{\partial f}{\partial \Sigma_3}\left(s_y s_z - \tau^2_{yz} + \frac{1}{3}\Sigma_2\right) + \right.$$
$$+ \frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial T_2}\left[2\,(\sigma_x - c\varepsilon_x) - (\sigma_y - c\varepsilon_y) - (\sigma_z - c\varepsilon_z)\right] +$$
$$\left. + \frac{\partial f}{\partial T_3}\left[(s_y - c\varepsilon_y)(s_z - c\varepsilon_z) - (\tau_{yz} - c\varepsilon_{yz})^2 + \frac{1}{3}T_2\right]\right\}, \ldots \tag{4}$$

$$d\varepsilon_{xy} = d\lambda \left\{\frac{\partial f}{\partial \Sigma_2}\tau_{xy} + \frac{\partial f}{\partial \Sigma_3}(\tau_{yz}\tau_{zx} - s_z\tau_{xy}) + \frac{\partial f}{\partial T_2}(\tau_{xy} - c\varepsilon_{xy}) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial f}{\partial T_3}\left[(\tau_{xz} - c\varepsilon_{xz})(\tau_{yz} - c\varepsilon_{yz}) - (s_z - c\varepsilon_z)(\tau_{xy} - c\varepsilon_{xy})\right]\right\} = 0, \ldots$$

Остальные выражения получаются круговой перестановкой индексов. Очевидно, имеет место условие несжимаемости $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$.

Рассмотрим случай плоской деформации. Положим

$$\begin{gathered}\varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_x = \sigma_x\,(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y\,(x, y) \\ \tau_{xy} = \tau_{xy}\,(x, y), \quad \varepsilon_x = \varepsilon_x\,(x, y), \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y\,(x, y), \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}\,(x, y)\end{gathered} \tag{5}$$

При $\varepsilon_z = 0$ из (4) будем иметь

$$\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial \Sigma_2}(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) + \frac{\partial f}{\partial \Sigma_3}\left(s_x s_y - \tau_{xy}{}^2 + \frac{1}{3}\Sigma_2\right) +$$
$$+ \frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial T_2}(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) + \frac{\partial f}{\partial T_3}\left[(s_x - c\varepsilon_x)(s_y - c\varepsilon_y) - (\tau_{xy} - c\varepsilon_{xy})^2 + \frac{1}{3}T_2\right] = 0 \tag{6}$$

Условия $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ выполняются тождественно. Очевидно, при условиях (5) и

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{7}$$

имеет место

$$\Sigma_3 = T_3 = 0$$

Условие (6) будет выполнено, если имеет место (7), а также

$$\frac{\partial f}{\partial \Sigma_3} = \frac{\partial f}{\partial T_3} = 0 \qquad \text{при } \Sigma_3 = T_3 = 0 \tag{8}$$

В дальнейшем будем предполагать условия (7) и (8) выполненными; соотношения теории плоского деформированного состояния запишутся в виде

$$\begin{gathered} d\varepsilon_x = \frac{1}{2}d\lambda\left\{\frac{\partial f}{\partial \Sigma_2}(\sigma_x - \sigma_y) + \frac{\partial f}{\partial T_2}\left[(\sigma_x - c\varepsilon_x) - (\sigma_y - c\varepsilon_y)\right]\right\} \\ d\varepsilon_y = \frac{1}{2}d\lambda\left\{\frac{\partial f}{\partial \Sigma_2}(\sigma_y - \sigma_x) + \frac{\partial f}{\partial T_2}\left[(\sigma_y - c\varepsilon_y) - (\sigma_x - c\varepsilon_x)\right]\right\} \\ d\varepsilon_{xy} = d\lambda\left[\frac{\partial f}{\partial \Sigma_2}\tau_{xy} + \frac{\partial f}{\partial T_2}(\tau_{xy} - c\varepsilon_{xy})\right] \end{gathered} \tag{9}$$

Условие пластичности можно представить в виде

$$f\,(\Sigma_2{}^*, \Gamma_2{}^*, T_2{}^*) = 0 \tag{10}$$

где
$$\Sigma_2^* = \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2, \qquad \Gamma_2^* = \frac{1}{4}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \varepsilon_{xy}^2$$
$$T_2^* = \frac{1}{4}[(\sigma_x - c\varepsilon_x) - (\sigma_y - c\varepsilon_y)]^2 + (\tau_{xy} - c\varepsilon_{xy})^2$$

Ниже индекс «звездочка» наверху и двойка внизу опущены.

В дальнейшем будем рассматривать лишь случай, когда условие пластичности (10) можно записать в виде
$$T = T(\Gamma)$$
или
$$[(\sigma_x - c\varepsilon_x) - (\sigma_y - c\varepsilon_y)]^2 + 4(\tau_{xy} - c\varepsilon_{xy})^2 = 4k^2(\Gamma) \tag{11}$$

Соотношения (9) запишем в виде
$$\frac{d\varepsilon_x}{(\sigma_x - c\varepsilon_x) - (\sigma_y - c\varepsilon_y)} = \frac{d\varepsilon_y}{(\sigma_y - c\varepsilon_y) - (\sigma_x - c\varepsilon_x)} = \frac{d\varepsilon_{xy}}{2(\tau_{xy} - c\varepsilon_{xy})} \tag{12}$$

Условию (11) удовлетворим, полагая
$$\sigma_x = \sigma + c\varepsilon_x + k\cos 2\theta, \qquad \sigma_y = \sigma + c\varepsilon_y - k\cos 2\theta, \qquad \tau_{xy} = c\varepsilon_{xy} + k\sin 2\theta \tag{13}$$

Обозначим в дальнейшем $\varepsilon_x = -\varepsilon_y = \varepsilon$, $\varepsilon_{xy} = \gamma$. Тогда, очевидно, $\Gamma = \varepsilon^2 + \gamma^2$. Подставим выражения (13) в уравнения равновесия
$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{14}$$
и получим
$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma}{\partial x} - 2k\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2k\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} + c\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + 2\left(\frac{dk}{d\Gamma}\cos 2\theta + \frac{dc}{d\Gamma}\varepsilon\right)\times \\
\times\left(\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + c\frac{\partial\gamma}{\partial y} + 2\left(\frac{dk}{d\Gamma}\sin 2\theta + \frac{dc}{d\Gamma}\gamma\right)\left(\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right) = 0 \\
\frac{\partial\sigma}{\partial y} + 2k\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2k\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} - c\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} + 2\left(\frac{dk}{d\Gamma}\sin 2\theta + \frac{dc}{d\Gamma}\gamma\right)\times \\
\times\left(\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + c\frac{\partial\gamma}{\partial x} - 2\left(\frac{dk}{d\Gamma}\cos 2\theta + \frac{dc}{d\Gamma}\varepsilon\right)\left(\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right) = 0
\end{gathered} \tag{15}$$

Соотношения (12) примут вид
$$d\varepsilon\sin 2\theta - d\gamma\cos 2\theta = 0 \tag{16}$$

Присоединяя далее условия совместности деформации
$$\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial y} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial\gamma}{\partial y} = 0 \tag{17}$$
получим систему пяти квазилинейных уравнений (15), (16), (17) относительно пяти неизвестных σ, θ, ε, γ, ω.

Исследуем тип полученной системы уравнений. Обозначая через $\psi(x, y) = 0$ уравнение характеристической поверхности, составим характеристический определитель. Он будет иметь вид
$$\begin{vmatrix}
\psi & -2k(\psi_x\sin 2\theta - \psi_y\cos 2\theta) & \dots & \dots & \dots \\
\psi_y & 2k(\psi_x\cos 2\theta + \psi_y\sin 2\theta) & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & d\psi\sin 2\theta & -d\psi\cos 2\theta & 0 \\
0 & 0 & -\psi_y & \psi_x & \psi_x \\
0 & 0 & -\psi_x & -\psi_y & \psi_y
\end{vmatrix} = 0$$
где $\psi_x = \partial\psi/\partial x$, $\psi_y = \partial\psi/\partial y$.

Очевидно, что характеристический определитель равен произведению двух диагональных второго и третьего порядков. Члены, стоящие в первой и второй строках, вместо которых стоят многоточия, никакого влияния на определитель не оказывают. В случае идеальной пластичности эти члены равны нулю. Полагая $d\psi \neq 0$, $k \neq 0$, получим
$$\psi_x^2\cos 2\theta + 2\psi_x\psi_y\sin 2\theta\cos 2\theta - \psi_y^2\cos 2\theta = 0 \tag{18}$$

Таким образом, система оказывается принадлежащей к гиперболическому типу, характеристики оказываются взаимно ортогональными. Характер упрочнения существенным образом скажется на выражениях, обобщающих соотношения Генки. Используя замену переменных

$$d\xi = dy \cos\left(\theta - \frac{1}{4}\pi\right) - dx \sin\left(\theta - \frac{1}{4}\pi\right)$$
$$d\eta = dy \cos\left(\theta + \frac{1}{4}\pi\right) - dx \sin\left(\theta + \frac{1}{4}\pi\right) \tag{19}$$

из (15) получим вдоль характеристик

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\xi} + 2k\frac{\partial\theta}{\partial\xi} - c\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\cos 2\theta + \frac{\partial\gamma}{\partial\eta}\sin 2\theta\right] +$$
$$+\frac{dc}{d\Gamma}\left[(\gamma\cos 2\theta - \varepsilon\sin 2\theta)\frac{\partial\Gamma}{\partial\xi} - \left(\gamma\sin 2\theta + \varepsilon\cos 2\theta + \frac{dk}{d\Gamma}\right)\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}\right] = 0 \tag{20}$$
$$-\frac{\partial\sigma}{\partial\eta} + 2k\frac{\partial\theta}{\partial\eta} + c\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}\cos 2\theta + \frac{\partial\gamma}{\partial\xi}\sin 2\theta\right] +$$
$$+\frac{dc}{d\Gamma}\left[\left(\gamma\sin 2\theta + \varepsilon\cos 2\theta + \frac{dk}{d\Gamma}\right)\frac{\partial\Gamma}{\partial\xi} + (\gamma\cos 2\theta - \varepsilon\sin 2\theta)\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}\right] = 0$$

Отметим некоторые частные случаи: при $c = 0$ будем иметь соотношения закона изотропного упрочнения; при $k = \text{const}$, $c = \text{const}$ получим соотношения, выписанные в [7]; при $k = \text{const}$, $c = 0$ получим соотношения Генки.

Уравнения (16) преобразуются в соотношения Гейрингер, утверждающие отсутствие удлинений вдоль характеристик

$$dU - V d\theta = 0, \qquad dV + U\, d\theta = 0 \tag{21}$$

где U и V — скорости перемещения вдоль характеристик.

Введем углы μ и ν, определяющие направления главных осей тензоров напряжений и деформаций в плоскости xy

$$\operatorname{tg} 2\mu = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \qquad \operatorname{tg} 2\nu = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma + \Sigma\cos 2\mu, & \varepsilon_x &= \Gamma\cos 2\nu \\ \sigma_y &= \sigma - \Sigma\cos 2\mu, & \varepsilon_y &= -\Gamma\cos 2\nu \\ \tau_{xy} &= \Sigma\sin 2\mu, & \varepsilon_{xy} &= \Gamma\sin 2\nu \end{aligned} \tag{22}$$

Из (22) и (13) получим

$$\Sigma^2 + p^2 - 2\,\Sigma p\cos^2(\mu - \nu) = k^2, \qquad p = \Gamma c\,(\Gamma)$$

Очевидно, зависимость $\Sigma = \Sigma(\Gamma)$ будет иметь место лишь при совпадении направлений главных осей тензоров напряжений и деформаций $\mu = \nu$, в противном случае сказывается история нагружения. Рассмотрение теории кручения не представляет трудностей, в этом случае третьи инварианты также равны нулю. Пространственная задача может быть рассмотрена, следуя построениям работы [7].

Поступила 3 V 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Prager W. ZAMM, Bd. 15, H. 1/2, 1935 (русск. пер. сб. Теория пластичности Изд-во иностр. лит., М. 1948).
2. White G. and Drucker D. Journ. Appl. Ph. v. 21, № 10, 1950 (русск. пер. Механика. Сб. переводов, 1952, № 2).
3. Edelman F, Drucker D., Some extension of elementary plasticity theory. Journ. of the Franklin Inst., vol. 251, June 1951.
4. Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением. Укр. математ. ж., 1954, т. 6, № 3.
5. Кадашевич Ю. И. и Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая микронапряжения. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 1.
6. Shield R., Ziegler H. On Prager's hardening rule ZAMP, 9a, 1958; (русск. пер. Механика. Сб. переводов, 1959, № 3).
7. Ивлев Д. Д. О свойствах соотношений закона анизотропного упрочнения пластического материала. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 1.