

НЕКОТОРЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ

В. А. Пупырев, Я. С. Уфлянд

(Ленинград)

В работах [1, 2] рассмотрено вдавливание осевой силой жесткого круглого штампа в упругий слой, лежащий на жестком основании, в предположении отсутствия трения между штампом и слоем, а также между слоем и основанием. В работе [3] решена контактная задача для упругого слоя в общем случае, когда линия действия силы не совпадает с осью штампа¹.

Ниже дается решение общей смешанной задачи для упругого слоя в том случае, когда на одной из граничных плоскостей имеется круговая линия раздела граничных условий (§ 1). Полученные результаты применены к контактным задачам для упругого слоя в двух случаях: а) трение между слоем и основанием отсутствует (§ 2), б) слой жестко сцеплен с основанием (§ 3), причем в обоих случаях пренебрегается трением между штампом и слоем.

Найдены связи между перемещениями штампа и приложенными к нему усилиями и приведены соответствующие численные данные для различных значений отношения радиуса штампа к толщине слоя.

§ 1. Смешанная задача для упругого слоя при наличии на одной грани круговой линии раздела краевых условий. Рассмотрим упругое равновесие неограниченного слоя $0 < r < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq h$ (r, φ, z — цилиндрические координаты) при следующих условиях: на грани $z = h$ задано нормальное перемещение w ; на плоскости $z = 0$ внутри некоторой окружности радиуса $r = a$ также задано смещение w , вне ее — нормальное напряжение σ_z ; наконец, на обеих граничных плоскостях слоя задаются касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} . Таким образом, задача состоит в нахождении решений уравнений теории упругости при следующих краевых условиях:

$$w = w_h(r, \varphi), \quad \tau_{xz} = \tau_{xh}(r, \varphi), \quad \tau_{yz} = \tau_{yh}(r, \varphi) \quad \text{при } z = h \quad (1.1)$$

$$w = w_0(r, \varphi) \quad \text{при } z = 0, r < a, \quad \sigma_z = \sigma_0(r, \varphi) \quad \text{при } z = 0, r > a \quad (1.2)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{x0}(r, \varphi), \quad \tau_{yz} = \tau_{y0}(r, \varphi) \quad \text{при } z = 0 \quad (1.3)$$

При решении воспользуемся формулами Папковича — Нейбера, представляющими решение уравнений Ламе через четыре гармонические функции $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$, а именно

$$\begin{aligned} 2\mu u &= -\frac{\partial F}{\partial x} + 4(1-\nu)\Phi_1, & 2\mu v &= -\frac{\partial F}{\partial y} + 4(1-\nu)\Phi_2, \\ 2\mu w &= -\frac{\partial F}{\partial z} + 4(1-\nu)\Phi_3 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь μ — модуль сдвига, $F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3$.

¹ После сдачи данной работы в печать была опубликована работа [7], в которой иным методом решается задача о действии штампа на слой (без трения), причем решение строится в виде ряда по степеням $1/h$, где h — толщина слоя.

Приведем также формулы для напряжений, входящих в граничные условия:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} [2(1-\nu)\Phi_3 - \Phi_4] + 2\nu \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} \right) - \left(x \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2\Phi_3}{\partial z^2} \right) \\ \tau_{zx} &= \frac{\partial\Phi}{\partial x} + 2(1-\nu) \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} + 2(1-\nu) \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \\ \Phi &= (1-2\nu)\Phi_3 - \Phi_4 - x \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - y \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} - z \frac{\partial\Phi_3}{\partial z}, \quad \Phi_4 = \frac{\partial\Phi_0}{\partial z}\end{aligned}\quad (1.5)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Пользуясь наличием в решении Папковича — Нейбера одной «лишней» функции, к условиям (1.1) — (1.3) присоединим два дополнительных соотношения

$$\Phi = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad \Phi = 0 \quad \text{при } z = h \quad (1.6)$$

Тогда из краевых условий, связанных с касательными напряжениями, получим две отдельные задачи Неймана для функций Φ_1 и Φ_2 , в силу чего эти функции в дальнейшем считаются известными.

Остальным граничным условиям задачи можно удовлетворить, если подчинить гармонические функции Φ_3 и Φ_4 условиям (при этом предполагается, что все искомые функции имеют на бесконечности порядок r^{-1}).

$$[\Phi_3]_{z=h} = \frac{\mu}{1-\nu} w_h, \quad \left[\Phi_4 + h \frac{\partial\Phi_3}{\partial z} \right]_{z=h} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \mu w_h + \frac{x\tau_{xh} + y\tau_{yh}}{2(1-\nu)} \quad (1.7)$$

$$[(1-2\nu)\Phi_3 - \Phi_4]_{z=0} = \frac{x\tau_{x0} + y\tau_{y0}}{2(1-\nu)} \quad (1.8)$$

$$[(3-4\nu)\Phi_3 - \Phi_4]_{z=0} = 2\mu w_0 + \frac{x\tau_{x0} + y\tau_{y0}}{2(1-\nu)} \quad (1.9)$$

$$\left[2(1-\nu) \frac{\partial\Phi_3}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_4}{\partial z} \right]_{z=0} = \sigma_0 - 2\nu \left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} \right]_{z=0} + \left[x \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2} \right]_{z=0} \quad (1.10)$$

Представим гармонические функции Φ_3 и Φ_4 в виде:

$$\Phi_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} [A_n \operatorname{sh} \lambda(h-z) + C_n \operatorname{ch} \lambda(h-z)] J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda h} \quad (1.11)$$

$$\Phi_4 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} [(\lambda h A_n + D_n) \operatorname{ch} \lambda(h-z) + B_n \operatorname{sh} \lambda(h-z)] J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda h}$$

При помощи обращения Фурье и Ханкеля¹, из условия (1.7) можно найти

$$C_n(\lambda) = \frac{\mu}{1-\nu} \lambda \operatorname{sh} \lambda h \int_0^{\infty} w_h^{(n)}(r) J_n(\lambda r) r dr \quad (1.12)$$

$$D_n(\lambda) = \frac{\lambda \operatorname{sh} \lambda h}{1-\nu} \int_0^{\infty} \left[(1-2\nu) \mu w_h^{(n)}(r) + \frac{1}{2} (x\tau_{xh} + y\tau_{yh})^{(n)} \right] J_n(\lambda r) r dr$$

Здесь и в дальнейшем величины с индексом (n) являются коэффициентами разложения соответствующих функций в ряды Фурье по угловой координате φ .

¹ Предполагается, что все функции разлагаются в соответствующие ряды и интегралы.

Условие (1.8) позволяет выразить величину $B_n(\lambda)$ через остальные искомые величины, после этого из (1.9) и (1.10) относительно основной неизвестной $A_n(\lambda)$ получим следующие парные интегральные уравнения¹.

$$\int_0^{\infty} A_n(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda = \chi_n(r) \quad (r < a),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda A_n(\lambda)}{1-g(\lambda)} J_n(\lambda r) d\lambda = \Psi_n(r) \quad (r > a),$$

$$g(\lambda) = \frac{\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h e^{-\lambda h}}{\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h} \quad (1.13)$$

Здесь

$$2(1-\nu)\chi_n(r) = 2\mu w_0^{(n)} + \frac{(x\tau_{x0} + y\tau_{y0})^{(n)}}{2(1-\nu)} - \int_0^{\infty} [2(1-\nu)C_n \operatorname{cth} \lambda h + E_n] J_n(\lambda r) d\lambda$$

$$\Psi_n(r) = \sigma_0^{(n)} - 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)_{z=0}^{(n)} + \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} \right)_{z=0}^{(n)} +$$

$$+ \int_0^{\infty} \lambda \left[C_n + E_n \operatorname{cth} \lambda h - \frac{(1-2\nu)C_n - D_n}{\operatorname{sh}^2 \lambda h} \right] J_n(\lambda r) d\lambda$$

$$E_n = \frac{\lambda}{2(1-\nu)} \int_0^{\infty} (x\tau_{x0} + y\tau_{y0})^{(n)} J_n(\lambda r) r dr$$

Заметим, что, разлагая функцию $\Psi_n(r)$ в интеграл Ханкеля (при $r < a$ она принимается равной нулю), можно систему (1.13) привести к виду

$$\int_0^{\infty} \Phi_n(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda = \omega_n(r) \quad (r < a), \quad \int_0^{\infty} \frac{\lambda \Phi_n(\lambda)}{1-g(\lambda)} J_n(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (r > a) \quad (1.15)$$

Здесь $\omega_n(r)$ — известная функция, а $\Phi_n(\lambda)$ — новая неизвестная величина, связанная с $A_n(\lambda)$ простым соотношением

$$\Phi_n(\lambda) = A_n(\lambda) - [1-g(\lambda)] \int_a^{\infty} \Psi_n(r) J_n(\lambda r) r dr \quad (1.16)$$

При решении уравнений (1.15) мы будем исходить из системы парных интегральных уравнений более простого вида

$$\int_0^{\infty} f_n(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda = F_n(r) \quad (r < a), \quad \int_0^{\infty} \lambda f_n(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (r > a) \quad (1.17)$$

Точное решение этих уравнений дается формулой [5]:

$$f_n(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2}} \int_0^a t^{1/2} \varphi_n(t) J_{n-1/2}(\lambda t) dt \quad (1.18)$$

где

$$\frac{\pi}{2} t^n \varphi_n(t) = \lim_{x \rightarrow 0} [x^n F_n(x)] + t \int_0^t (t^2 - x^2)^{-1/2} [x^n F_n(x)]' dx \quad (1.19)$$

¹ Частный случай таких уравнений рассмотрен в работе [4].

Введем обозначение

$$\frac{\Phi_n(\lambda)}{1-g(\lambda)} = f_n(\lambda)$$

Тогда систему (1.15) можно привести к виду (1.17), причем правая часть будет содержать неизвестную функцию $\Phi_n(\lambda)$:

$$F_n(r) = \omega_n(r) + \int_0^{\infty} g(\lambda) \omega_n(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda \quad (1.20)$$

Подстановка (1.20) в (1.19) дает

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} t^n \varphi_n(t) = \lim_{x \rightarrow 0} [x^n \omega_n(x)] + t \int_0^t x^{n-1} (t^2 - x^2)^{-1/2} [\rho \omega_n(x) + x \omega_n'(x)] dx + \\ + t \int_0^t x^n (t^2 - x^2)^{-1/2} dx \int_0^{\infty} g(\lambda) f_n(\lambda) J_{n-1}(\lambda x) d\lambda \end{aligned} \quad (1.21)$$

Это соотношение с учетом (1.18), представляет собою интегральное уравнение относительно функции $\varphi_n(t)$. После замены переменных $x = t \sin \theta$ и использования интеграла Соинина [6]

$$J_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \int_0^{\pi/2} J_{n-1}(z \sin \theta) \sin^n \theta d\theta \quad (1.22)$$

уравнение (1.21) можно привести к виду

$$\varphi_n(t) = \frac{2}{\pi} \left[F_n(t) + \int_0^1 M_n(x, t) \varphi_n(x) dx \right] \quad (1.23)$$

Ядро и свободный член этого уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} M_n(x, t) = \pi \sqrt{xt} \int_0^{\infty} g(\lambda) J_{n-1/2}(\lambda x) J_{n-1/2}(\lambda t) \lambda d\lambda \\ t^n F_n(t) = \lim_{x \rightarrow 0} [x^n \omega_n(x)] + nt^n \int_0^{1/2\pi} \omega_n(t \sin \theta) \sin^{n-1} \theta d\theta + \\ + t^{n+1} \int_0^{1/2\pi} \omega_n'(t \sin \theta) \sin^n \theta d\theta \end{aligned} \quad (1.24)$$

Итак, поставленная задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма (1.23) с симметричным ядром, причем искомая функция $f_n(\lambda)$ выражается через его решение формулой (1.18).

§ 2. Контактная задача для упругого слоя при отсутствии трения. Применим полученные результаты к решению задачи о вдавливании плоского кругового в плане жесткого штампа в упругий слой, лежащий на жестком основании, причем линия действующей на штамп силы не совпадает с его осью (фигура). Если пренебречь трением как между штампом и слоем, так и между слоем и основанием, то касательные напряжения на границе слоя равны нулю. Кроме того отсутствуют нормальные смещения в плоскости $z = h$ и нормальные напряжения в области $z = 0$, $r > a$.

Таким образом, рассматриваемая задача представляет собой частный случай задачи, рассмотренной в § 1, когда

$$\tau_{xh} = \tau_{yh} = w_h = \tau_{x0} = \tau_{y0} = \sigma_0 = 0, \quad w_0 = \delta + \gamma x \quad (2.1)$$

где δ — поступательное перемещение штампа вдоль оси oz , а γ — угол поворота вокруг оси oy .

Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае функции $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$, а в выражениях (1.11) для функций Φ_3 и Φ_4 следует положить $C_n = D_n = 0$, $B_n = (1 - 2\nu - \lambda h \operatorname{cth} \lambda h) A_n$. Далее, из вида функции w_0 следует, что в разложениях в ряды Фурье следует удерживать лишь члены с номерами $n = 0$ и $n = 1$. В связи с этим, задачу формально можно разбить на две: осесимметричную, в которой все искомые функции пропорциональны величине δ , и задачу, связанную с поворотом штампа, причем здесь все величины содержат множитель $\gamma \cos \varphi$. Так как первая задача уже рассмотрена в работе [1], то обратимся ко второй задаче, в которой парные уравнения (1.13) для $A_1 \equiv A$ имеют вид

$$\int_0^{\infty} A(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = \frac{\mu\gamma}{1-\nu} r \quad (r < a), \quad \int_0^{\infty} \frac{\lambda A(\lambda)}{1-g(\lambda)} J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (r > a) \quad (2.2)$$

Согласно (1.23) — (1.24) эта система может быть сведена к интегральному уравнению Фредгольма. Полагая в (1.18), (1.23), (1.24)

$$n = 1, \quad \omega_1(x) = \frac{\gamma\mu}{1-\nu} x$$

для искомой величины $A(\lambda)$ получаем

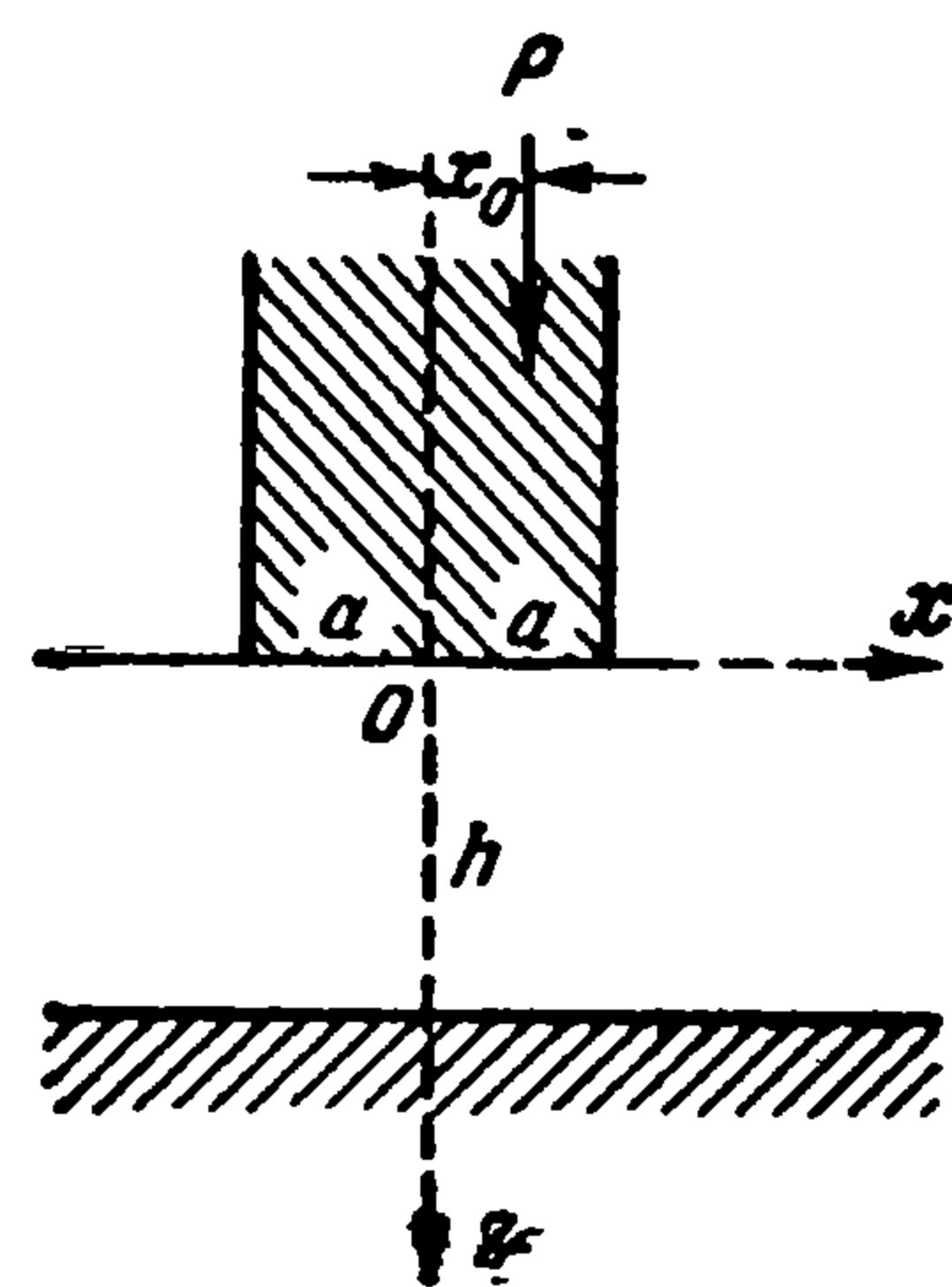
$$A(\lambda) = [1 - g(\lambda)] \int_0^a \varphi(t) \sin \lambda t dt \quad (2.3)$$

причем функция $\varphi(x)$ должна быть найдена из уравнения:

$$\varphi(x) = \frac{4\mu\gamma x}{\pi(1-\nu)} + \frac{1}{\pi} \int_0^a [G(t-x) - G(t+x)] \varphi(t) dt \quad (2.4)$$

где

$$G(u) = \int_0^{\infty} g(\lambda) \cos \lambda u d\lambda \quad (2.5)$$



Заметим, что ряд величин ω , в частности, напряжения по подошве штампа, выражаются непосредственно через функцию $\varphi(t)$, а именно:

$$\sigma_z|_{z=0} = \left[r \int_r^a \frac{\varphi'(t) dt}{(t + \sqrt{t^2 - r^2}) \sqrt{t^2 - r^2}} - \frac{\varphi(r)}{r} - \frac{r\varphi(a)}{(a + \sqrt{a^2 - r^2}) \sqrt{a^2 - r^2}} \right] \cos \varphi \quad (2.6)$$

Отсюда приравнованием момента этих усилий величине Px_0 получаем связь между моментом Px_0 и углом поворота γ :

$$Px_0 = 2\pi \int_0^a t\varphi(t) dt \quad (2.7)$$

Для численных расчетов основное интегральное уравнение приводится к безразмерному виду

$$\omega(\xi) = \xi + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \omega(\tau) [K(\tau - \xi) - K(\tau + \xi)] d\tau, \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (2.8)$$

при помощи подстановок

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \tau = \frac{t}{a}, \quad \omega(\xi) = \frac{\pi(1-\nu)}{4\mu\gamma} \varphi(x), \quad (2.9)$$

причем

$$K(u) = p \int_0^{\infty} \frac{\alpha + e^{-\alpha} \operatorname{sh} \alpha}{\alpha + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha} \cos \alpha p u d\alpha \quad \left(p = \frac{a}{h} \right) \quad (2.10)$$

В работе [1] функция $K(u)$ табулирована для широкого интервала значений основного параметра — отношения радиуса штампа к толщине слоя (см. табл. 1, дополняющую данные работы [1]), после чего уравнение (2.8) решалось путем сведения его к алгебраической системе. Результаты соответствующего расчета для случая, когда ин-

Таблица 1

Значения ядра $K(u)$

u	$p = 2.5$	$p = 3.0$	u	$p = 2.5$	$p = 3.0$
0.0	2.9186	3.5022	1.1	0.1690	0.1320
0.1	2.7988	3.2973	1.2	0.1360	0.1106
0.2	2.4741	2.7670	1.3	0.1137	0.0948
0.3	2.0326	2.1032	1.4	0.0975	0.0825
0.4	1.5707	1.4813	1.5	0.0850	0.0726
0.5	1.1578	0.9922	1.6	0.0752	0.0642
0.6	0.8269	0.6504	1.7	0.0672	0.0570
0.7	0.5816	0.4296	1.8	0.0605	0.0511
0.8	0.4098	0.2944	1.9	0.0545	0.0459
0.9	0.2946	0.2130	2.0	0.0495	0.0414
1.0	0.2186	0.1632			

Таблица 2

Значение коэффициента

τ	$p = 0.5$	$p = 1.0$	$p = 1.5$	$p = 2.0$	$p = 2.5$	$p = 3.0$
$\omega_\gamma(\tau)$						
0.1	0.1038	0.1249	0.1638	0.2118	0.2628	0.3130
0.2	0.2076	0.2490	0.3249	0.4185	0.5175	0.6173
0.3	0.3113	0.3716	0.4805	0.6148	0.7580	0.9073
0.4	0.4149	0.4920	0.6283	0.7961	0.9765	1.1615
0.5	0.5183	0.6096	0.7688	0.9581	1.1656	1.3833
0.6	0.6215	0.7241	0.8933	1.0974	1.3192	1.5515
0.7	0.7245	0.8351	1.0085	1.2124	1.4326	1.6641
0.8	0.8272	0.9426	1.1120	1.3034	1.5054	1.7158
0.9	0.9297	1.0466	1.2050	1.3728	1.5422	1.7128
1.0	1.0318	1.1479	1.2888	1.4257	1.5529	1.6715
$\omega_\delta(\tau)$						
0.0	1.6623	2.7122	3.9095	5.1290	6.3498	7.5726
0.1	1.6610	2.7045	3.8933	5.1050	6.3200	7.5368
0.2	1.6573	2.6814	3.8447	5.035	6.2304	7.4281
0.3	1.6512	2.6435	3.7641	4.917	6.0783	7.2436
0.4	1.6428	2.5916	3.6521	4.748	5.8598	6.9772
0.5	1.6321	2.5267	3.5101	4.530	5.5699	6.6205
0.6	1.6194	2.4505	3.3404	4.261	5.2045	6.1630
0.7	1.6047	2.3648	3.1473	3.946	4.7638	5.5974
0.8	1.5882	2.2715	2.9362	3.594	4.2570	4.9286
0.9	1.5702	2.1729	2.7145	3.220	3.7087	4.1876
1.0	1.5508	2.0714	2.4902	2.845	3.1571	3.4387
$\omega^\circ(\tau)$						
0.1	0.1060	0.1371	0.1897	0.2500	0.3114	0.3726
0.2	0.2118	0.2728	0.3753	0.4931	0.6135	0.7342
0.3	0.3175	0.4058	0.5527	0.7200	0.8979	1.0735
0.4	0.4230	0.5350	0.7184	0.9311	1.1538	1.3784
0.5	0.5281	0.6595	0.8691	1.1131	1.3711	1.6340
0.6	0.6328	0.7786	1.0026	1.2623	1.5399	1.8255
0.7	0.7372	0.8919	1.1182	1.3761	1.6520	1.9384
0.8	0.8410	0.9994	1.2158	1.4539	1.7049	1.9641
0.9	0.9438	1.0996	1.2978	1.5007	1.7049	1.9095
1.0	1.0468	1.1983	1.3668	1.5240	1.6687	1.8019

Таблица 3

p	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
κ	1	1.51	2.20	2.95	3.72	4.49	5.26
κ^0	1	1.62	2.48	3.40	4.34	5.28	6.20
ψ	1/3	0.347	0.397	0.472	0.559	0.650	0.743
ψ^0	1/3	0.352	0.422	0.519	0.626	0.738	0.852
x_0^*/a	1/3	0.325	0.301	0.285	0.275	0.270	0.266
x_0^*/a^0	1/3	0.322	0.294	0.278	0.270	0.265	0.262

тервал (0.1) делился на 10 частей, приведены¹ в табл. 2 ($\omega_\gamma \equiv \omega$). В табл. 3 даны значения коэффициента

$$\psi = \frac{1-\nu}{8\mu a^3} \frac{Px_0}{\gamma}$$

характеризующего отношение момента внешней силы к углу поворота штампа и вычисленного по формуле, вытекающей из (2.7):

$$\psi = \int_0^1 \tau \omega(\tau) d\tau \quad (2.11)$$

Заметим теперь, что полное решение поставленной контактной задачи получается суммированием полученного выше решения с результатами соответствующей осесимметричной задачи (см. работу [1]), причем оно фактически реализуется только в том случае, если давление по подошве штампа неотрицательно. Если составить формулу для суммарного давления, вызванного как поворотом штампа, так и его поступательным перемещением, то окажется, что оно обращается в нуль вдоль некоторой кривой, симметричной относительно координаты φ . Требуя, чтобы эта кривая в предельном случае касалась области контакта в точке $r = a$, $\varphi = \pi$, мы приходим к следующему значению предельного плеча (x_0^*) действующей силы P , превышение которого означало бы нарушение условия неотрицательности давления:

$$x_0^* = a \frac{\psi}{\kappa} \frac{\omega_\delta(1)}{\omega_\gamma(1)} \quad (2.12)$$

В этой формуле через $\omega_\delta(\tau)$ обозначена основная функция $\omega(\tau)$ для осесимметричного случая, причем коэффициент κ дается формулой [1]

$$\kappa = \frac{1-\nu}{4\mu a} \frac{P}{\delta} = \int_0^1 \omega_\delta(\tau) d\tau \quad (2.13)$$

В таблице 3 приведены значения величины κ и предельного плеча x_0^* .

В заключение настоящего параграфа отметим, что случай $p = 0$ соответствует хорошо изученной контактной задаче для полупространства. При этом $K \equiv 0$, $\omega(\xi) \equiv \xi$, $\psi = 1/3$, $x_0^* = a/3$.

§ 3. Контактная задача для слоя, сцепленного с основанием. Методы, развитые в § 1 настоящей работы, позволяют рассмотреть и иную смешанную задачу для упругого слоя, когда на плоскости $z = h$ вместо касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} задаются перемещения u и v . Сведение задачи к нарым интегральным уравнениям типа (1.15) может быть осуществлено и в этом случае, если в качестве второго дополнительного условия (1.6) принять соотношение:

$$(\Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3)_{z=h} = 0 \quad (3.1)$$

¹ Здесь исправлены существенные опечатки, имевшие место в работе [3].

Вид системы (1.15) при этом полностью сохраняется, однако функция $g(\lambda)$ для этого случая оказывается зависящей от коэффициента Пуассона:

$$g(\lambda) = \frac{\alpha(\alpha + 1) + 4(1 - \nu)^2 - (3 - 4\nu) \operatorname{sh} \alpha \cdot e^{-\alpha}}{\alpha^2 + 4(1 - \nu)^2 + (3 - 4\nu) \operatorname{sh}^2 \alpha}, \quad \alpha = \lambda h \quad (3.2)$$

Таким образом, в случае контактной задачи для слоя, сцепленного с основанием (между штампом и слоем по-прежнему пренебрегается трением), расчеты можно производить по той же схеме, что и в § 2.

Таблица 4

Значения ядра $L(u)$

u	$p = 0.5$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0.0	0.6882	1.3765	2.0648	2.7530	3.4412	4.1295
0.1	0.6867	1.3641	2.0232	2.6554	3.2528	3.8085
0.2	0.6820	1.3277	1.9042	2.3864	2.7578	3.0123
0.3	0.6744	1.2695	1.7244	2.0082	2.1222	2.0934
0.4	0.6638	1.1932	1.5062	1.5950	1.5112	1.3287
0.5	0.6506	1.1031	1.2734	1.2090	1.0205	0.8052
0.6	0.6348	1.0041	1.0467	0.8858	0.6710	0.4890
0.7	0.6167	0.9008	0.8412	0.6358	0.4418	0.3132
0.8	0.5966	0.7975	0.6644	0.4532	0.3000	0.2188
0.9	0.5748	0.6978	0.5187	0.3260	0.2158	0.1646
1.0	0.5516	0.6045	0.4026	0.2400	0.1647	0.1310
1.1	0.5272	0.5192	0.3126	0.1836	0.1315	0.1091
1.2	0.5020	0.4429	0.2445	0.1459	0.1092	0.09246
1.3	0.4764	0.3759	0.1938	0.1198	0.09352	0.07848
1.4	0.4504	0.3179	0.1566	0.1011	0.0814	0.06804
1.5	0.4244	0.2684	0.1295	0.08732	0.07090	0.05979
1.6	0.3988	0.2266	0.1094	0.07704	0.06220	0.05214
1.7	0.3735	0.1918	0.09414	0.0688	0.0555	0.04581
1.8	0.3489	0.1630	0.08228	0.06164	0.04982	0.04137
1.9	0.3252	0.1393	0.07292	0.05518	0.04450	0.03720
2.0	0.3022	0.1200	0.06549	0.04976	0.03982	0.03315

В табл. 4 даны значения основного ядра

$$L(u) = p \int_0^{\infty} \frac{\alpha(\alpha + 1) + 4(1 - \nu)^2 - (3 - 4\nu) \operatorname{sh} \alpha e^{-\alpha}}{\alpha^2 + 4(1 - \nu)^2 + (3 - 4\nu) \operatorname{sh}^2 \alpha} \cos \alpha p u d\alpha \quad (3.3)$$

для различных значений $p = a/h$, причем было принято $\nu = 0.3$.

Для тех же значений параметров в табл. 2 и 3 приведены величины $\omega_{\delta}^{\circ}(\tau)$, $\omega_{\gamma}^{\circ}(\tau)$, κ° , ψ° , $x_0^{*\circ}$, где индекс означает, что эти данные относятся к случаю, когда слой и основание сцеплены друг с другом.

Полученные в данной работе численные результаты позволяют, в частности, судить о влиянии толщины слоя на величину просадки штампа в двух предельных случаях, когда трение между слоем и основанием отсутствует, или когда они находятся в условиях сцепления.

Поступила 14 III 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев Н. П., Уфлянд Я. С. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
2. Ворович И. И., Устинов Ю. А. О давлении штампа на слой конечной толщины. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3.
3. Цупырев В. А. Контактная задача для упругого слоя. Сб. научн. работ студентов физ.-мех. фак-та. Лен. политехн. ин-та, Выпуск III (1959).
4. Лурье К. А. Дифракция плоской электромагнитной волны на идеально проводящем круглом диске. ЖЭТФ, 1959, т. 29, № 12, 1421.
5. Watson H. Higher Transcendental Functions, 1953, vol. 11, p. 76—77.
6. Ватсон Г. Н. Бесселевы функции. ИИЛ, 1948.
7. Александров В. М., Ворович И. И. О действии штампа на упругий слой конечной толщины. ПММ, 1960, XXIV, вып. 2.