

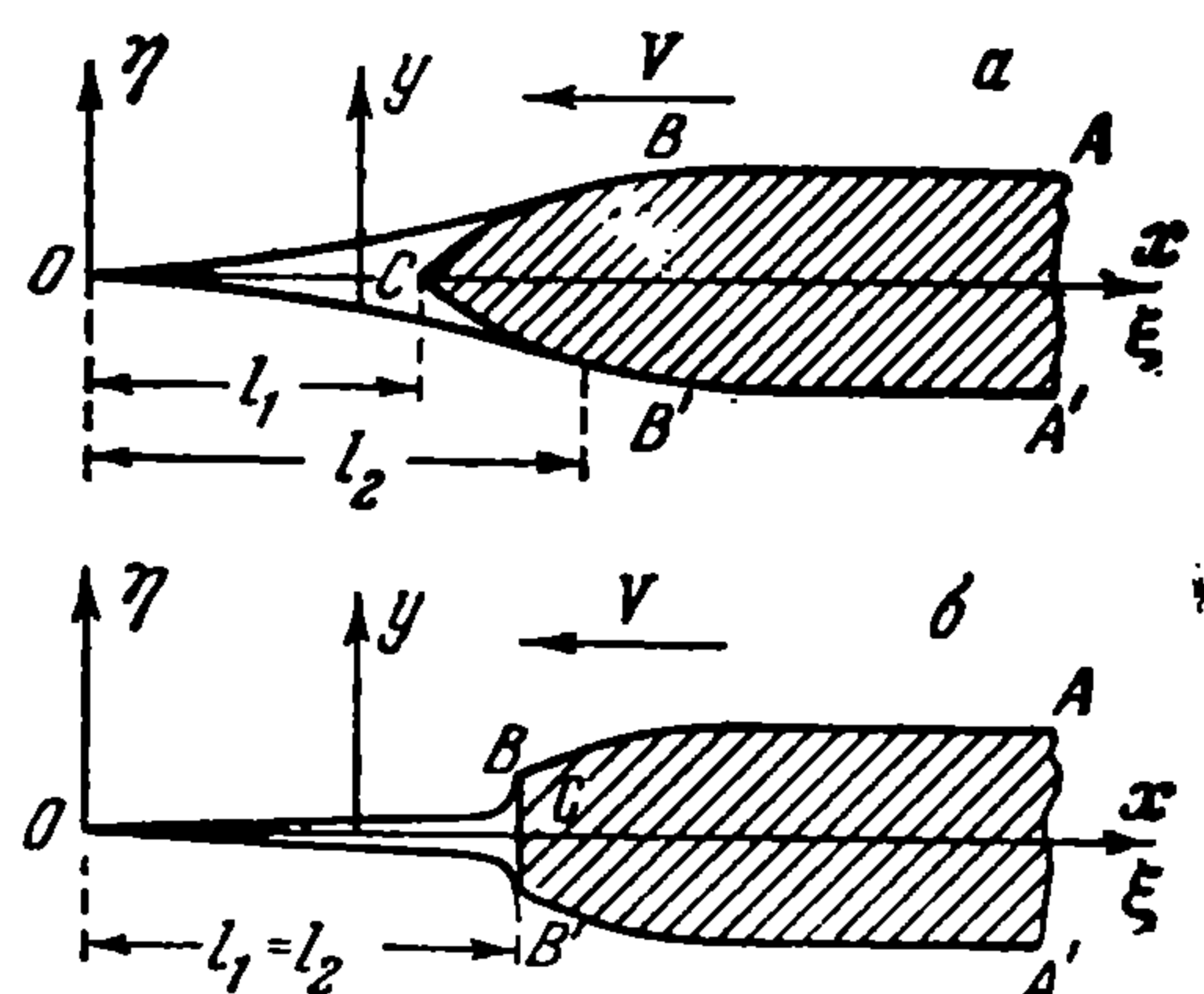
## О РАСКЛИНИВАНИИ ХРУПКИХ ТЕЛ

Г. И. Баренблатт, Г. П. Черепанов

(Москва)

В предлагаемой работе даются постановка и эффективное решение динамической задачи о расклинивании хрупких тел в условиях плоской деформации бесконечным жестким клином произвольной формы, движущимся с постоянной скоростью. Исследование ведется на основе общих представлений о трещинах хрупкого разрушения, развитых в работах [1], где, в частности, была изучена также одна задача о расклинивании в статической постановке. Рассматриваются конкретные примеры — клин постоянной толщины и клин с закруглениями различной формы.

Найдены предельные значения скорости движения клина, до достижения которых применима рассматриваемая постановка задачи. Выяснена особая роль, которую играет скорость распространения поверхностных волн Релея для задач расклинивания, задачи о равномерно движущемся по границе полупространства жестком штампе [2,3,4] и других аналогичных задач, — оказывается, что при приближении к релеевской скорости в упругом теле начинаются своеобразные резонансные явления. Показано, что скорость свободного развития трещины ни при каких условиях не может превзойти скорости распространения релеевских поверхностных волн в данном материале. Исследуемая задача представляет, в частности, интерес для теории резания, поскольку резание на больших скоростях неизменно сопровождается расклиниванием и в большинстве случаев происходит по хрупкому или квазихрупкому механизму.



Фиг. 1

**§ 1. Введение и постановка задачи.** Представим себе однородное и изотропное хрупкое тело, расклиниваемое тонким симметричным абсолютно жестким клином (фиг. 1), имеющим на бесконечности толщину  $2h$  и движущимся вдоль своей линии симметрии с постоянной скоростью  $V$ . Скорость  $V$  предполагается меньшей скорости распространения волн искажения  $c_2$  в расклиниваемом теле<sup>1</sup>. Впереди клина образуется трещина, которая плавно смыкается в некоторой точке  $O$ ; положение точки  $O$  относительно передней точки клина  $C$  заранее неизвестно и должно быть определено в ходе решения задачи.

Если клин имеет закругленную переднюю часть (фиг. 1а), то положение точек схода поверхности трещины с клина  $B$  и  $B'$  также заранее неизвестно и определяется в ходе решения задачи.

<sup>1</sup> Как показывает проведенное ниже исследование, рассматриваемая постановка задачи возможна лишь при скорости движения клина, меньшей скорости распространения волн Релея в данном материале, которая меньше скорости  $c_2$ .

Если же клин имеет срезанную переднюю часть (фиг. 1б), как это, например, имеет место в случае клина постоянной толщины, то положение точек схода является вполне определенным, — они совпадают с углами передней части клина. Однако в этом случае напряжения в точках схода являются бесконечными. Силы трения, действующие на щеках клина  $AB$  и  $A'B'$ , соприкасающихся с расклиниваемым телом, предполагаются подчиняющимися закону Кулона с коэффициентом трения  $k$ .

Математическая постановка задачи сводится к следующему: нужно решить динамические уравнения плоской теории упругости:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2)$$

где  $u, v$  — компоненты смещения по неподвижным осям  $x$  и  $y$ ;  $t$  — время;  $\lambda, \mu$  — коэффициенты Ламе,  $\rho$  — плотность материала расклиниваемого тела,  $\theta = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y$ ; при определенных граничных условиях на поверхности трещины. Ввиду тонкости клина граничные условия можно снести на разрез  $ABOB'A'$ ; для общей нестационарной задачи расклинивания эти условия без учета сил молекулярного сцепления имеют вид:

$$\begin{aligned} v = F(x, t), \quad \tau_{xy} - k\sigma_y = 0 & \quad \text{на } AB \\ \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = 0 & \quad \text{на } BO \text{ и } OB' \\ v = -F(x, t), \quad \tau_{xy} - k\sigma_y = 0 & \quad \text{на } B'A' \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $F(x, t)$  — функция, определяющая уравнение движущейся поверхности клина в неподвижной системе координат, связанной с расклиниваемым телом;  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  — компоненты тензора напряжений. Для рассматриваемой здесь стационарной задачи естественно перейти к подвижной системе координат  $\xi\eta$ , связанной с движущимся клином:

$$\xi = x + Vt, \quad \eta = y \quad (1.4)$$

причем начало системы координат  $\xi\eta$  удобно выбрать (фиг. 1) в конце трещины  $O$ . Обозначим через  $l_1$  расстояние от передней точки клина  $C$  до конца трещины  $O$  и через  $l_2$  — расстояние от точек схода  $B$  и  $B'$  до конца трещины, тогда граничное условие переписется в виде:

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\eta} = 0, \quad \sigma_\eta = 0 & \quad (0 \leq \xi \leq l_2, \quad \eta = 0) \\ v = \pm f(\xi - l_1), \quad \tau_{\xi\eta} - k\sigma_\eta = 0 & \quad (l_2 < \xi < \infty, \quad \eta = 0) \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $f(t)$  — функция, определяющая уравнение поверхности клина в подвижной системе координат с началом в передней точке клина  $C$ , т. е. функция, определяющая форму клина, а знаки плюс и минус отвечают, соответственно, верхней и нижней поверхностям трещины. Положение точек схода  $B$  и  $B'$  определяется в случае клина с закругленной передней частью из условия конечности напряжения  $\sigma_\eta$  в этих точках, аналогичного известному условию Мусхелишвили в задаче о вдавливании штампа. Положение конца трещины  $O$  относительно передней точки клина  $C$

определяется из условия Христиановича конечности напряжений и плавности смыкания противоположных берегов трещины в точке  $O$ . Как и для статических задач [1], для этого оказывается необходимым, чтобы разрывающее напряжение  $\sigma_\eta$ , вычисленное без учета действующих вблизи точки  $O$  сил молекулярного сцепления (т. е. на основе решения краевой задачи (1.1), (1.2), (1.5)) обращалось в бесконечность по закону  $K / \pi \sqrt{s}$ , где  $s$  — расстояние от этой точки, а  $K$  — модуль сцепления [1] расклиниваемого материала.

Исследуемая задача представляет собой, как видно, своеобразную комбинацию задачи о вдавливании равномерно движущегося штампа и задачи о трещинах. Отметим, что задача о штампе, движущемся на границе полупространства, рассматривалась в работах Л. А. Галина [2,3] и Радока [4]. Иоффе [5] и Радок [4] рассматривали также физически малоестественную задачу о равномерно движущейся в теле трещине конечной длины при постоянных напряжениях на бесконечности. При этом длина трещины считалась заданной; вопросом ее определения оба названных автора не занимались.

Как нам представляется, рассматриваемая задача является одной из основных для теории резания. Во всех известных авторам схемах процесса резания принимается, что резец полностью соприкасается с разрезаемым телом. Такая схема приемлема только для очень малых скоростей резания; при повышении скорости резания механизм разрушения становится хрупким или квазихрупким<sup>1</sup> и резание обязательно должно сопровождаться расклиниванием материала. Принимаемая здесь схема находит свое подтверждение в известном на практике факте преимущественного изнашивания резцов по бокам<sup>2</sup>.

**§ 2. Решение общей задачи.** Ввиду очевидной симметрии задачи относительно оси  $\xi$  достаточно рассмотреть одну нижнюю полуплоскость, взяв условия на ее границе в виде

$$\begin{aligned} v = 0, \quad \tau_{\xi\eta} = 0 & \quad (-\infty < \xi \leq 0) \\ \tau_{\xi\eta} = 0, \quad \sigma_\eta = 0 & \quad (0 \leq \xi < l_2) \\ v = -f(\xi - l_1), \quad \tau_{\xi\eta} - k\sigma_\eta = 0 & \quad (l_2 \leq \xi < \infty) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Кратко напомним основные соотношения метода Л. А. Галина [3], которыми мы будем пользоваться в дальнейшем. Заметим, что в интересующем нас § 9 книги [3] имеются неточности, повлиявшие также на окончательные формулы; эти неточности исправлены в настоящей работе. Напряжения и смещения выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} u = -2A \operatorname{Im} \varphi(z_1) - 2B \operatorname{Im} \psi(z_2), \quad v = 2C \operatorname{Re} \varphi(z_1) + 2D \operatorname{Re} \psi(z_2) \\ \sigma_\xi = -2L \operatorname{Im} \varphi'(z_1) - 2F \operatorname{Im} \psi'(z_2), \quad \sigma_\eta = -2G \operatorname{Im} \varphi'(z_1) - 2H \operatorname{Im} \psi'(z_2) \\ \tau_{\xi\eta} = 2M \operatorname{Re} \varphi'(z_1) + 2N \operatorname{Re} \psi'(z_2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

<sup>1</sup> При квазихрупком разрушении пластические деформации имеют место, но они сосредотачиваются в тонком слое вблизи поверхности трещины.

<sup>2</sup> На необходимость учета расклинивания в задачах теории резания неоднократно обращал внимание С. А. Христианович.

где

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{1}{1-2\nu} \sqrt{1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} m^2}, & B &= -\frac{1}{1-2\nu} \sqrt{1-m^2} \\
 C &= \frac{1}{1-2\nu} \left[ 1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} m^2 \right], & D &= \frac{1}{1-2\nu} \\
 L &= -\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( 1 + \frac{\nu m^2}{2(1-\nu)} \right) \sqrt{1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} m^2} \\
 F &= -\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sqrt{1-m^2}, & G &= \frac{E(2-m^2)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \sqrt{1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} m^2} \\
 H &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sqrt{1-m^2} \\
 M &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ 1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} m^2 \right], & N &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( 1 - \frac{m^2}{2} \right) \\
 k_1^2 &= 1 - \frac{V^2}{c_1^2}, & k_2^2 &= 1 - \frac{V^2}{c_2^2}, & c_1^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, & c_2^2 &= \frac{\mu}{\rho}, & m &= \frac{V}{c_2}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

( $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона расклиниваемого материала), причем  $c_1$  и  $c_2$ , соответственно, скорости распространения волны расширения и волны искажения в теле. Функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  представляют собой аналитические функции комплексных переменных

$$z_1 = \xi + ik_1\eta, \quad z_2 = \xi + ik_2\eta \tag{2.4}$$

связанные с другими аналитическими функциями  $w_1$  и  $w_2$  линейными зависимостями

$$\begin{aligned}
 \varphi'(z_1) &= \frac{N}{2\pi(GN - MH)} w_1(z_1) - \frac{iH}{2\pi(GN - MH)} w_2(z_1) \\
 \psi'(z_2) &= -\frac{M}{2\pi(GN - MH)} w_1(z_2) + \frac{iG}{2\pi(GN - MH)} w_2(z_2)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

причем функции  $w_1(z)$  и  $w_2(z)$ , в свою очередь, определяются формулами:

$$w_1(z) = u_1 - iv_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_\eta)_{\eta=0} \frac{d\xi}{\xi - z}, \quad w_2(z) = u_2 - iv_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\tau_{\xi\eta})_{\eta=0} \frac{d\xi}{\xi - z} \tag{2.6}$$

Далее, имеет место соотношение

$$\left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)_{\eta=0} = \frac{CN - DM}{GN - MH} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_\eta)_{\eta=0} \frac{d\xi}{\xi - \xi} + \frac{CH - DG}{GN - MH} (\tau_{\xi\eta})_{\eta=0} \tag{2.7}$$

На границе полуплоскости, при  $z = \xi$ , имеем, очевидно

$$u_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_\eta)_{\eta=0} \frac{d\xi}{\xi - \xi}, \quad v_1 = \pi (\sigma_\eta)_{\eta=0} \tag{2.8}$$

Используя соотношения (2.7) и (2.8), приводим краевую задачу (2.1) к следующей задаче Гильберта для функции  $w_1(z)$ :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 0 & (-\infty < \xi \leq 0), & & v_1 &= 0 & (0 < \xi < l_2) \\
 -p\pi f'(\xi - l_1) &= u_1 + kv_1 & (l_2 \leq \xi < \infty)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{GN - MH}{CN - DM} = \frac{E}{1+\nu} \frac{2}{m^2} \left\{ \sqrt{1-m^2} \sqrt{1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} m^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \left( 1 - \frac{m^2}{2} \right)^2 \right\} \left[ 1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} m^2 \right]^{-1/2} \\
 q &= \frac{CH - DG}{CN - DM} = \frac{2}{m^2} \left\{ \left( 1 - \frac{m^2}{2} \right) - \sqrt{1-m^2} \sqrt{1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} m^2} \right\} \left[ 1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} m^2 \right]^{-1/2}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Общие методы решения задачи Гильберта подробно рассмотрены в монографиях Н. И. Мусхелишвили [6], Л. А. Галина [3] и Ф. Д. Гахова [7]; мы не будем поэтому останавливаться на решении задачи (2.9), а приведем готовый ответ. Заметим, что искомое решение должно удовлетворять физически естественному условию интегрируемости в точках разрыва коэффициентов задачи Гильберта, а также условию стремления к нулю на бесконечности. Эти условия определяют единственное решение задачи Гильберта, которое имеет вид:

$$w_1(z) = \frac{c_0 - \Phi(z)}{z^{1/2}(l_2 - z)^{1-\theta}}, \quad \Phi(z) = p \sin \pi\theta \int_{l_2}^{\infty} \frac{f'(t-l_1)(t-l_2)^{1-\theta} t^{1/2} dt}{t-z} \quad (2.11)$$

где  $c_0$  — действительная положительная константа, а

$$\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{kq} \quad (2.12)$$

(берется значение арктангенса, меньшее  $\pi/2$ ). В частности, в отсутствие трения на щеках клина, т. е. при  $k = 0$ , краевая задача Гильберта вырождается в смешанную задачу,  $\theta = 1/2$  и решение (2.11) принимает форму

$$w_1(z) = \frac{c_0 - \Phi(z)}{\sqrt{z}(l_2 - z)}, \quad \Phi(z) = p \int_{l_2}^{\infty} \frac{f'(t-l_1) \sqrt{t(t-l_2)} dt}{t-z} \quad (2.13)$$

Из решения (2.11) и второго соотношения (2.8) получаем общее выражение для нормального напряжения на границе  $\eta = 0$ :

$$(\sigma_\eta)_{\eta=0} = \begin{cases} \frac{c_0 - \Phi(\xi)}{\pi (-\xi)^{1/2}(l_2 - \xi)^{1-\theta}} & (-\infty < \xi \leq 0) \\ 0 & (0 < \xi < l_2) \\ -\frac{\sin \pi\theta [c_0 - \Phi(\xi)]}{\pi (\xi - l_2)^{1-\theta} \xi^{1/2}} - \frac{1}{2} p \sin 2\pi\theta f'(\xi - l_1) & (l_2 \leq \xi < \infty) \end{cases} \quad (2.14)$$

где

$$\Phi(\xi) = p \sin \pi\theta \int_{l_2}^{\infty} \frac{f'(t-l_1)(t-l_2)^{1-\theta} t^{1/2} dt}{t-\xi} \quad (2.15)$$

(сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения). В частности, в отсутствие трения выражения (2.14) и (2.15) принимают вид:

$$(\sigma_\eta)_{\eta=0} = \begin{cases} \frac{c_0 - \Phi(\xi)}{\pi \sqrt{(l_2 - \xi)(-\xi)}} & (-\infty < \xi \leq 0) \\ 0 & (0 < \xi < l_2) \\ -\frac{c_0 - \Phi(\xi)}{\pi \sqrt{\xi(\xi - l_2)}} & (l_2 \leq \xi < \infty) \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\Phi(\xi) = p \int_{l_2}^{\infty} \frac{f'(t-l_1) \sqrt{t(t-l_2)} dt}{t-\xi} \quad (2.17)$$

Далее, интегрируя (2.7), получаем выражение для смещения  $v$  в точке  $\xi = s$  границы полуплоскости:

$$v(s) + c = \frac{1}{p\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_\eta)_{\eta=0} \ln \left| \frac{\xi - s_0}{\xi - s} \right| d\xi + \frac{q}{p} \int_{s_0}^s (\tau_{\xi\eta})_{\eta=0} d\xi \quad (2.18)$$

где  $c$ ,  $s_0$  — константы интегрирования. Заметим, что отрицательные  $s$  соответствуют еще неразрезанной части тела и смещение  $v$  для таких  $s$  равно нулю. Поэтому, в силу (2.18) при  $s > 0$  выполняется соотношение:

$$c = \frac{1}{p\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_\eta)_{\eta=0} \ln \left| \frac{\xi - s_0}{\xi + s} \right| d\xi + \frac{q}{p} \int_{s_0}^{-s} (\tau_{\xi\eta})_{\eta=0} d\xi \quad (2.19)$$

Вычитая (2.19) из (2.18) и используя граничные условия, получаем окончательное выражение для смещения  $v$  в виде:

$$v = \frac{1}{p\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_\eta)_{\eta=0} \ln \left| \frac{\xi + s}{\xi - s} \right| d\xi + \frac{qk}{p} \int_{l_2}^s (\sigma_\eta)_{\eta=0} d\xi \quad (2.20)$$

При отсутствии трения выражение для смещения  $v$  принимает вид:

$$v = \frac{1}{p\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_\eta)_{\eta=0} \ln \left| \frac{\xi + s}{\xi - s} \right| d\xi \quad (2.21)$$

**§ 3. Определение констант, входящих в решение. Общее динамическое условие на конце трещины.** 1°. В полученном решении остались неопределенными три действительные константы:  $c_0$ ,  $l_1$  и  $l_2$ . Для их определения воспользуемся тремя до сих пор неиспользованными условиями:

- 1) Толщина клина на бесконечности равна  $2h$ .
- 2) Напряжение в точке схода поверхности трещины с клина для клина с закругленной передней частью конечно.
- 3) Напряжение в конце трещины конечно, или, что то же, противоположные берега трещины плавно смыкаются в ее конце.

Потребуем, чтобы производная  $f'(\xi)$  стремилась бы на бесконечности к нулю быстрее, чем  $\xi^{-3/2 + \theta}$ , тогда интеграл (2.15) заведомо существует и при  $\xi \rightarrow \infty$  стремится к нулю. При анализе первого условия рассмотрим отдельно случаи отсутствия трения ( $k = 0$ ) и наличия трения ( $k \neq 0$ ). При отсутствии трения выражение для нормальных напряжений на границе имеет вид (2.16), а смещение  $v$  представляется формулой (2.21). В силу первого условия имеем:

$$h = \frac{I}{p\pi}, \quad I = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_\eta)_{\eta=0} \ln \left| \frac{\xi - s}{\xi + s} \right| d\xi \right\} \quad (3.1)$$

Аналогично тому, как это сделано в работе [8], можно показать, что

а) Если функция  $(\sigma_\eta)_{\eta=0}$  финитна, т. е. обращается в нуль для всех  $\xi$  таких, что  $|\xi|$  больше некоторого  $A$ , то  $I = 0$ .

б) Если функция  $(\sigma_\eta)_{\eta=0}$  стремится к нулю при  $|\xi| \rightarrow \infty$  быстрее, чем  $1/|\xi|$ , то  $I = 0$ .

Отсюда следует, что при вычислении  $I$  существенны только те члены разложения  $(\sigma_\eta)_{\eta=0}$  на бесконечности, которые стремятся к нулю на бесконечности не быстрее чем  $1/|\xi|$ . В силу условия, наложенного на функцию  $f'(\xi)$ ,  $\Phi(\xi) \rightarrow 0$  при  $|\xi| \rightarrow \infty$  и мы получаем из (2.16) асимптотическую формулу для  $(\sigma_\eta)_{\eta=0}$  при  $|\xi| \rightarrow \infty$

$$(\sigma_\eta)_{\eta=0} = -\frac{c_0}{\pi\xi} + o\left(\frac{1}{\xi}\right) \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1) и вычисляя интеграл [9], находим

$$h = -\frac{c_0}{\pi^2 p} \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-\infty}^0 + \int_{l_2}^{\infty} \right\} = \frac{c_0}{\pi^2 p} \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\sigma+1}{\sigma-1} d\sigma + \int_{l_2/s}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\sigma+1}{\sigma-1} d\sigma \right\} = \frac{c_0}{p}$$

Отсюда получаем:

$$c_0 = ph \quad (3.3)$$

При наличии трения выражение для нормальных напряжений на границе имеет вид (2.14), а смещение  $v$  представляется формулой (2.20). В силу первого условия имеем:

$$h = \frac{I}{p\pi} - \frac{qk}{p} \int_{l_2}^{\infty} (\sigma_{\eta})_{\eta=0} d\xi \quad (3.4)$$

где  $I$  по-прежнему определяется формулой (3.1).

Из (2.14) вытекает, что при  $|\zeta| \rightarrow \infty$

$$(\sigma_{\eta})_{\eta=0} = o(|\zeta|^{-1/2+\theta}) \quad (3.5)$$

и, так как при наличии трения  $\theta$  всегда строго меньше  $1/2$ , то  $(\sigma_{\eta})_{\eta=0}$  убывает на бесконечности быстрее, чем  $1/\zeta$ . Отсюда и из сказанного выше при рассмотрении случая  $k = 0$  следует, что  $I = 0$ , так что формула (3.4) записывается в виде:

$$h = -\frac{qk}{p} \int_{l_2}^{\infty} (\sigma_{\eta})_{\eta=0} d\xi \quad (3.6)$$

Подставляя в (3.6) выражение для  $(\sigma_{\eta})_{\eta=0}$  из формул (2.14) и (2.15) и вспоминая, что  $qk = \sigma \operatorname{tg} \pi \theta$ , находим

$$\begin{aligned} ph = & \frac{c_0 \cos \pi \theta}{\pi} \int_{l_2}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^{1/2}(\xi-l_2)^{1-\theta}} + p \cos^2 \pi \theta [h - f(l_2 - l_1)] - \\ & - \frac{p \sin 2\pi \theta}{2\pi} \int_{l_2}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^{1/2}(\xi-l_2)^{1-\theta}} \int_{l_2}^{\infty} \frac{f'(t-l_1)(t-l_2)^{1-\theta} t^{1/2} dt}{t-\xi} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Можно показать, используя таблицы [9,10], что

$$\begin{aligned} \int_{l_2}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^{1/2}(\xi-l_2)^{1-\theta}} &= \frac{\Gamma(1/2-\theta)\Gamma(\theta)}{\Gamma(1/2)l_2^{1/2-\theta}} \\ \int_{l_2}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^{1/2}(\xi-l_2)^{1-\theta}} \int_{l_2}^{\infty} \frac{f'(t-l_1)(t-l_2)^{1-\theta} t^{1/2} dt}{t-\xi} &= \\ &= \frac{1}{l_2^{1/2-\theta}} \int_{l_2}^{\infty} f'(t-l_1)(t-l_2)^{1-\theta} t^{1/2} S\left(\frac{t}{l_2}, \theta\right) dt \end{aligned}$$

где  $S(\tau, \theta)$  — главное значение интеграла

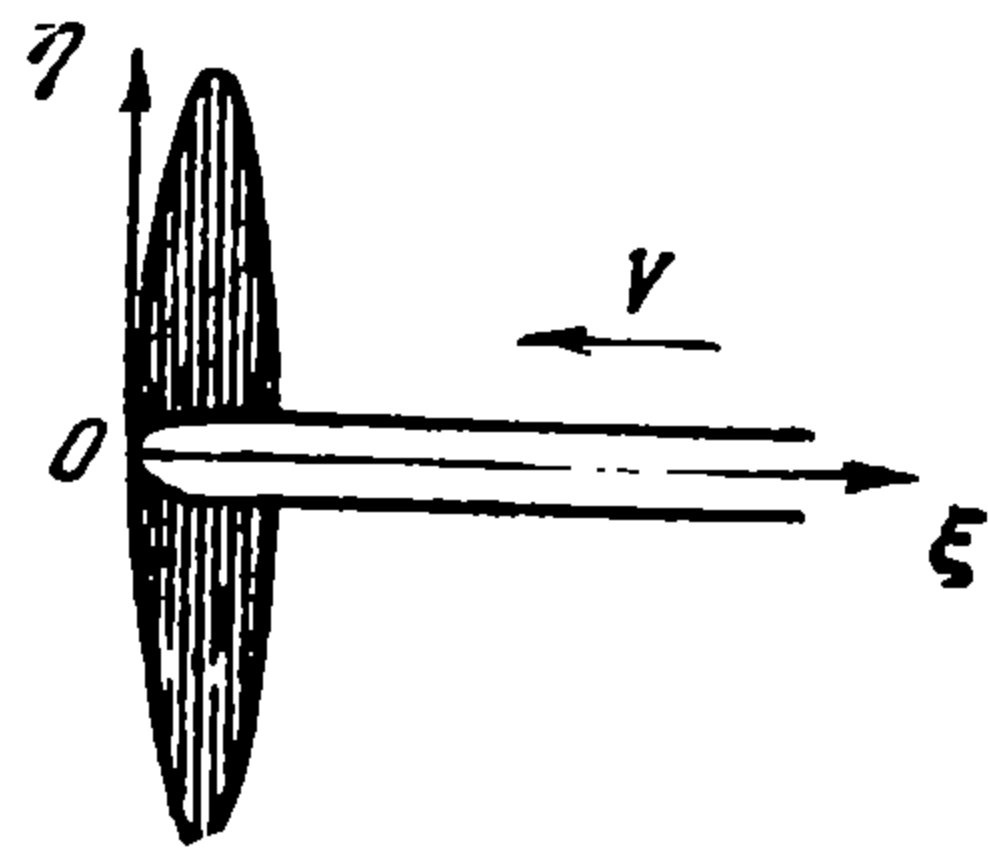
$$S(\tau, \theta) = \int_1^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^{1/2}(\sigma-1)^{1-\theta}(\tau-\sigma)}$$

Отсюда и из (3.7) получаем первое соотношение для определения пара-

метров  $c_0$ ,  $l_1$  и  $l_2$ :

$$c_0 = \frac{\pi p h \Gamma(1/2) l_2^{1/2-\theta}}{\Gamma(\theta) \Gamma(1/2-\theta) \cos \pi \theta} - \frac{\pi p \cos \pi \theta [h - f(l_2 - l_1)] \Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2-\theta) \Gamma(\theta)} + \quad (3.8)$$

$$+ \frac{p \sin \pi \theta \Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2-\theta) \Gamma(\theta) l_2^{3/2-\theta}} \int_{l_2}^{\infty} f'(t - l_1) (t - l_2)^{1-\theta} t^{1/2} S\left(\frac{t}{l_2}, \theta\right) dt$$



Фиг. 2

Второе соотношение получается из условия конечности нормальных напряжений в точке схода  $\xi = l_2$  поверхности трещины с клина. Как показывает формула (2.14), для этого необходимо и достаточно справедливости равенства

$$c_0 - \Phi(l_2) = 0$$

так что, в силу (2.15), второе соотношение принимает вид

$$c_0 - p \sin \pi \theta \int_{l_2}^{\infty} \frac{f'(t - l_1) t^{1/2} dt}{(t - l_2)^\theta} = 0 \quad (3.9)$$

В частности, в отсутствие трения ( $k = 0$ ), оно принимает форму

$$h = \int_{l_2}^{\infty} f'(t - l_1) \sqrt{\frac{t}{t - l_2}} dt \quad (3.10)$$

2°. Третье соотношение между параметрами  $c_0$ ,  $l_1$  и  $l_2$  получается из условия конечности напряжений и плавного смыкания в конце трещины  $O$ . Применительно к статическим задачам было показано [1], что для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы разрывающие напряжения, вычисленные без учета сил молекулярного сцепления, обращались на конце трещины в бесконечность по закону  $K/\pi \sqrt{s}$ , где  $s$  — расстояние от конца трещины, а  $K$  — модуль сцепления материала. Оказывается, что это последнее условие справедливо и для динамических задач.

Для доказательства рассмотрим окрестность конца распространяющейся трещины, малую сравнительно с размерами трещины в целом, но большую сравнительно с размером  $d$  ее концевой области, в которой действуют силы сцепления. В силу малости размера  $d$  сравнительно с размерами трещины в целом (первая гипотеза [1]) такую область всегда можно указать. Далее, на небольшом промежутке времени всегда можно считать, что конец трещины распространяется с постоянной скоростью. Таким образом, для определения вклада сил молекулярного сцепления в поля напряжений и деформаций нам достаточно рассмотреть полубесконечный разрез, движущийся с постоянной скоростью  $V$  (фиг. 2), под действием одних только сил сцепления. Задача симметрична относительно оси  $\xi$ ; рассматривая снова нижнюю полуплоскость, получаем граничные условия на оси  $\xi$  в виде <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} v^{(a)} &= 0, & \tau_{\xi\eta}^{(a)} &= 0 & (-\infty < \xi \leq 0) \\ \sigma_\eta^{(a)} &= G(\xi), & \tau_{\xi\eta}^{(a)} &= 0 & (0 \leq \xi \leq d) \\ \sigma_\eta^{(a)} &= \tau_{\xi\eta}^{(a)} = 0 & & & (\xi > d) \end{aligned} \quad (3.11)$$

<sup>1</sup> Верхним индексом  $(a)$  обозначаются компоненты напряжений, смещений и пр. величины, обуславливаемые действием сил сцепления.

где  $G(\xi)$  — распределение сил сцепления, равных нулю вне концевой области.

Вполне аналогично § 2 определение соответствующих напряжений и деформаций приводится к решению смешанной задачи для аналитической функции  $w_1^{(a)}(z) = u_1^{(a)} - iv_1^{(a)}$ :

$$u_1^{(a)} = 0 \quad (-\infty < \xi \leq 0), \quad v_1^{(a)} = \pi G(\xi) \quad (0 \leq \xi \leq d), \quad v_1^{(a)} = 0 \quad (\xi > d) \quad (3.12)$$

Согласно формуле Келдыша — Седова [11] функция  $w_1^{(a)}(z)$  представляется в виде:

$$w_1^{(a)}(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \int_0^d \frac{G(t) t^{1/2} dt}{t-z} \quad (3.13)$$

так что, согласно (2.8), напряжение  $(\sigma_\eta^{(a)})_{\eta=0}$  в точке  $\xi = -s$  ( $s > 0$ ) выражается формулой:

$$(\sigma_\eta^{(a)})_{\eta=0} = -\frac{1}{\pi\sqrt{s}} \int_0^d \frac{G(t) t^{1/2} dt}{t+s}$$

При малых  $s$ , в силу автономности концевой области (т. е. независимости ее формы и действующих в ней сил сцепления от нагрузки; вторая гипотеза [1]) и по определению модуля сцепления [1] имеем

$$\sigma_\eta^{(a)} = -\frac{1}{\pi\sqrt{s}} \int_0^d \frac{G(t) dt}{\sqrt{t}} = -\frac{K}{\pi\sqrt{s}} \quad (3.14)$$

Для конечности разрывающего напряжения в конце трещины разрывающее напряжение  $\sigma_\eta$ , вычисленное без учета сил сцепления, должно компенсировать напряжение  $\sigma_\eta^{(a)}$ , т. е. должно обращаться в бесконечность по закону

$$\sigma_\eta = \frac{K}{\pi\sqrt{s}} \quad (3.15)$$

Исследование показывает, что выполнение условия (3.15) одновременно обеспечивает конечность напряжения  $\sigma_\xi$  и плавность смыкания противоположных берегов в конце трещины.

Для того чтобы решение рассматриваемой задачи удовлетворяло условию (3.15), нужно, как показывает формула (2.14), удовлетворить соотношению

$$c_0 - \Phi(0) = Kl_2^{1-\theta}$$

или в силу (2.15) соотношению

$$c_0 - p \sin \pi\theta \int_{l_2}^{\infty} \frac{f'(t-l_1)(t-l_2)^{1-\theta} dt}{t^{1/2}} = Kl_2^{1-\theta} \quad (3.16)$$

которое и является третьим соотношением, связывающим параметры  $c_0$ ,  $l_1$  и  $l_2$ . При отсутствии трения условие (3.16) принимает вид:

$$h - \int_{l_2}^{\infty} f'(t-l_1) \sqrt{\frac{t-l_2}{t}} dt = \frac{K\sqrt{l_2}}{p} \quad (3.17)$$

Вычитая (3.9) из (3.16), получаем уравнение

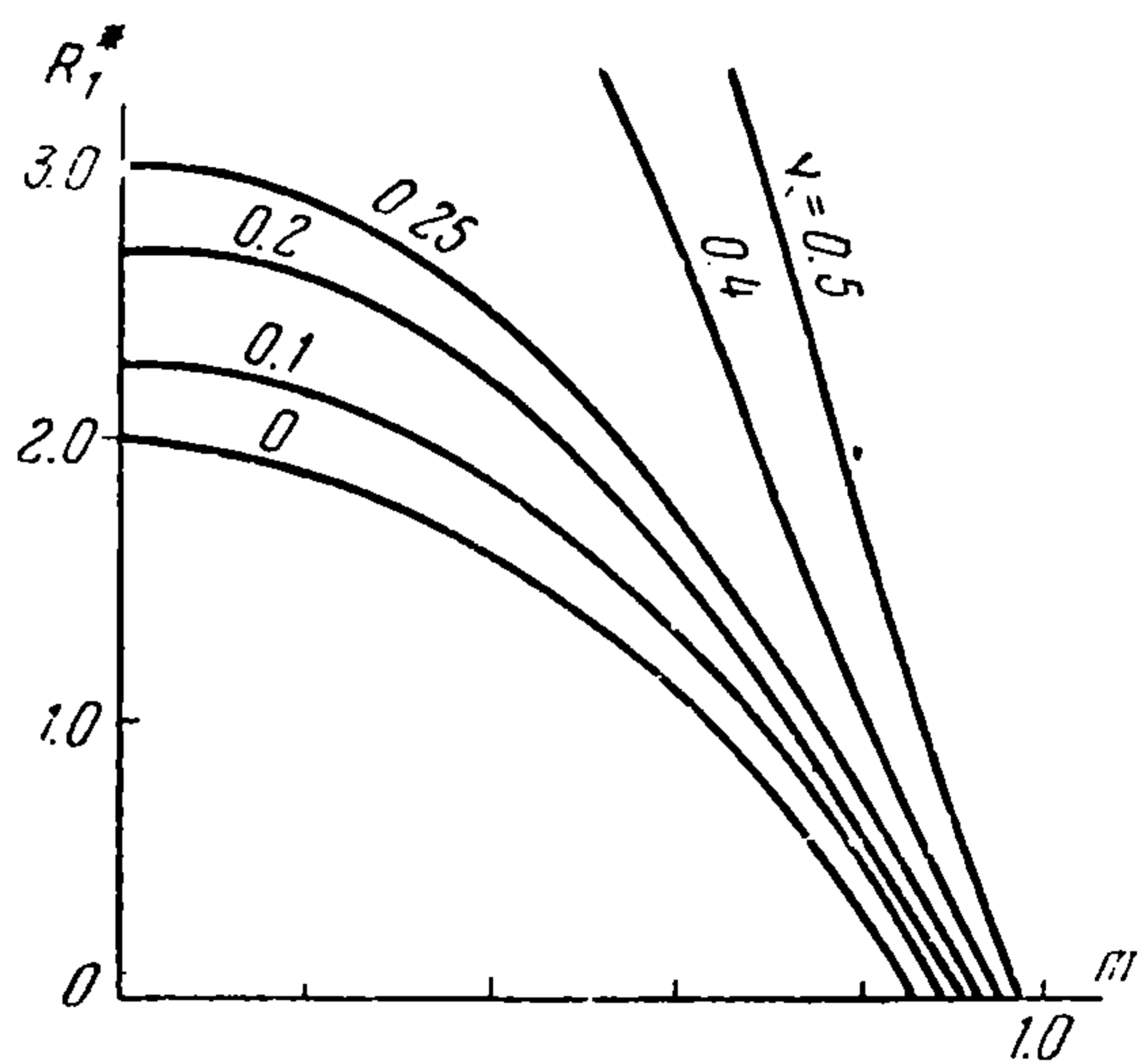
$$\int_{l_2}^{\infty} \frac{f'(t-l_1) dt}{t^{1/2}(t-l_2)^\theta} = \frac{K}{l_2^\theta p \sin \pi\theta} \quad (3.18)$$

В частности, при отсутствии трения, это уравнение принимает форму

$$\int_{l_2}^{\infty} \frac{f'(t-l_1) dt}{\sqrt{t(t-l_2)}} = \frac{K}{p\sqrt{l_2}} \quad (3.19)$$

Условия (3.3), (3.10) и (3.17) при отсутствии трения и условия (3.8), (3.9) и (3.16) при наличии трения для заданной формы клина, т. е. для заданной функции  $f(t)$ , представляют собой конечные соотношения, однозначно определяющие значения параметров  $c_0$ ,  $l_1$  и  $l_2$ . Отметим, что при отсутствии трения одно из условий (3.10) и (3.17) можно заменить уравнением (3.19), а при наличии трения одно из условий (3.9) и (3.16) можно заменить уравнением (3.18).

**§ 4. Сопротивление расклиниванию.** Физически очевидно, что в процессе расклинивания для продвижения клина к нему должна быть приложена некоторая сила, направленная вдоль оси клина. Эту силу, равную сопротивлению тела расклиниванию, мы обозначим через  $R$ ; она складывается из сопротивления трения  $R_1$  — равнодействующей сил трения,



Фиг. 3

приложенных на щеках клина, и из лобового сопротивления  $R_2$  — равнодействующей проекций нормальных сил на ось клина. Сопротивление трения  $R_1$  можно представить в виде

$$R_1 = -2 \int_{l_2}^{\infty} (\tau_{\xi\eta})_{\eta=0} d\xi \quad (4.1)$$

Формула (3.6) может быть записана следующим образом:

$$h = -\frac{q}{p} \int_{l_2}^{\infty} (\tau_{\xi\eta})_{\eta=0} d\xi \quad (4.2)$$

Сравнивая (4.2) и (4.1), получаем очень простую формулу для сопротивления трения:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{2hp}{q} = 2hp_0 \left( \frac{p}{p_0 q} \right) = \\ &= 2hp_0 \frac{2(1-\nu) \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} m^2 \right)^2 - \sqrt{1-m^2} \sqrt{1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} m^2} \right]}{\left( 1 - \frac{1}{2} m^2 \right) - \sqrt{1-m^2} \sqrt{1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} m^2}} \quad (4.3) \\ &\quad \left( p_0 = \frac{E}{2(1-\nu^2)} = (p)_{m=0} \right) \end{aligned}$$

Зависимость  $R_1^* = R_1 / 2hp_0$  от  $m$  для различных  $\nu$  представлена на фиг. 3; как видно, сопротивление трения уменьшается с ростом скорости движения клина, стремясь к нулю при подходе к критической скорости, соответствующей обращению  $p$  в нуль (и совпадающей со скоростью распространения поверхностных волн Релея, см. ниже). Любопытно, что полученное выражение для силы трения не зависит от величины коэффициента трения и формы клина и полностью определяется толщиной клина на бесконечности, скоростью расклинивания и упругими характеристиками расклиниваемого материала.

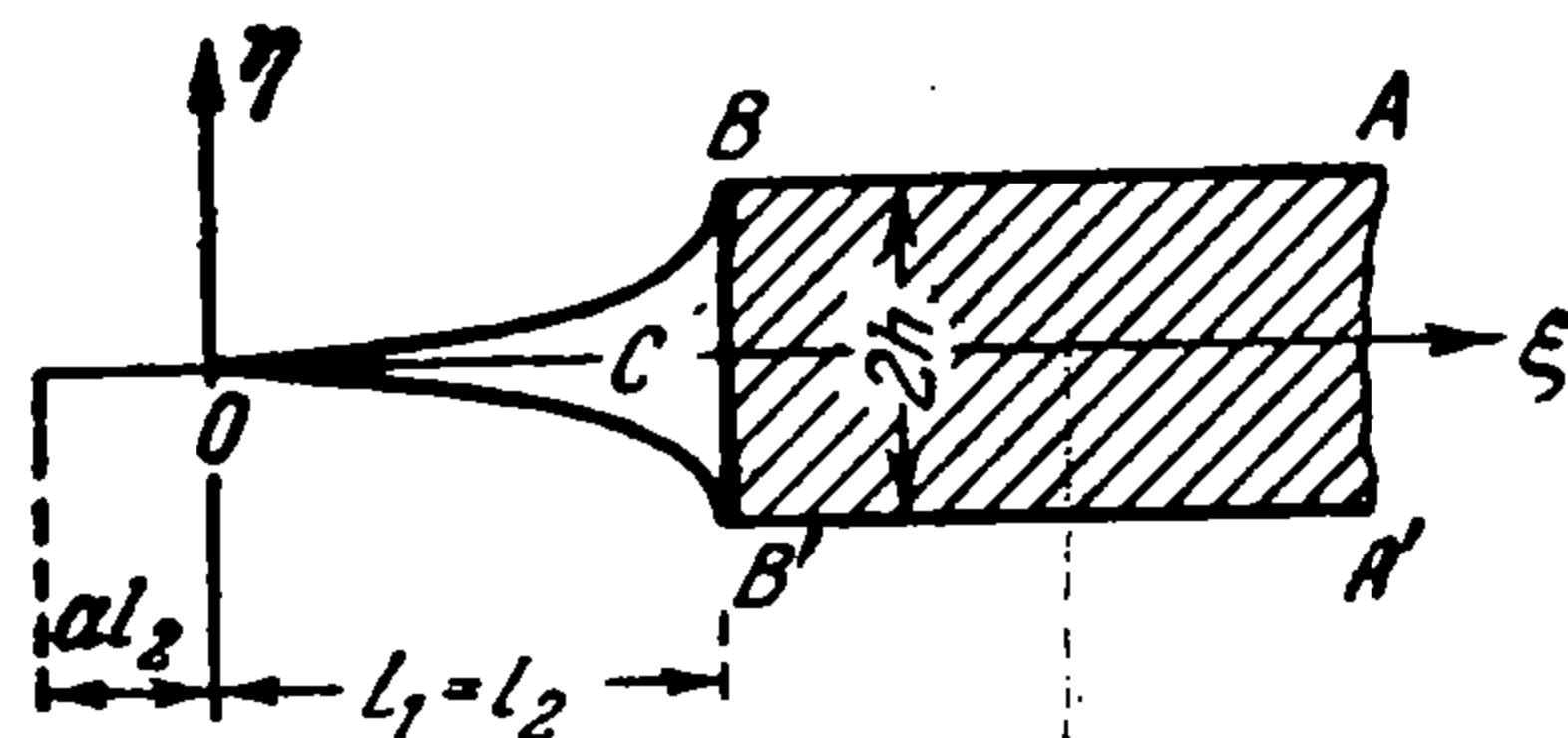
Поскольку проекция нормального напряжения на ось клина ввиду тонкости клина равна  $-(\sigma_\eta)_{\eta=0} f^1(\xi)$ , лобовое сопротивление  $R_2$  определяется соотношением

$$R_2 = -2 \int_{l_2}^{\infty} (\sigma_\eta)_{\eta=0} f'(\xi) d\xi \quad (4.4)$$

**§ 5. Решение конкретных задач.** Рассмотрим некоторые частные задачи, представляющие также самостоятельный интерес.

1°. *Клин постоянной толщины* (фиг. 4). В этом случае  $f'(t) \equiv 0$  и функция  $w_1(z)$  записывается в виде

$$w_1(z) = \frac{c_0}{z^{1/2} (l_2 - z)^{1-\theta}} \quad (5.1)$$



Фиг. 4

где действительная положительная постоянная  $c_0$  определяется соотношением

$$c_0 = \frac{\pi p h l_2^{1/2-\theta} \Gamma(1/2)}{\Gamma(\theta) \Gamma(1/2 - \theta) \cos \pi \theta}, \quad \theta = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{1}{kq} \quad (5.2)$$

Для определения константы  $l_1 = l_2$  воспользуемся соотношением (3.16), которое в нашем случае принимает вид:

$$c_0 = K l_2^{1-\theta} \quad (5.3)$$

Используя соотношение (5.2), получаем выражение для  $l_2 = l_1$  в виде:

$$l_1 = l_2 = \frac{\pi^2 p^2 h^2 \Gamma^2(1/2)}{\Gamma^2(\theta) \Gamma^2(1/2 - \theta) \cos^2 \pi \theta K^2} \quad (5.4)$$

Распределение нормальных напряжений на щеках клина и на продолжении трещины имеет вид:

$$(\sigma_\eta)_{\eta=0} = \begin{cases} \frac{c_0}{\pi (-\xi)^{1/2} (l_2 - \xi)^{1-\theta}} & (-\infty < \xi \leq 0) \\ 0 & (0 < \xi < l_2) \\ -\frac{c_0}{\pi \xi^{1/2} (\xi - l_2)^{1-\theta}} & (l_2 \leq \xi < \infty) \end{cases} \quad (5.5)$$

При отсутствии трения функция  $w_1(z) = w_1^*(z)$  записывается в виде:

$$w_1^*(z) = \frac{c_0^*}{\sqrt{z} (l_2^* - z)}, \quad c_0^* = p h \quad (5.6)$$

а свободная длина трещины в отсутствие трения  $l_2^*$  выражается следующей формулой:

$$l_2^* = \frac{p^2 h^2}{K^2} \quad (5.7)$$

Последнее выражение удобно представить в виде:

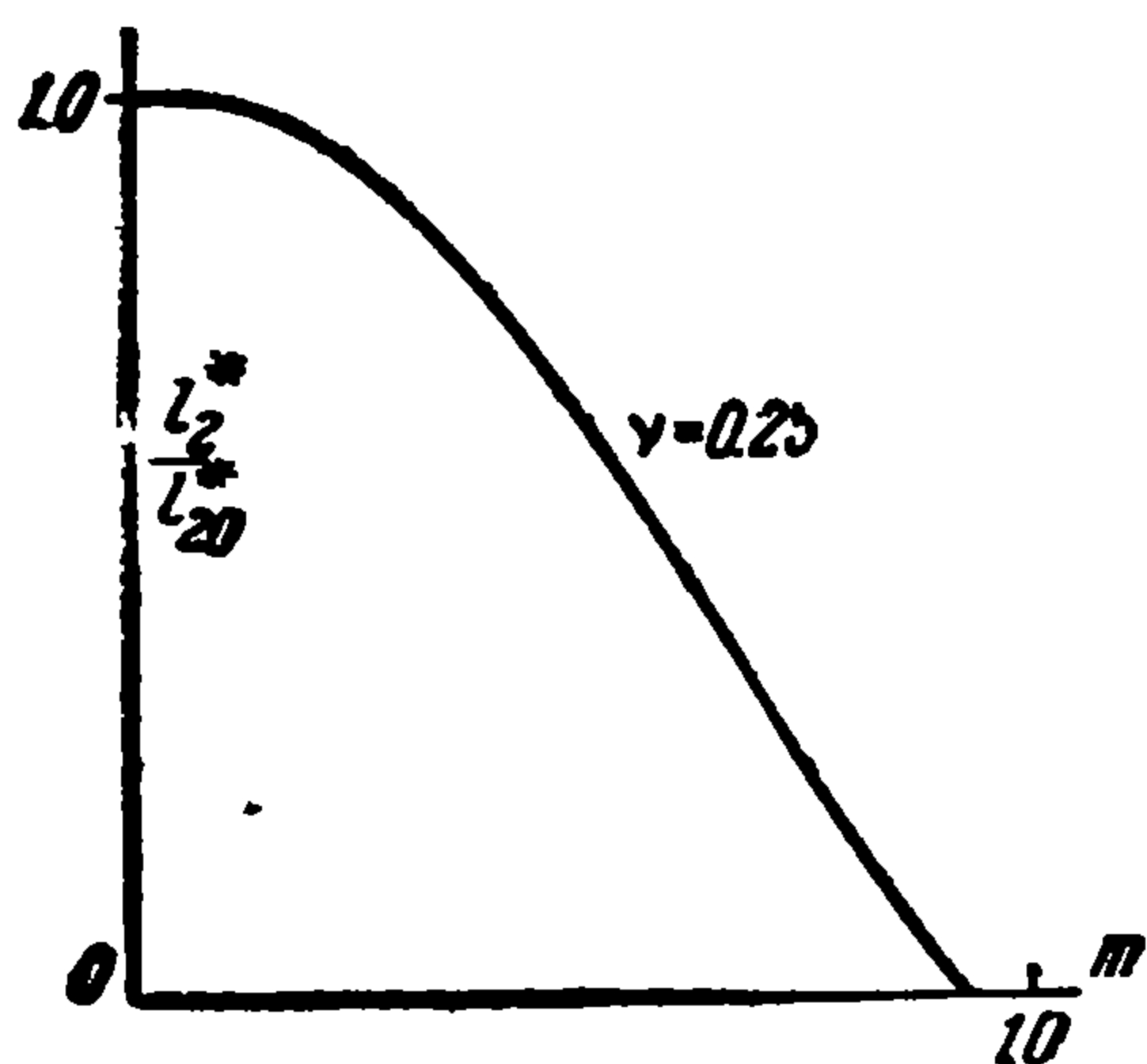
$$\frac{l_2^*}{l_{20}^*} = \frac{p^2}{p_0^2}, \quad p_0 = (p)_{m=0} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \quad (5.8)$$

где  $l_{20}^*$  — свободная длина трещины в случае покоящегося клина постоянной толщины, которая, как показано в [1], определяется соотношением

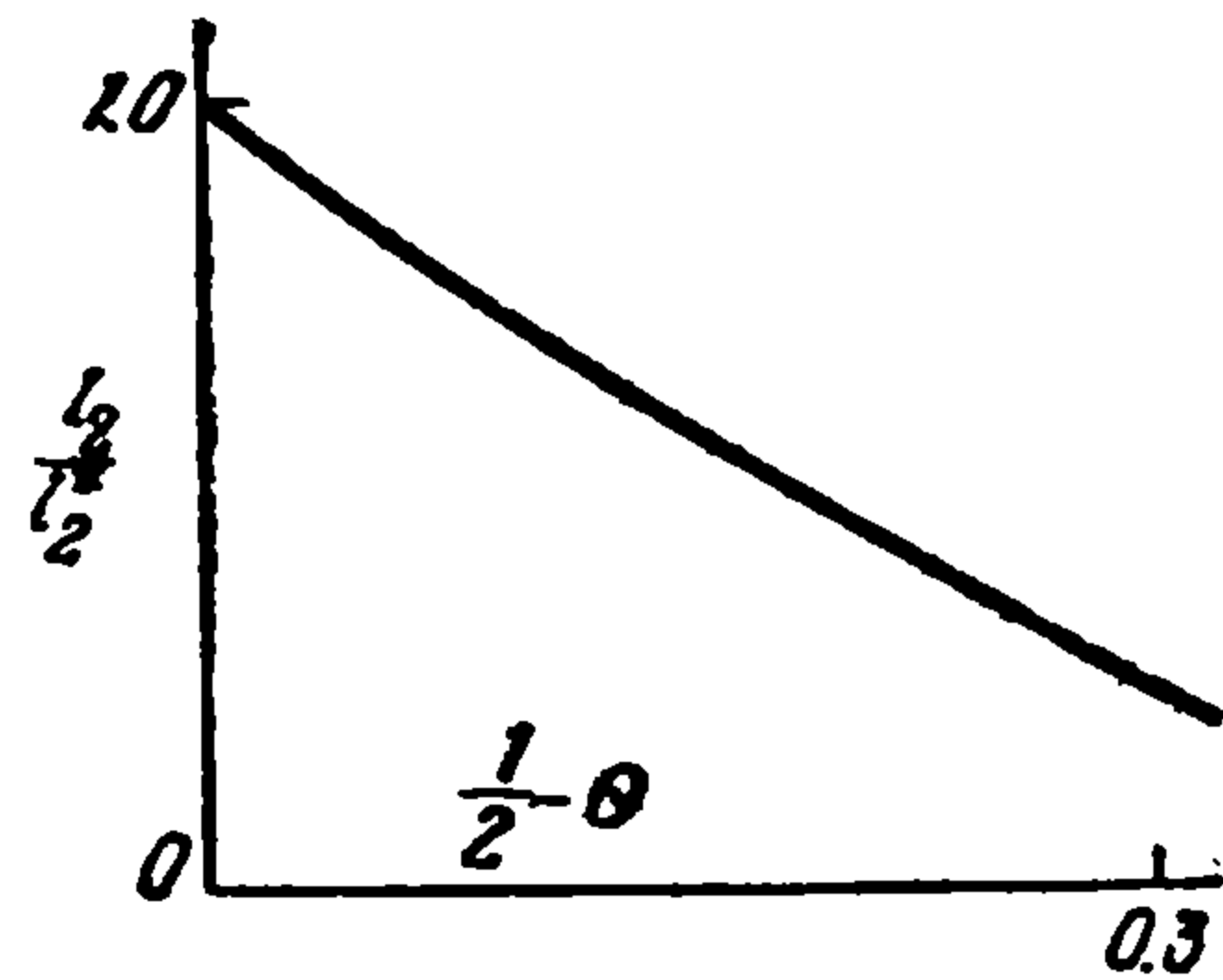
$$l_{20}^* = \frac{E^2 h^2}{4(1-\nu^2)^2 K^2}$$

График функции  $l_2^* / l_{20}^*$  в зависимости от  $m = V / c_2$  для значения коэффициента Пуассона  $\nu = 0.25$  приведен на фиг. 5. Мы видим, что при

достижении критической скорости, соответствующей обращению  $p$  в нуль, длина свободной части трещины также обращается в нуль. При скорости, превышающей критическую, рассматриваемая нами постановка задачи становится, как будет показано ниже, неприменимой.



Фиг. 5



Фиг. 6

Соотношение (5.4) можно представить в силу (5.7) в виде:

$$\frac{l_2}{l_2^*} = \frac{\pi^3}{\Gamma^2(\theta) \Gamma^2(1/2 - \theta) \cos^2 \pi\theta} \quad (5.9)$$

График зависимости  $l_2 / l_2^*$  от параметра  $\theta$ , характеризующего трение, представлен на фиг. 6.

2°. *Клин с закругленной передней частью.* Для оценки влияния закругления передней части клина рассмотрим, считая коэффициент трения равным нулю, клин, форма которого определяется соотношением

$$f(\xi - l_1) = \begin{cases} h & (\xi - l_1 > B) \\ h \left[ 1 - \frac{(B - \xi + l_1)^2}{B^2} \right] & (0 < \xi - l_1 < B) \end{cases} \quad (5.10)$$

где  $B$  — длина скругленной части клина. При  $B = 0$ , очевидно, получаем клин постоянной толщины. Не выписывая функции  $w_1(z)$ , приведем только уравнения, определяющие неизвестные параметры  $l_1$  и  $l_2$ . Используя соотношения (3.10) и (3.17), находим:

$$\frac{2B^2}{\beta l_2} = -l_2 \left[ 1 - \sqrt{\beta^2 - 1} \sqrt{4\beta^2(\beta^2 - 1) + 1} \right] + 2(B + l_1 - l_2) (1 + \sqrt{\beta^2 - 1})$$

$$1 - \frac{K \sqrt{l_2}}{\rho h} = \frac{2\beta}{B^2} \left[ (B + l_1) l_2 (1 - \sqrt{\beta^2 - 1}) - \frac{l_2^2}{4} (1 - \sqrt{\beta^2 - 1} \sqrt{4\beta^2(\beta^2 - 1) + 1}) \right] \quad (5.11)$$

где

$$\beta = \operatorname{arch} \sqrt{\frac{l_1 + B}{l_1}}$$

Для оценки влияния закруглений достаточно рассмотреть случай малых  $B$ . В этом случае второе уравнение (5.11) дает:

$$l_2 = l_1 + B - \frac{1}{2} B \sqrt[3]{\frac{B}{l_1}} \quad (5.12)$$

Подставляя (5.12) в первое уравнение (5.11) и отбрасывая члены порядка малости выше первого, находим

$$l_1 = \frac{p^2 h^2}{K^2} + O\left(B \sqrt[3]{\frac{B}{l_1}}\right) = l_1^* + O\left(B \sqrt[3]{\frac{B}{l_1^*}}\right) \quad (5.13)$$

где  $l_1^* = l_2^*$  — длина свободной части трещины для клина постоянной толщины. Мы видим, что малое скругление углов клина оказывает малое влияние на длину свободной части трещины.

3°. *Клин, закругленный по степенному закону.* Рассмотрим клин, уравнение поверхности которого представляется в виде:

$$f(\xi - l_1) = h \left[ 1 - \frac{A^n}{(A - l_1 + \xi)^n} \right] \quad (\xi - l_1 \geq 0) \quad (5.14)$$

где  $A$  — положительная константа. Снова пренебрежем трением на щеках клина, тогда соотношения (3.10) и (3.17), определяющие  $l_1$  и  $l_2$ , принимают для данного случая вид:

$$l_2^n = n A^n F_1(\beta), \quad \frac{K \sqrt{l_2}}{ph} = \frac{n A^n}{l_2^n} F_2(\beta), \quad \beta = \frac{l_1 - A}{l_2} < 1$$

$$F_1(\beta) = \int_1^\infty \frac{\xi^{1/2} d\xi}{\sqrt{\xi - 1} (\xi - \beta)^{n+1}} = \frac{B\left(\frac{1}{2}, n\right) F\left(n+1, \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}, -\frac{\beta}{1-\beta}\right)}{(1-\beta)^{n+1}} \quad (5.15)$$

$$F_2(\beta) = \int_1^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(\xi-1)} (\xi - \beta)^{n+1}} = \frac{B\left(\frac{1}{2}, n+1\right) F\left(n+1, \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{\beta}{1-\beta}\right)}{(1-\beta)^{n+1}}$$

где  $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, z)$  — гипергеометрическая функция,  $B(\alpha_1, \alpha_2)$  — бета-функция Эйлера; значения интегралов взяты в справочнике [10]. Исключая из уравнений (5.15)  $l_2$ , получаем уравнение для  $\beta$  в виде:

$$\frac{K \sqrt{A}}{ph} = F(\beta) = F_2(\beta) n^{-\frac{1}{2n}} [F_1(\beta)]^{-\frac{2n+1}{2n}} \quad (5.16)$$

Определив из этого уравнения  $\beta$ , находим  $l_2$  из первого уравнения (5.15). Поскольку этот пример представляет значительный интерес, более подробный его анализ будет выполнен в отдельной работе.

**§ 6. Предельная скорость распространения трещин.** Для исследуемой задачи расклинивания, так же как и для рассмотренной в работах Л. А. Галина [2, 3] задачи о штампе, движущемся с постоянной скоростью на границе полупространства, зависимость решения от скорости  $V$  определяется, главным образом, зависимостями от безразмерной скорости движения клина или штампа  $m = V/c_2$  констант  $p$  и  $q$ , определяемых соотношениями (2.10).

Как показывает проведенное исследование, в диапазоне  $0 \leq v \leq 1/2$ ,  $0 \leq m \leq 1$  величина  $q$  конечна и положительна, в то время как величина  $p$  обращается в нуль при достижении критической скорости, определяемой уравнением (фиг. 7)

$$\sqrt{1 - m_0^2} \sqrt{1 - \frac{1 - 2v}{2(1-v)} m_0^2} - \left(1 - \frac{1}{2} m_0^2\right)^2 = 0 \quad (6.1)$$

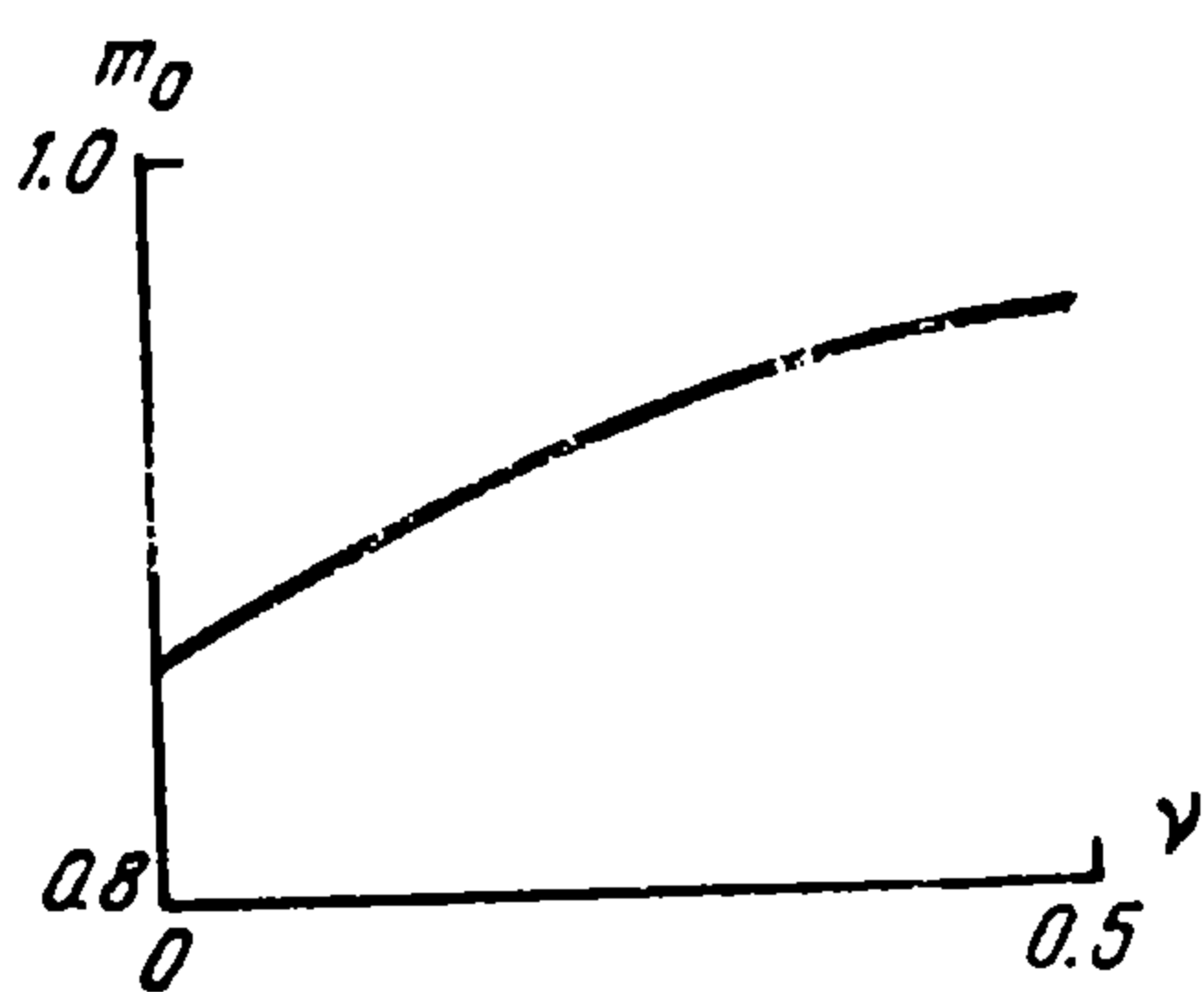
( $m_0 = V_0/c_2$ ,  $V_0$  — критическая скорость) и далее становится отрицательным. Замечательно, что уравнение (6.1) совпадает с уравнением, опре-

деляющим скорость поверхностной волны Релея в данном материале (см., например, [12]). Этот факт имеет принципиальное значение для рассматриваемых задач, он ограничивает применимость постановки исследуемых задач скоростями, меньшими релеевской. Покажем это на примере движущегося клина постоянной толщины (§ 5) и движущегося штампа с плоским основанием при отсутствии трения.

При расклинивании клином постоянной толщины  $2h$  получаются следующие выражения для напряжений  $\sigma_\xi$  и  $\sigma_\eta$  в точке  $\xi = -al_2$ , находящейся на расстоянии  $l_2(1+a)$  от передней точки клина (фиг. 4):

$$\sigma_\xi = \frac{\nu m^2 K^2 E}{2p^2 h (1-\nu^2) \sqrt{a(1+a) \left(1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} m^2\right)}}, \quad \sigma_\eta = \frac{K^2}{ph \sqrt{a(1+a)}} \quad (6.2)$$

При подходе к релеевской скорости эти напряжения стремятся к бесконечности, так как при этом  $p \rightarrow 0$ , причем растягивающее напряжение



Фиг. 7

$\sigma_\xi$  стремится к бесконечности быстрее, чем растягивающее напряжение  $\sigma_\eta$ . Поскольку никакой материал не может выдержать бесконечных растягивающих напряжений, это означает, что перед бегущей трещиной будут образовываться поперечные трещины, появление которых полностью изменит всю картину движения, так что принятая нами схема стационарного движения не будет больше соответствовать действительности. Явления, возникающие при

скорости движения клина, близкой к релеевской, по своему характеру представляют своеобразный резонанс. Заметим теперь, что из формулы (3.8) вытекает для любого клина, что при  $p \rightarrow 0$  константа  $c_0$  стремится к нулю. Из (3.16) следует, что при  $p \rightarrow 0$  стремится к нулю константа  $l_2$ . Таким образом, длина свободной части трещины стремится к нулю при подходе к релеевской скорости, откуда следует очень важный вывод: скорость распространения трещин в данном материале не может превышать скорости распространения поверхностных волн Релея в этом материале.

При скоростях движения клина, больших релеевской скорости, постановка задачи расклинивания существенно меняется: клин необходимо считать полностью соприкасающимся с расклиниваемым телом, — свободных участков поверхности в этом случае не образуется. Нам представляется также, что рассмотрение задач расклинивания, движения штампа и других подобных задач при околорелеевских скоростях должно опираться на существенно иную постановку задачи и модель расклиниваемого тела.

Помимо релеевской скорости для изотропных тел существует еще одна дорелеевская критическая скорость. Естественно предполагать, что в изотропном теле свободное развитие трещины происходит по направлению максимального разрывающего напряжения. Поэтому, для того чтобы в задаче о расклинивании трещина перед клином развивалась, оставаясь прямолинейной, необходимо чтобы продолжение разреза — отрицательная часть оси  $x$  — было бы линией максимальных разрывающих напряжений, по крайней мере вблизи конца трещины. Проведем

теперь окружность некоторого радиуса  $r$ , малого сравнительно с размером свободной части трещины, но большого сравнительно с размером концевой области, с центром в конце трещины. Пусть  $\gamma$  — угол, отсчитываемый от продолжения разреза, тогда при малых  $\gamma$  разрывающее напряжение представляется в виде

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \frac{K}{\pi \sqrt{r} (GN - MH)} \{GN - MH - \alpha\gamma^2 + O(\gamma^4)\} \quad (6.3)$$

где

$$\alpha = FM - LN + \frac{3}{4}(GN - MH) + \frac{3}{8}(GNk_1^2 - MHk_2^2) - MN(k_1 - k_2) = \\ = \frac{E^2 f(m, \nu)}{(1 + \nu)^2 (1 - 2\nu)^2} \sqrt{1 - \frac{1-\nu}{2(1-\nu)} m^2}$$

$$f(m, \nu) = (1 - \frac{1}{2} m^2) (1 + \frac{\nu}{2(1-\nu)} m^2) - \sqrt{1 - m^2} \sqrt{1 - \frac{1-\nu}{2(1-\nu)} m^2} + \\ + \frac{3}{4} [(1 - \frac{1}{2} m^2)^2 - \sqrt{1 - m^2} \sqrt{1 - \frac{1-\nu}{2(1-\nu)} m^2}] + \\ + \frac{3}{8} \sqrt{1 - \frac{1-\nu}{2(1-\nu)} m^2} [(1 - \frac{1}{2} m^2)^2 \sqrt{1 - \frac{1-\nu}{2(1-\nu)} m^2} - (1 - m^2)^{3/2}] - \\ - \sqrt{1 - \frac{1-\nu}{2(1-\nu)} m^2} (1 - \frac{1}{2} m^2) [\sqrt{1 - \frac{1-\nu}{2(1-\nu)} m^2} - \sqrt{1 - m^2}]$$

Величина  $\alpha$  положительна при  $0 \leq m < m^*$  и отрицательна при  $m^* < m \leq m_0$ , где  $m^*(\nu)$  определяется соотношением

$$f(m^*, \nu) = 0 \quad (6.4)$$

а  $m_0$  — соотношением (6.1).

Приведем значения величины  $m^*$  для некоторых значений  $\nu$

|               |       |       |       |       |       |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\nu = 0$     | 0.1   | 0.2   | 0.3   | 0.3   | 0.5   |
| $m^* = 0.510$ | 0.560 | 0.603 | 0.653 | 0.707 | 0.760 |

Таким образом, при  $m > m^*$  прямая линия  $\gamma = 0$  становится линией минимальных разрывающих напряжений, тогда как при  $m < m^*$  эта линия является линией максимальных разрывающих напряжений. Поэтому при переходе через критическую скорость движения клина  $V^* = m^* c_2$  трещина, бегущая перед клином, в изотропном теле начинает искривляться. Рассмотрение задачи расклинивания в предлагаемой постановке ограничивается, если прямолинейность трещины заранее не обеспечена, скоростями, меньшими скорости  $V^*$ . (Прямолинейность трещины в изотропном теле можно обеспечить, например, сделав в теле прямолинейный разрез и затем склеив его так, чтобы в склеенном месте сцепление было слабее, чем в исходном материале. Тело при этом остается изотропным, а прямолинейность трещины заведомо имеет место.) Справедливо и более общее утверждение: трещина в изотропном теле может свободно распространяться, оставаясь прямолинейной, только при скоростях, меньших  $V^*$ . Отметим, что Иоффе [5] установила несколько иным способом существование этой критической скорости, рассматривая задачу о движущейся трещине постоянной длины в однородном поле напряжений. Однако уравнение (6.4), определяющее критическую скорость  $V^*$ , в работе Иоффе [5] указано не было.

В случае, если прямолинейность развивающейся трещины в изотропном теле тем или иным способом обеспечена, скорость развития свободной трещины ограничивается только релеевской скоростью.

Определением максимальной скорости распространения трещины в хрупком теле, находящемся в однородном поле напряжений, занимались Робертс и Уэллс [13]. Однако их подход, основанный на решении статической задачи теории упругости, не может быть признан пригодным для количественных расчетов.

Такая же картина имеет место в задаче о движущемся штампе, — эту задачу можно рассматривать только для скоростей движения штампа, меньших релеевской. В самом деле, в случае штампа с плоским основанием выражения для напряжений имеют вид:

$$\sigma_{\xi} = \frac{1}{p\pi} \left\{ \frac{MF}{CN - DM} \operatorname{Im} [w_1(z_2)] - \frac{NL}{CN - DM} \operatorname{Im} [w_1(z_1)] \right\} \quad (6.5)$$

$$\sigma_{\eta} = - \frac{1}{p\pi} \left\{ \frac{GN}{CN - DM} \operatorname{Im} [w_1(z_2)] - \frac{MH}{CN - DM} \operatorname{Im} [w_1(z_1)] \right\} \quad (6.6)$$

$$w_1(z) = - \frac{iP_0}{V\sqrt{l^2 - z^2}}, \quad z_1 = \xi + ik_1\eta, \quad z_2 = \xi + ik_2\eta$$

коэффициенты  $C, N, M, F, G, H$  определены формулами (2.3). При подходе к релеевской скорости  $p \rightarrow 0$ , а выражения в скобках остаются конечными, так что напряжения  $\sigma_{\xi}$  и  $\sigma_{\eta}$  стремятся к бесконечности и снова возникают своеобразные резонансные явления, связанные с разрушением материала внутри тела и радикальным изменением картины движения. Таким образом, и для этой задачи принимаемая стационарная схема движения оказывается возможной только для скоростей, меньших релеевской.

Напомним, что Эшльби [14] получил, что скорость распространения релеевских волн является верхним пределом скорости движения линейной дислокации в материале, если принять во внимание атомную природу материала.

Полученные в настоящей работе результаты еще раз подтверждают значение релеевской скорости для проблем динамики твердого тела.

Поступила 19 III 1960

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. ПММ, 1959, т. XVIII, вып. 3,4,5.
2. Галин Л. А. Смешанные задачи теории упругости с силами трения для полуплоскости. Докл. АН СССР, 1943, т. 39, № 3.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. ГИТТЛ, Москва, 1953.
4. Radok J. R. M. On the solutions of problems of dynamic plane elasticity. Quarterly of applied mathematics, vol. XIV, Oct. 1956, No. 3.
5. Yoffe E. The moving Griffith crack. Phil. mag., 1951, vol. 42, No. 330.
6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. ГИТТЛ, М., 1946.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматиздат, М., 1958.
8. Баренблатт Г. И. и Христианович С. А. Об обрушении кровли при горных выработках. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 11.
9. Рыжик И. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов. ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
10. Bateman H. Tables of Integral Transforms. N. Y. McGraw Hill, 1954.
11. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. ГИТТЛ, М.—Л., 1958.
12. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, М.—Л., 1935.
13. Roberts D. K. and Wells A. A. The velocity of brittle fracture. Engineering, vol. 178, 1954.
14. Eshelby J. D. Uniformly moving dislocation. Proc. Phys. Soc. A62, part 5, No. 353A, 1949.