О ВАРИАЦИОНННЫХ УРАВНЕНИЯХ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Л. И. Балабух, Л. А. Шаповалов

(Москва)

Выводится вариационное уравнение для термоупругой задачи с тепловыми источниками и стоками. При отсутствии источников и стоков тепла аналогичное вариационное уравнение получено Био [1] на основе термодинамики линейных необратимых процессов. Показано, при каких условиях обобщенное вариационное уравнение Био переходит в вариационные уравнения термодинамики равновесных процессов [2,3].

Пусть в момент времени $\tau = 0$ упругое тело имеет постоянную абсолютную температуру T и находится в естественном состоянии, когда напряжения и деформации отсутствуют.

К моменту времени τ от действия внешних сил и температур, заданных граничными условиями на поверхности, а также от действия внутренних источников и стоков тепла, деформации и температуры внутри тела принимают значения

$$e_{ik} = e_{ik}(x_k, \tau), \qquad T_1 = T + \theta \qquad (\theta = \theta(x_k, \tau))$$

где x_k $(k = 1, 2, 3)$ — декартовы координаты.

Будем считать справедливыми для любого момента времени уравнения Дюгамеля — Неймана

$$\sigma_{ik} = 2\mu e_{ik} + (\lambda e - \beta\theta)\,\delta_{ik}, \qquad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k \\ 0 & \text{при } i \neq k \end{cases} \tag{1}$$

Здесь e_{ik} — компоненты тензора деформаций

$$e_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \qquad \left(\beta = \frac{E\alpha}{1-2\nu}\right) \tag{2}$$

α — коэффициент линейного расширения, ν — коэффициент Пуассона, λ и μ — константы Ламе. При отсутствии объемных сил уравнения равновесия в перемещениях и силовые граничные условия на поверхности тела имеют вид

$$\mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\, e - \beta\,\mathrm{grad}\,\theta = 0, \qquad \sigma_{ik} l_k - P_i = 0 \tag{3}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор смещения, $e = \mathrm{div}\,\mathbf{u}$, P_i — компоненты вектора поверхностной нагрузки, l_k — направляющие косинусы внешней нормали.

Для получения уравнения, связывающего деформации с температурами, используем уравнение сохранения тепла $dh = -\,\mathrm{div}\,\mathbf{q}\,d\tau + dw$ и, определяя вектор теплового потока $\mathbf{q}$ через градиент температуры согласно закону Фурье $\mathbf{q} = -\,k\,\mathrm{grad}\,\theta$, получим

$$dh = k\nabla^2\theta d\tau + dw \tag{4}$$

Здесь $dw / d\tau$ — удельная мощность источников и стоков тепла, k — коэффициент теплопроводности.

Количество тепла dh, получаемое элементом объема за время $d\tau$, может быть вычислено, если известна плотность внутренней энергии тела. Поскольку внутренняя энергия — функция состояния, при вычислении ее можно считать, что переход из естественного равновесного состояния в любое неравновесное состояние, соответствующее моменту времени τ, осуществляется обратимым путем.

Введем в рассмотрение некоторые обобщенные теплоемкости C_{ik}. Тогда для приращения плотности внутренней энергии получим

$$d\text{э} = dh + \sigma_{ik}de_{ik} = (\sigma_{ik} + C_{ik})\,de_{ik} + Cd\theta \tag{5}$$

Здесь C — теплоемкость при постоянном объеме.

Из определения внутренней энергии как функции состояния и на основании (5) имеем

$$\frac{\partial \text{э}}{\partial e_{ik}} = \sigma_{ik} + C_{ik}, \qquad \frac{\partial \text{э}}{\partial \theta} = C \tag{6}$$

Вычислим приращение плотности энтропии элемента тела

$$ds = \frac{dh}{T_1} = \frac{C_{ik}}{T_1}\,de_{ik} + \frac{C}{T_1}\,d\theta \tag{7}$$

Из второго закона термодинамики следует, что ds — полный дифференциал независимых переменных e_{ik} и θ, т. е.

$$\frac{\partial s}{\partial e_{ik}} = \frac{C_{ik}}{T_1}, \qquad \frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{C}{T_1} \tag{8}$$

Исключая из уравнений (6) и (8) соответственно плотности внутренней энергии и энтропии и используя уравнение (1), получим

$$\frac{\partial C}{\partial e_{ik}} = -\beta\delta_{ik} + \frac{\partial C_{ik}}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial C}{\partial e_{ik}} = -\frac{C_{ik}}{T_1} + \frac{\partial C_{ik}}{\partial \theta} \tag{9}$$

Отсюда следует

$$C_{ik} = \beta T_1 \delta_{ik}, \qquad C = C(\theta) \tag{10}$$

Имея выражение для теплоемкостей (10), согласно (6) найдем

$$\frac{\partial э}{\partial e_{ik}} = 2\mu e_{ik} + (\lambda e + \beta T)\,\delta_{ik}, \quad \frac{\partial э}{\partial \theta} = C \tag{11}$$

Считая величину θ малой в сравнении с начальной абсолютной температурой тела T и принимая теплоемкость C, а также константы λ, μ и β не зависящими от температуры, получим с точностью до произвольной постоянной

$$э = \mu e_{ik}^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\, e_{ik}\delta_{ik} + \beta T\right) e + C\theta$$

Из закона сохранения энергии и соотношений (11) определим приращение тепла

$$dh = \beta\,(T + \theta)\,de + C d\theta \tag{12}$$

Линеаризируя (12) и интегрируя для начальных условий $h = 0$, $e = 0$, $\theta = 0$ при $\tau = 0$, имеем

$$h = \beta T e + C\theta \tag{13}$$

Таким образом, согласно (4) и (13), уравнение, связывающее деформации и температуры упругого тела, имеет вид обобщенного уравнения теплопроводности

$$C\,\frac{d\theta}{d\tau} + \beta T\,\frac{de}{d\tau} = k\nabla^2\theta + \frac{dw}{d\tau} \tag{14}$$

Уравнения (3) и (14) при заданных начальных и граничных условиях позволяют определить температуру θ и вектор смещения $\mathbf{u}$ в функции времени и координат.

Следуя Био [1], выразим уравнения термоупругости с помощью двух независимых векторов — вектора смещения $\mathbf{u}$ и вектора $\mathbf{S}$, связанного с температурой θ соотношением

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\tau} = -\frac{k}{T}\,\mathrm{grad}\,\theta \tag{15}$$

Исключая с помощью (15) температуру в правой части уравнения теплопроводности и выполняя интегрирование, найдем

$$C\theta + \beta T e = -T\,\mathrm{div}\,\mathbf{S} + w + C_1(x_k) \qquad \left(w = \int_0^\tau \frac{dw}{d\tau}\,d\tau\right) \tag{16}$$

Используя начальное условие $\theta = 0$, $e = 0$, $\mathbf{S} = 0$, $w = 0$ при $\tau = 0$, получим $C_1(x_k) = 0$.

Из уравнения (16) следует, что температура может быть определена как функция двух независимых векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{S}$ и тепла, сообщаемого источниками

$$\theta = -\frac{T}{C}\left[\mathrm{div}\,(\mathbf{S} + \beta\mathbf{u}) - \frac{w}{T}\right] \tag{17}$$

Уравнение теплопроводности (14) с помощью (15) и (17) при этом может быть преобразовано к виду

$$\frac{T}{k}\,\frac{d\mathbf{S}}{d\tau} + \mathrm{grad}\,\theta = 0 \tag{18}$$

Для получения вариационного уравнения термоупругости умножим уравнение равновесия и граничные условия (3), а также уравнение теплопроводности (18), соответственно не независимые вариации $\delta\mathbf{u}$ и $\delta\mathbf{S}$. Интегрируя по объему и поверхности, найдем

$$\iiint\limits_{(v)} [\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} e - \beta \operatorname{grad} \theta] \, \delta \mathbf{u} \, dv = 0$$

$$\iiint\limits_{(v)} \left(\frac{T}{k} \frac{d\mathbf{S}}{d\tau} + \operatorname{grad} \theta \right) \delta \mathbf{S} \, dv = 0, \qquad \iint\limits_{(\Omega)} (\sigma_{ik} l_k - P_i) \, \delta u_i d\Omega = 0 \tag{19}$$

Из соотношений (19) следует тождество

$$\iint\limits_{(\Omega)} (\sigma_{ik} l_k - P_i) \, \delta u_i \, d\Omega - \iiint\limits_{(v)} [\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} e - \beta \operatorname{grad} \theta] \, \delta \mathbf{u} \, dv + $$
$$+ \iiint\limits_{(v)} \left(\frac{T}{k} \frac{d\mathbf{S}}{d\tau} + \operatorname{grad} \theta \right) \delta \mathbf{S} \, dv = 0 \tag{20}$$

Используя уравнение Дюгамеля — Неймана (1) и связь между компонентами деформации и смещениями, преобразуем тождество (20) к виду

$$\iint\limits_{(\Omega)} (\sigma_{ik} l_k - P_i) \, \delta u_i \, d\Omega - \iiint\limits_{(v)} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i dv + \iiint\limits_{(v)} \left(\frac{T}{k} \frac{d\mathbf{S}}{d\tau} + \operatorname{grad} \theta \right) \delta \mathbf{S} \, dv = 0 \tag{21}$$

Преобразуя тройные интегралы в выражении (21) по формуле Гаусса — Остроградского и учитывая, что согласно (17) вариация температуры

$$\delta \theta = -\frac{T}{c} \left[\operatorname{div} (\delta \mathbf{S} + \beta \delta \mathbf{u}) - \frac{\delta w}{T} \right] \tag{22}$$

получим вариационное уравнение термоупругости с источниками и стоками тепла в форме

$$\iiint\limits_{(v)} \left[\delta \left(W + \frac{C\theta^2}{2T} \right) - \frac{\theta}{T} \, \delta w \right] dv + \iiint\limits_{(v)} \frac{T}{k} \frac{d\mathbf{S}}{d\tau} \, \delta \mathbf{S} \, dv = \iint\limits_{(\Omega)} (\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} + \theta \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{S}) \, d\Omega \tag{23}$$

Здесь W — удельная потенциальная энергия изотермической деформации ($\theta = 0$):

$$W = \mu e_{ik}{}^2 + \frac{\lambda}{2} e_{ik} e \delta_{ik}$$

$\mathbf{p}$ — вектор интенсивности поверхностной нагрузки, $\mathbf{n} = -(l_k \mathbf{j}_k)$ — единичный вектор внутренней нормали, $\mathbf{j}_k$ — орты координатной системы x_k.

Для случая, когда тепловые источники и стоки являются заданными функциями координат и времени, вариационное уравнение (23) совпадает по форме с аналогичным уравнением Био [1]

$$\delta V + \iiint\limits_{(v)} \frac{T}{k} \frac{d\mathbf{S}}{d\tau} \, \delta \mathbf{S} \, dv = \iint\limits_{(\Omega)} (\mathbf{P} \delta \mathbf{u} + \theta \mathbf{n} \, \delta \mathbf{S}) \, d\Omega \qquad \left(V = \iiint\limits_{(v)} \left(W + \frac{C\theta^2}{2T} \right) dv \right) \tag{24}$$

В отличие от уравнения Био, при вычислении вариаций в формуле (24) следует учитывать зависимость температуры не только от векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{S}$, но и от источников тепла $w(x_k, \tau)$ согласно (17).

При независимых $\mathbf{u}$, $\mathbf{S}$ и w варьирование по $\mathbf{u}$ дает уравнение равновесия и силовые граничные условия (3), варьирование по $\mathbf{S}$ — уравнение теплопроводности (14).

Заметим, что при независимых $\mathbf{u}$, $\mathbf{S}$ и заданном распределении источников и стоков тепла ($\delta w = 0$) вариационное уравнение (23) может быть записано в форме уравнений Лагранжа для систем с рассеянием энергии

$$\frac{\partial V}{\partial q_n} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_n} = Q_n \qquad \left(D = \iiint\limits_{(v)} \frac{T}{2k} \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tau} \right)^2 dv \right) \tag{25}$$

Здесь D играет роль диссипативной функции, а V — потенциальной энергии системы; q_n — обобщенные координаты, через которые могут быть выражены векторы

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\tau) \, \mathbf{u}_n(x_k), \qquad \mathbf{S} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\tau) \, \mathbf{S}_n(x_k)$$

и величины V и D. Соответствующие обобщенные силы

$$Q_n = \iint\limits_{(\Omega)} \left(\mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial q_n} + \theta \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial q_n} \right) d\Omega$$

Покажем, при каких условиях вариационное уравнение термоупругости (23), учитывающее необратимые явления в термоупругих процессах, может быть заменено вариационными уравнениями классической термодинамики равновесных процессов.

Исключая $d\mathbf{S} / d\tau$ из основного уравнения (23) с помощью (18) и выполняя интегрирование по частям, получим

$$\delta V - \iiint\limits_{(v)} \frac{\theta}{T} \delta w \, dv + \iiint\limits_{(v)} \theta \operatorname{div} \delta \mathbf{S} dv = \iint\limits_{(\Omega)} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \tag{26}$$

Заменяя в (26) обобщенную свободную энергию ее выражением через внутреннюю энергию

$$V = \iiint\limits_{(v)} \left[э - \left(C\theta + \beta T e - \frac{c\theta^2}{2T} \right) \right] dv$$

и выполняя линеаризацию в соответствии с (12), (13), найдем

$$\delta Э - \iiint\limits_{(v)} (\beta T \delta e + C \delta \theta) \, dv = \iint\limits_{(\Omega)} \mathbf{P} \delta \mathbf{u} d\Omega \tag{27}$$

Здесь $Э$ — внутренняя энергия системы. Из (27) на основании (13) получим

$$\delta Э - \iiint\limits_{(v)} \delta h \, dv = \iint\limits_{(\Omega)} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \tag{28}$$

В частном случае для термоупругих процессов, не сопровождающихся подводом или отводом тепла, вариацию δh следует положить равной нулю и уравнение (28), вытекающее из основного уравнения термоупругости (23), переходит в вариационное уравнение адиабатических процессов классической термодинамики.

При этом следует иметь в виду, что вариации $\delta\theta$ и δe для адиабатического процесса ($\delta h = 0$) согласно (13) связаны дополнительным соотношением

$$\delta\theta = -\frac{\beta T}{C} \delta e$$

Преобразуем теперь основное вариационное уравнение (23) для случая изотермического процесса. Используя (26) и заменяя $\operatorname{div} \delta \mathbf{S}$ ее выражением согласно (17)

$$\operatorname{div} \delta \mathbf{S} = -\frac{C}{T} \delta\theta - \beta \delta e + \frac{1}{T} \delta w \tag{29}$$

найдем

$$\delta \iiint\limits_{(v)} (W - \beta \theta e) \, dv + \iiint\limits_{(v)} \beta e \delta \theta dv = \iint\limits_{(\Omega)} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \tag{30}$$

Вариация температуры $\delta\theta$ на основании определения вектора $\mathbf{S}$ и соотношения (29) может быть представлена в форме

$$\delta\theta = \frac{T}{C} \delta \left(\frac{w}{T} - \beta e + \frac{k}{T} \int\limits_0^\tau \nabla^2 \theta d\tau \right) \tag{31}$$

Из выражения (31) следует, что изотермический процесс деформации неравномерно нагретого тела ($\delta\theta = 0$) реализуется только для стационарного температурного поля, когда

$$\nabla^2 \theta = 0 \tag{32}$$

и при существовании специальной системы распределенных источников и стоков

$$w = \beta T e \tag{33}$$

компенсирующих тепло, возникающее в упругом теле в процессе его деформирования.

В этом случае вариацию $\delta\theta$ в выражении (30) можно положить равной нулю и вариационное уравнение изотермического процесса примет вид

$$\delta F = \iint\limits_{(\Omega)} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \tag{34}$$

Здесь F — классическая свободная энергия (потенциал Гельмгольца)

$$F = \iiint\limits_{(V)} (W - \beta \theta e) \, dv$$

Вариационное уравнение (34) тождественно уравнению термоупругости классической термодинамики равновесных процессов в форме, предложенной Хемпом [3] или, если ввести некоторые фиктивные объемные и поверхностные силы

$$\mathbf{N}_v = -\beta \operatorname{grad} \theta, \qquad \mathbf{N}_\Omega = -\beta\theta\mathbf{n}$$

вариационному уравнению термоупругости Качанова [2]

$$\delta \iiint\limits_{(v)} W dv = \iint\limits_{(\Omega)} (\mathbf{P} - \beta\theta\mathbf{n})\, \delta\mathbf{u} d\Omega - \iiint\limits_{(v)} \beta \operatorname{grad} \theta \delta\mathbf{u} dv$$

Таким образом, вариационные уравнения Л. М. Качанова и У. Хемпа, соответствующие изотермической задаче термоупругости, строго говоря, справедливы только для стационарного температурного поля ($\nabla^2\theta = 0$) при источниках и стоках $w = \beta T e$.

Эти вариационные уравнения можно рассматривать как приближенные, если в процессе деформации можно пренебречь явлением теплопроводности.

Поступила 7 IV 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M. A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics, Journal of Applied Physics, 1956, vol. 27, No. 3.
2. Качанов Л. М. Механика пластических сред, ОГИЗ, 1948.
3. Hemp W. S. Fundamental principles and theorems of thermoelasticity, The Aeronautical Quarterly, 1956, vol. 7, No. 3.

К ТЕОРИИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Д. Д. Ивлев
(Воронеж)

Простейшим вариантом теории пластичности является теория несжимаемого идеального изотропного жестко-пластического тела. При этом условие пластичности является фиксированным, зависящим, вообще говоря, от второго и третьего инвариантов тензора-девиатора напряжений.

В девиаторной плоскости главных напряжений условие пластичности интерпретируется некоторой кривой, называемой кривой пластичности. Известные обобщения теории идеальной пластичности состоят в предположениях об изменении формы кривой текучести в зависимости от деформированного состояния [1-6].

Изменение предела текучести при деформировании характеризует упрочнение материала, причем если при деформировании тело остается изотропным, то процесс носит название изотропного упрочнения. При изотропном упрочнении условие пластичности может зависеть от вторых и третьих инвариантов тензоров-девиаторов напряжений и деформаций. Кривая пластичности в этом случае остается симметричной относительно осей главных напряжений.

Если пределы текучести по разным направлениям не совпадают, то материал является анизотропным. Один из простейших вариантов теории анизотропного упрочнения был впервые предложен Прагером [1], позднее он изучался в работах [4-7]. При этом кривая текучести перемещается как жесткое целое, а условие пластичности зависит от смешанных инвариантов тензоров-девиаторов напряжений и деформаций. Отметим механическую интерпретацию природы анизотропного упрочнения, предложенную в работе [5], объясняющую роль микронапряжений в рамках феноменологической теории.

Ниже рассматриваются соотношения теории анизотропного упрочнения, включающей в себя как частный случай получающегося представления теории изотропного упрочнения, а также теории анизотропного упрочнения Прагера. Изложение ведется для случая плоской деформации.

Предположим, что условие пластичности записывается в виде

$$f(\Sigma_2, \Sigma_3, \Gamma_2, \Gamma_3, T_2, T_3) = 0 \tag{1}$$