Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ПРИРАЩЕНИИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ И ПОВЕРХНОСТИ ТЕКУЧЕСТИ

А. А. Ильюшин

(Москва)

Если тело находится в равновесии при системе сил Q_M и к нему в некоторый момент постепенно прикладывается, а затем снимается дополнительная система сил $\Delta Q_м$, то на этом замкнутом (по изменению системы сил) цикле работа системы $\Delta Q_м$ должна быть положительной или равна нулю,— в этом состоит выдвинутый Друккером [1] постулат теории пластичности. Он имеет существенное значение и действительно может быть принят для материалов, устойчиво упрочняющихся при всех видах сложного нагружения.

Если же некоторые из состояний являются неустойчивыми, то для них справедливо обратное утверждение: работа отрицательна. Такие состояния бывают у некоторых материалов даже при простом растяжении образца, примером чего является «зуб текучести» (верхний предел упругости) мягкой стали; оснований к возникновению таких состояний у некоторых поликристаллических материалов при сложном нагружении еще больше: конгломерат зерен, ориентированно деформированный, может быть неустойчив по отношению, правда, к очень небольшим сдвигам резко отличной ориентации.

Постулат Друккера, с нашей точки зрения, справедлив при всевозможных пластических деформациях тел, исключая, может быть, некоторые особые точки траекторий деформирования, и ниже мы не будем учитывать этих возможных исключений. Однако известные положения о совпадении вектора приращения пластической деформации с нормалью к поверхности текучести и о выпуклости этой поверхности в общем случае не следуют из постулата. Отметить это необходимо потому, что указанные положения приняты как теоретически доказанные законы. Эти положения, как увидим, справедливы только в предположении, что пластическая деформация тела при любом нагружении не сопровождается заметным изменением упругих свойств. Поскольку вопрос о деформационной анизотропии, возникающей в процессе пластического течения, представляется одним из принципиальных, целесообразно получить строгие теоретические следствия постулата Друккера в общем случае.

Воспользуемся векторными обозначениями, принятыми в работе [2]. Пусть к моменту времени $t = t_k$ конец вектора напряжения однородно деформированного тела в пространстве напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ описал путь L, определенный функцией $\sigma(t)$ и получил значение $\boldsymbol{\sigma}_k = \boldsymbol{\sigma}(t_k)$. Путь L и значение $\boldsymbol{\sigma}_k$ будем называть точкой k. Путем разгрузок из точки k и повторных упругих нагрузок по различным направлениям можно получить точки T на поверхности текучести, т. е. построить поверхность текучести $f_k(\boldsymbol{\sigma}_T) = 0$, внутри которой пластическая деформация остается постоянной, а вне возникают вторичные пластические деформации. В соответствии с постулатом Друккера рассмотрим произвольную фиксированную точку M с вектором $\boldsymbol{\sigma}_м$ внутри f_k, точку T с вектором $\boldsymbol{\sigma}_T$ на f_k и весьма близкую к T точку P вне f_k с вектором $\boldsymbol{\sigma}_p$. Произведем замкнутый цикл нагружение — разгрузка по пути $MTPTM$. Движения по путям MT и PTM (без третичного выхода за предел упругости) консервативны, т. е. не зависят от траекторий, а только от точек (M,T) и (P,M), так как соответствующие деформации являются упругими. Путь TP должен быть задан вполне, если мы хотим, чтобы все состояния на нем были определенны, так же, как задан путь L для точки k. Будем считать, что путь TP прямолинеен, определен постоянным единичным вектором направления $\mathbf{e}$ и имеет длину s. Путь MT для простоты считаем также прямолинейным, длиною s_1, с вектором направления $\mathbf{e}_1$. Следовательно

$$\begin{aligned} &(MT) \qquad \sigma - \sigma_M = \Delta\sigma = s_1'\mathbf{e}_1, \qquad (0 \leqslant s_1' \leqslant s_1) \\ &(TP) \qquad \sigma - \sigma \ = \Delta\sigma = s_1\mathbf{e}_1 + s'e, \qquad (0 \leqslant s' \leqslant s) \end{aligned} \tag{1}$$

Гипотеза линейной упругости состоит в том, что упругая часть общей деформации

$$э = э^e + э^p \tag{2}$$

т. е. $э^e$ является линейной однородной функцией напряжения

$$э^e = (\varepsilon)\,\sigma \tag{3}$$

где симметричная матрица (ε) коэффициентов упругости зависит от предшествующих пластических деформаций, т. е. внутри f_k постоянна и определяется точкой k; при обратном движении по пути PTM матрица (ε) также постоянна и определяется точкой P (понимая под точкой P совокупность точки k, пути TP и σ_p); на пути TP (ε) изменяется от $(\varepsilon)_T$ до $(\varepsilon)_p$, причем является непрерывной функцией от s'.

Заметим, что гипотеза линейной упругости не строго выполняется и потому (3) следует рассматривать как апроксимацию. Из этой гипотезы вытекают выражения

$$\begin{aligned} &(MT) \qquad dэ = dэ^e = (\varepsilon)_k d\sigma = (\varepsilon)_T d\sigma, \qquad d\sigma = \mathbf{e}_1 ds_1' \\ &(TP) \qquad dэ = dэ^p + (\varepsilon)_s d\sigma + \frac{d}{ds'}(\varepsilon)\,\sigma\, ds', \qquad d\sigma = \mathbf{e}\, ds' \\ &(PT) \qquad dэ = dэ^e = (\varepsilon)_p d\sigma, \qquad d\sigma = \mathbf{e}\, ds' \ldots \\ &(TM) \qquad dэ = dэ^e = (\varepsilon)_p d\sigma, \qquad d\sigma = \mathbf{e}_1 ds_1' \end{aligned}$$

Постулат Друккера утверждает неотрицательность работы

$$W = \int\limits_{MTPTM} \Delta\sigma dэ$$

При вычислении работы W нам не понадобятся малые более первого порядка по s и второго — по s_1, и потому в разложениях

$$\begin{gathered} (\varepsilon)_{s'} = (\varepsilon)_T + s'\left[\frac{d}{ds}(\varepsilon)\right]_T + \cdots \qquad (\varepsilon)_p = (\varepsilon)_T + s\left[\frac{d}{ds}(\varepsilon)\right]_T + \cdots \\ \frac{d}{ds'}(\varepsilon)_{s'} = \left[\frac{d}{ds'}(\varepsilon)\right]_T + s'\left[\frac{d^2}{ds^2}(\varepsilon)\right]_T + \cdots \end{gathered} \tag{6}$$

достаточно ограничиться только выписанными членами. Очевидно

$$\int\limits_{PTM} \Delta\sigma\, dэ^e = -\int\limits_{MTP} \Delta\sigma\, dэ^e = -\int\limits_{MTP} \Delta\sigma\,(\varepsilon)_p\, d\sigma$$

и потому

$$\begin{aligned} W - \int\limits_{TP} \Delta\sigma dэ^p = &\int\limits_{MT} \Delta\sigma\,[(\varepsilon)_T - (\varepsilon)_P]\, d\sigma + \\ &+ \int\limits_{TP} \Delta\sigma\,[(\varepsilon)_{s'} - (\varepsilon)_P]\, d\sigma + \int\limits_{TP} \Delta\sigma\, \frac{d}{ds'}(\varepsilon)\,\sigma\, ds' \end{aligned}$$

Учитывая (1), (4) и (6), заключаем, что первый из выписанных здесь интегралов правой части будет малым порядка ss_1^2, второй порядка s^2s_1, третий порядка s_1s. Интеграл, входящий в левую часть, с точностью до s^2s_1 будет

$$\int\limits_{TP} \Delta\sigma\, d\mathfrak{Э}^p = s_1 s \mathbf{e}_1 \left(\frac{d\mathfrak{Э}^p}{ds}\right)_T$$

Сохраняя малые порядка ss_1 и ss_1^2 и отбрасывая $s^2s_1, \ldots$, после вычислений получим

$$W = ss_1\mathbf{e}_1 \left[\left(\frac{d\mathfrak{Э}^p}{ds}\right)_T + (\varepsilon)_T{}'\, \sigma_M\right] + \frac{1}{2}\, ss_1^2\mathbf{e}_1\,(\varepsilon)_T{}'\, \mathbf{e}_1 \tag{7}$$

причем производные

$$\frac{d\mathfrak{Э}^p}{ds}, \qquad (\varepsilon)_T{}' = \frac{d}{ds}(\varepsilon)$$

берутся в точке T по пути TP. Вектор

$$\mathfrak{Э}' = \left[\frac{d\mathfrak{Э}^p}{ds} + (\varepsilon)'\,\sigma\right]_T \tag{8}$$

не зависит от положения точки M, т. е. направления вектора $\mathbf{e}_1$. Приближая точку M к точке T_1, расположенной на поверхности f_k на расстоянии s_1 от T и переходя к пределу $s \to 0$, $s_1 \to 0$ при условии $s / s_1 \to 0$, и учитывая, что вектор $\mathbf{e}_1$ переходит в касательную плоскость к f_k в точке T, из постулата Друккера получаем

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathfrak{Э}' \geqslant 0$$

для любого $\mathbf{e}_1$ в касательной плоскости. Это возможно лишь в том случае, если вектор $\mathfrak{Э}'$ направлен по нормали $\mathbf{n}$ к поверхности f_k в точке T:

$$\mathfrak{Э}' = |\mathfrak{Э}'| \cdot \mathbf{n} \tag{9}$$

Следовательно, вытекающая из положительности дополнительной работы форма связи между напряжениями и пластическими деформациями такова:

$$\frac{d\mathfrak{Э}^p}{ds} + (\varepsilon)'\,\sigma = G \operatorname{grad} f \tag{10}$$

где $f(\sigma) = 0$ — уравнение поверхности текучести, $ds = |d\sigma|$ и $(\varepsilon)'$ — производная матрицы коэффициентов упругости (обратных величин модулей) по s в рассматриваемой точке σ. Отличие (10) от обычной формы выражается вторым слагаемым $(\varepsilon)'\,\sigma$ и оценка его величины должна делаться по сравнению с $(\varepsilon)\, d\sigma \,/\, ds$, поскольку речь идет о правильности учета упругих свойств. Отношение этих величин даже по модулю

$$\delta = \left|\frac{d\,(\varepsilon)\,\sigma}{(\varepsilon)\,d\sigma}\right| \tag{11}$$

не является малым априори. Например, при простом растяжении образца ($\varepsilon = 1 / E$, E — модуль упругости)

$$\delta = -\frac{\sigma dE}{E d\sigma}$$

для ряда материалов будет порядка 1. Принцип градиентальности, следовательно, справедлив с точностью до влияния упругих свойств вообще. Существенные отклонения от него следует ожидать в окрестности угловых точек на траекториях деформаций и напряжений, где упругие свойства сказываются особенно сильно.

Проведем теперь через вектор $\mathbf{e}_1$ и нормаль $\mathbf{n}$ в точке T двумерную плоскость Π, которая пересечет поверхность текучести $f_k = 0$ по некоторой плоской кривой, а касательную гиперплоскость в точке T — по прямой $T \sim x$. Расстояние z от этой прямой до кривой, измеряемое в плоскости Π в направлении, параллельном внешней нормали $\mathbf{n}$, в точке x с точностью до малых высшего порядка, выражается через кривизну кривой $\varkappa$, которая считается положительной, если кривая является вогнутой:

$$z = \frac{1}{2}\varkappa x^2$$

Точка T_1 на поверхности, с которой совмещена точка M, удалена от T на расстояние $\sim s_1$, и ее возвышение над прямой $T - x$ (при $\varkappa > 0$) равно $\frac{1}{2}\varkappa s_1^2$. Во втором приближении, следовательно, вектор $\mathbf{e}_1$ (направляемый от T_1 к T) составляет с $\mathbf{n}$ тупой угол $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\varkappa s_1$, и $\mathbf{e}_1\mathbf{n}_1 = \frac{1}{2}\varkappa s_1$.

Выражение (7) для работы W, учитывая $\sigma_M = \sigma_T - s_1\mathbf{e}_1$ во втором приближении, согласно (9), можно представить в виде

$$W = \frac{1}{2} s s_1^2 [\mathbf{e}_1'(\varepsilon)_T'\mathbf{e}_1 - \varkappa \,|\, Э' \,|] \tag{12}$$

Из условия $W > 0$ следует

$$\varkappa \,|\, Э' \,| < \mathbf{e}_1 (\varepsilon)_T'\mathbf{e}_1 \tag{13}$$

причем $\mathbf{e}_1$ — единичный вектор любой касательной прямой к поверхности f_k в точке T, а $(\varepsilon)_T' = d(\varepsilon) / ds$ — симметричная матрица производных от (ε) по произвольному направлению $\mathbf{e}$, внешнему или касательному относительно f_k. Ясно, что при этих условиях нет никаких оснований для утверждения, что симметричная квадратичная форма относительно направляющих косинусов $\mathbf{e}_1(\gamma_1, \ldots, \gamma_5)$

$$\mathbf{e}_1 (\varepsilon)_T' \mathbf{e}_1 = \varepsilon_{ij}' \gamma_i \gamma_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 5) \tag{14}$$

будет положительна для любых k, $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}$; учитывая, что коэффициенты упругости ε_{ij} представляют матрицу, обратную по отношению к матрице модулей упругости E_{ij} и в ряде известных простейших случаев они возрастают по мере роста пластических деформаций (модули убывают), наверное, существуют такие материалы и пути нагружения, при которых форма (14) отрицательна; при этом, согласно (13), кривизна $\varkappa$ может быть как отрицательной (выпуклость), так и положительной (вогнутость). (Если при простом нагружении модули убывают, то, вероятнее всего, при обратных пластических деформациях они в какой-то степени восстанавливаются, т. е. $\mathbf{e}_1 (\varepsilon)'\mathbf{e}_1 < 0$.)

Гипотеза о выпуклости f_k, следовательно, также не имеет теоретических оснований, если не пренебрегать упругими свойствами тела. Для идеального жестко-пластического тела она, как и гипотеза градиентальности, представляется теоретически обоснованной.

Поступила 2 IV 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Drucker D. C. Varietional principles in the mathematical theory of plasticity, Calcules of variations and its applications, Proc. of Symposia in Applied Mathematics, vol. VIII, 1958.
2. Ильюшин А. А. О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике включенных сред, ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 6.