

## О НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ВОПРОСАХ ТЕРМОДИНАМИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

С. С. Григорян

(Москва)

При построении математических моделей, предназначенных для описания движений различного рода сред (воды и других капельных жидкостей, упруго и пластически деформируемых материалов) часто основные соотношения модели формулируются без привлечения закона сохранения энергии — первого закона термодинамики. Система уравнений модели оказывается замкнутой, и для нее ставятся и решаются различные задачи. Однако модель, построенная без использования термодинамических соображений, не может считаться полной моделью, и возникает вопрос, можно ли такую модель обосновать термодинамически, не противоречит ли она основным представлениям термодинамики.

С другой стороны, имея термодинамическое описание некоторой среды для обратимых процессов, не сопровождаемых макроскопическим движением, нужно, формулируя систему уравнений, описывающих движения среды, уметь также обобщать термодинамику среды для процессов, происходящих при наличии таких движений, и обычно усложненных диссипативными (необратимыми) факторами. При этом возникает вопрос, можно ли сохранить термодинамику для случая движений такой же, какова она для обратимых процессов и покоя, или ее нужно существенно изменить. Очевидно, возможность сохранения термодинамики без изменений представляет существенный интерес, и важно в каждом конкретном случае выяснить, имеется ли такая возможность.

В предлагаемой заметке дается обсуждение этих вопросов (ясного анализа их, по-видимому, в литературе не существует) в связи с тем, что они в настоящее время приобрели известную актуальность, особенно в механике твердых деформируемых сред.

1. Рассмотрим идеальную жидкость, уравнение состояния которой имеет вид<sup>1</sup>

$$p = f(\rho) \quad (1.1)$$

где  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность. Из соотношения

$$TdS = dE + pdV \quad (1.2)$$

являющегося следствием первого и второго законов термодинамики для обратимых процессов [1], где  $T$  — температура,  $S$ ,  $E$  — энтропия и внутренняя энергия единицы массы, а  $V = 1/\rho$ , вытекает как следствие условия интегрируемости  $dS$  соотношение

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \quad (1.3)$$

<sup>1</sup> Обсуждение термодинамических свойств среды такого типа имеется в [2]. Здесь мы этот случай рассматриваем для полноты изложения и выявления некоторых дополнительных деталей.

Подставляя сюда уравнение состояния (1.1), получаем

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = -p = -f\left(\frac{1}{V}\right), \quad \text{или,} \quad E(T, V) = -\int f\left(\frac{1}{V}\right) dV + A(T)$$

где  $A(T)$  — произвольная функция температуры. Но

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = A'(T) = C_V$$

где  $C_V$  — теплоемкость при постоянном объеме, которая, таким образом, оказывается зависящей только от температуры. Поэтому окончательно получаем следующее выражение для внутренней энергии среды

$$E(T, V) = \int C_V(T) dT - \int f\left(\frac{1}{V}\right) dV \quad (1.4)$$

Такая среда называется средой с разделяющейся внутренней энергией (энергия разделяется на часть, зависящую только от температуры, и часть, зависящую только от удельного объема).

Подставив (1.4) в (1.2), получаем после интегрирования выражение для энтропии

$$S = \int \frac{C_V(T)}{T} dT \quad (1.5)$$

которая оказывается функцией только температуры. Аналогично можно получить выражения для всех остальных термодинамических характеристических функций. В частности, для свободной энергии  $\Psi$  будем иметь

$$\Psi = -\int f\left(\frac{1}{V}\right) dV + \int C_V(T) dT - T \int \frac{C_V(T)}{T} dT \quad (1.6)$$

т. е. она также разделяется. Далее, так как

$$\delta Q = TdS = T \frac{dS}{dT} dT = CdT = C_V(T) dT$$

то все теплоемкости в рассматриваемой среде совпадают между собой и зависят только от температуры.

Наконец, для этой среды коэффициент теплового расширения  $\alpha$  равен нулю, ибо в силу (1.1)

$$\alpha \equiv \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = 0 \quad (1.7)$$

Обратно, если коэффициент теплового расширения равен нулю, то среда будет характеризоваться единственным коэффициентом теплоемкости, разделяющейся внутренней энергией и уравнением состояния вида (1.1).

Интересно отметить, что в среде рассматриваемого типа изотермы и адиабаты совпадают и поэтому для такой среды невозможно организовать цикл Карно.

Для описания движений воды с учетом сжимаемости часто используют уравнение состояния вида (1.1) (см., например, [3]). При этом система уравнений, описывающая эти движения, замыкается без использования уравнения энергии. Мы видим, что для такой среды можно построить термодинамику обратимых процессов по вышеизложенной схеме, а если еще предположить, что вязкость и теплопроводность отсутствуют и что

процессы, происходящие в жидкости при ее движении, также обратимы, т. е. для них применима та же термодинамика, что и для покоя, то модель делается термодинамически дополненной и корректной, а уравнение энергии примет вид

$$T \frac{dS}{dt} = C_V(T) \frac{dT}{dt} = 0 \quad (1.8)$$

При этом механическая задача полностью отделена от тепловой: система уравнений для нахождения полей скоростей, давления и плотности замкнута без уравнения (1.8) и решается независимо от последнего. После нахождения поля скоростей можно, если это нужно, решить уравнение (1.8) и найти поле температур.

Другим, более частным, случаем среды рассмотренного выше типа является модель несжимаемой идеальной нетеплопроводной жидкости. Все сказанное выше относится и к этому случаю.

Примером модели твердой деформируемой среды, подобной в термодинамическом отношении рассмотренной выше, является модель идеального изотропного упругого тела Гука. Рассматривая малые статические деформации в такой среде как обратимые процессы, можно построить термодинамику в следующем виде [4]. Первый и второй законы термодинамики приводят к соотношению

$$TdS = dE - \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (1.9)$$

где  $S$ ,  $E$  — энтропия и внутренняя энергия единицы объема (ввиду малости деформаций, рассматриваемых моделью, это приближенно соответствует также величинам, отнесенным к единице массы),  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений,  $\epsilon_{ij}$  — тензора малых деформаций. Здесь параметрами состояния считаются температура  $T$  и  $\epsilon_{ij}$ .

Если связь между напряжениями и деформациями задается законом Гука

$$\sigma_{ij} = K \epsilon_{ll} \delta_{ij} + 2G (\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{ll} \delta_{ij}) \quad (1.10)$$

(повторяющиеся индексы означают суммирование), а упругие постоянные  $K$  и  $G$  не зависят от температуры, то из соотношения, вытекающего из условия интегрируемости  $dS$

$$\left( \frac{\partial E}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_T - \sigma_{ij} = -T \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \right)_{\epsilon_{ij}} \quad (1.11)$$

вполне аналогичного (1.3), получается

$$\left( \frac{\partial E}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_T = \sigma_{ij}$$

то после интегрирования с использованием (1.10) дает

$$E(T, \epsilon_{ij}) = \frac{K}{2} (\epsilon_{ll})^2 + G (\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{ll} \delta_{ij})^2 + A(T) \quad (1.12)$$

Если обозначить аналогично  $C_V$  теплоемкость при постоянной деформации через  $C_{\epsilon_{ij}}$ , то из (1.12) будем иметь

$$C_{\epsilon_{ij}} = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_{\epsilon_{ij}} = A'(T) = C_{\epsilon_{ij}}(T)$$

т. е. теплоемкость эта будет зависеть только от температуры.

Окончательно внутренняя энергия будет иметь вид

$$E(T, \varepsilon_{ij}) = \frac{K}{2} (\varepsilon_{ii})^2 + G \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{ii} \delta_{ij} \right)^2 + \int C_{\varepsilon_{ij}}(T) dT \quad (1.13)$$

Подставив (1.13) в (1.9), получаем после интегрирования выражение для энтропии

$$S = \int \frac{C_{\varepsilon_{ij}}(T)}{T} dT \quad (1.14)$$

вполне аналогичное (1.5).

Так же, как и выше, убеждаемся в том, что все теплоемкости совпадают, поэтому у коэффициента  $C_{\varepsilon_{ij}}(T)$  можно опустить значок  $\varepsilon_{ij}$ , что коэффициент теплового расширения равен нулю, и, следовательно, в среде не могут возникнуть температурные напряжения, и т. д. Можно, как и там, пользуясь (1.13) и (1.14), написать выражения для всех остальных термодинамических характеристических функций, в частности, для свободной энергии будем иметь аналогично (1.6)

$$\Psi = \frac{K}{2} (\varepsilon_{ii})^2 + G \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{ii} \delta_{ij} \right)^2 + \int C(T) dT - T \int \frac{C(T)}{T} dT \quad (1.15)$$

Таким образом, если упругие постоянные в законе Гука, играющем в данном случае роль уравнения состояния (аналог (1.1)), не зависят от температуры, то полная термодинамическая модель среды также оказывается моделью с разделяющейся энергией и с энтропией, зависящей только от температуры.

Предположив, как и выше, что деформации среды в процессе движения также описываются тем же законом Гука и что они являются обратимыми, и термодинамика, установленная для статических обратимых процессов, сохраняется и в движении, мы получим модель среды, пригодную для описания и динамических процессов. Здесь также система динамических уравнений замкнута без уравнения энергии, а уравнение энергии сводится в том же приближении к простому соотношению

$$T \frac{dS}{dt} = C \frac{dT}{dt} \approx C \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (1.16)$$

В рассмотренных выше примерах показано, что построение замкнутой системы уравнений без использования закона сохранения энергии, вообще говоря, не противоречит этому закону, и для таких моделей можно построить термодинамику. Однако в этих примерах мы имели дело только с обратимыми процессами. В большинстве же случаев движение среды сопровождается необратимыми диссипативными явлениями.

При построении термодинамики с учетом этих явлений возникает вопрос о том, какова система параметров состояния в этом случае, может ли она быть сохранена такой же, как и для обратимых процессов, или она должна быть дополнена новыми параметрами, связанными с характеристиками диссипативных факторов. Рассматриваемые ниже примеры показывают, что в некоторых случаях можно сохранить систему параметров состояния и вид термодинамических функций без изменения, а в других, более сложных, случаях термодинамические функции могут зависеть еще от дополнительных параметров, которые, однако, не являются термодинамическими параметрами состояния в обычном понимании, а характеризуют необратимое изменение свойств среды, которое может происходить при протекании необратимых диссипативных процессов в среде.

2. Для модели несжимаемой, вязкой и теплопроводной жидкости принято считать, что сохраняется описанная выше термодинамика с единственным параметром состояния — температурой  $T$ , сохраняется замкнутость системы механических уравнений (в предположении о независимости коэффициента вязкости от температуры) без использования закона сохранения энергии, а закон сохранения энергии дает дополнительное уравнение — уравнение притока тепла, интегрируя которое, можно найти распределение и изменение со временем температуры. Именно, из предположения о том, что сохраняются соотношения

$$TdS = dE = C(T) dT \left( dV = d \frac{1}{\rho} \equiv 0 \right)$$

и из уравнения притока тепла, имеющего в общем случае вид

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \rho \frac{dE}{dt} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} e_{ij} \quad \left( e_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1)$$

где  $\delta Q / \delta t$  — внешний приток тепла в единицу времени к единице объема,  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений, а  $e_{ij}$  — тензора скоростей деформаций, следует для рассматриваемого случая

$$\rho C(T) \frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \mu e_{ij} e_{ij} + \operatorname{div} (\kappa \operatorname{grad} T) \quad (2.2)$$

при условии, что внешний приток тепла связан только с теплопроводностью ( $\mu$  и  $\kappa$  — коэффициенты вязкости и теплопроводности). Решив динамическую задачу независимо от (2.2) и найдя поле скоростей, можно из уравнения (2.2) найти температуру  $T$ .

Возможность такого обобщения модели на случай, когда имеются вязкость и теплопроводность, подтверждается согласием получающихся при этом результатов с опытом.

Аналогично можно поступить и в случае, когда жидкость сжимаема, а уравнение состояния имеет вид (1.1). Предположив, что термодинамика сохраняется и для движения с учетом вязкости и теплопроводности, т. е. что остаются справедливыми соотношения (1.1), (1.4), (1.5), а вязкость определяется законом Ньютона, причем коэффициент вязкости не зависит от температуры, получаем из уравнения (2.1)

$$\rho C(T) \frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \mu e_{ij} e_{ij} - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \mathbf{V})^2 + \operatorname{div} (\kappa \operatorname{grad} T) \quad (2.3)$$

причем опять система динамических уравнений оказывается замкнутой независимо от уравнения (2.3), которое служит для определения температуры  $T$  после того, как поля плотности и скоростей найдены путем решения динамической задачи. Как и выше, справедливость таким образом построенной модели может быть установлена лишь опытом, сама же модель как таковая вполне корректна динамически и термодинамически.

В качестве третьего примера рассмотрим модель вязкого теплопроводного газа, на которой основана современная газовая динамика. При построении этой модели также предполагается, что система параметров состояния и вид термодинамических функций остаются для движущегося газа такими же, каковы они для обратимых квазистатических процессов,

т. е. сохраняются неизменными уравнение состояния, термодинамическое тождество

$$TdS = dE + pd\frac{1}{\rho}$$

а уравнение притока тепла (2.1) приобретает вид

$$\rho \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \mu e_{ij}e_{ij} - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \mathbf{V})^2 - p \operatorname{div} \mathbf{V} + \operatorname{div} (\kappa \operatorname{grad} T) \quad (2.4)$$

Опыт подтверждает применимость этих предположений<sup>1</sup>.

Наконец, вполне аналогичным путем можно построить полную модель линейного вязко-упругого тела, сохранив приведенные выше термодинамические соотношения и функции. При этом, очевидно, закон сохранения энергии опять сведется к уравнению притока тепла, служащему для определения поля температур.

В самом деле, соотношения, определяющие изотропное вязко-упругое тело, имеют вид [4]

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \eta (e_{ij} - \frac{1}{3} e_{ll} \delta_{ij}) + \frac{\zeta}{2} e_{ll} \delta_{ij} \quad (2.5)$$

где  $\sigma_{ij}^e$  — «упругие» напряжения, связанные с деформацией по-прежнему законом Гука (1.10), а  $\eta$  и  $\zeta$  — коэффициенты вязкости. Подставив эти соотношения в уравнение притока тепла (2.1) и учитывая (1.10) и (1.13), получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{\delta t} &= C(T) \frac{dT}{dt} - \frac{1}{2} \eta e_{ij}e_{ij} + \frac{2}{3} \eta (\operatorname{div} \mathbf{V})^2 - \zeta (\operatorname{div} \mathbf{V})^2 = \\ &= C(T) \frac{dT}{dt} - \frac{1}{2} \eta (e_{ij} - \frac{1}{3} e_{ll} \delta_{ij})^2 - \frac{\zeta}{4} (e_{ll})^2 \end{aligned}$$

или, принимая  $\delta Q / \delta t = \operatorname{div} (\kappa \operatorname{grad} T)$  (изотропная теплопроводность)

$$C(T) \frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \eta (e_{ij} - \frac{1}{3} e_{ll} \delta_{ij})^2 + \frac{\zeta}{4} (e_{ll})^2 + \operatorname{div} (\kappa \operatorname{grad} T) \quad (2.6)$$

Если предположить еще независимость коэффициентов вязкости от температуры, то, как и выше, система динамических уравнений будет замкнута без использования уравнения притока тепла.

Существенное принципиальное значение имеет приложение вышеприведенных соображений к теории пластичности. Существующие теории пластичности разработаны без использования закона сохранения энергии и без термодинамических рассмотрений вообще. Поэтому по отношению к ним также возникает вопрос о термодинамической корректности. В связи с этим вопросом следует отметить, что, с одной стороны, высказывается мнение, что термодинамическое рассмотрение должно коренным образом усовершенствовать построения в теории пластичности, с другой стороны, можно наблюдать полное игнорирование термодинамики в большинстве работ и книг по пластичности. Оба эти взгляда являются, как мы увидим, крайними.

Существующие схемы, предназначенные для описания пластического поведения металлов, можно дополнить до полных термодинамических моделей вполне аналогично тому, как это сделано в рассмотренных выше примерах.

<sup>1</sup> Подробное, весьма хорошее обсуждение этих вопросов имеется в книге [5] (гл. II).

3. Рассмотрим, например, модель идеального жестко-пластического материала Сен-Венана — Леви — Мизеса [6,7]. Основными соотношениями этой модели являются:

связь между девиатором тензора напряжений  $\sigma_{ij}'$  и тензором скоростей деформаций  $e_{ij}$

$$e_{ij} = \mu \sigma_{ij}' \quad (3.1)$$

условие пластичности, имеющее обычно вид

$$\sigma_{ij}' \sigma_{ij}' \equiv 2J_2' = 2k^2 \quad (3.2)$$

(условие Мизеса), при помощи которого можно получить выражение для  $\mu$

$$\mu = \frac{\sqrt{I}}{k} \quad (2I \equiv e_{ij} e_{ij}) \quad (3.3)$$

условие несжимаемости материала

$$e_{ii} = 0 \quad (3.4)$$

Подставляя эти зависимости в уравнение притока тепла (2.1) и производя элементарные преобразования, получим (здесь и ниже опять  $E$  и  $S$  отнесены к единице объема)

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{dE}{dt} - k \sqrt{I} \quad (3.5)$$

Последний член в этом уравнении выражает диссипацию механической энергии при пластическом течении материала. Вполне аналогично случаю вязкой несжимаемой жидкости можно принять, что единственным параметром состояния в данном случае также является температура  $T$  и, следовательно

$$E = E(T) = \int C(T) dT \quad (3.6)$$

где  $C(T)$  — удельная теплоемкость материала,

$$S = \int \frac{C(T)}{T} dT \quad \text{и т. д.} \quad (3.7)$$

Уравнение (3.5) приводится к виду

$$C(T) \frac{dT}{dt} = k \sqrt{I} + \text{div}(\kappa \text{grad } T) \quad (3.8)$$

и служит для вычисления поля температур в текущей пластической среде. Если при этом пластическая постоянная материала  $k$  от температуры не зависит, то система механических уравнений оказывается замкнутой независимо от (3.8) и может интегрироваться отдельно.

Рассмотрим далее модель идеального упруго-пластического материала Прандтля — Рейсса [6,7]. Основные соотношения этой модели следующие:

связь между девиатором тензора напряжений  $\sigma_{ij}'$  и девиатором тензора скоростей деформаций  $e_{ij}'$

$$e_{ij}' = \frac{1}{G} \dot{\sigma}_{ij}' + e(\dot{W}) e(J_2' - k^2) \frac{\dot{W}}{k^2} \sigma_{ij}' \quad (3.9)$$

где

$$\dot{W} \equiv \frac{1}{2} \sigma_{ij}' e_{ij}', \quad e(u) = \begin{cases} 1 & (u \geq 0) \\ 0 & (u < 0) \end{cases} \quad \left( \begin{array}{l} \text{единичная} \\ \text{функция} \end{array} \right) \quad (3.10)$$

а точка над  $\sigma_{ij}'$  означает производную по времени, причем при условии,

что смещения, скорости и деформации малы, это будет просто частное по времени дифференцирование<sup>1</sup>;

условие пластичности Мизеса

$$\sigma_{ij}'\sigma_{ij}' \equiv 2J_2' \leq 2k^2$$

или, что то же

$$(J_2' - k^2) e (J_2' - k^2) = 0 \quad (3.11)$$

условие упругости объемной деформации

$$\sigma_{ll} = 3K\varepsilon_{ll} \quad (3.12)$$

Используя все эти соотношения, преобразуем сумму  $\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}$  в уравнении притока тепла (2.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij} &= \frac{1}{2}(\sigma_{ij}' + \frac{1}{3}\sigma_{ll}\delta_{ij})(e_{ij}' + \frac{1}{3}e_{ll}\delta_{ij}) = \\ &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}'e_{ij}' + \frac{1}{6}\sigma_{ll}e_{ll} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}' \left[ \frac{1}{G}\dot{\sigma}_{ij}' + e(\dot{W})e(J_2' - k^2)\frac{\dot{W}}{k^2}\sigma_{ij}' \right] + \frac{K}{2}\varepsilon_{ll}e_{ll} = \\ &= \frac{K}{2}\frac{d(\varepsilon_{ll})^2}{dt} + G\frac{d}{dt}(\varepsilon_{ij}^{e'}\varepsilon_{ij}^{e'}) + e(\dot{W})e(J_2' - k^2)\frac{J_2'}{k^2}\dot{W} = \\ &= \frac{1}{2K}\frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma_{ll}}{3}\right)^2 + \frac{1}{2G}\frac{dJ_2'}{dt} + e(\dot{W})e(J_2' - k^2)\frac{J_2'}{k^2}\dot{W} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь введены компоненты девиатора тензора упругой деформации  $\varepsilon_{ij}^{e'}$ , определяемые по компонентам девиатора тензора напряжений законом Гука

$$\sigma_{ij}' = 2G\varepsilon_{ij}^{e'} \quad (3.14)$$

и учтено соотношение  $e_{ll} = 2d\varepsilon_{ll}/dt$ .

Подставив выражения (3.13) в уравнение (2.1), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{\delta t} &= \rho \frac{dE}{dt} - \frac{K}{2}\frac{d(\varepsilon_{ll})^2}{dt} - G\frac{d}{dt}(\varepsilon_{ij}^{e'}\varepsilon_{ij}^{e'}) + e(\dot{W})e(J_2' - k^2)\frac{J_2'}{k^2}\dot{W} = \\ &= \rho \frac{dE}{dt} - \frac{1}{2K}\frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma_{ll}}{3}\right)^2 - \frac{1}{2G}\frac{dJ_2'}{dt} + e(\dot{W})e(J_2' - k^2)\frac{J_2'}{k^2}\dot{W}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Если теперь положим, что внутренняя энергия  $E$  зависит только от  $\varepsilon_{ll}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{e'}$ ,  $T$  (как и в случае обычного упругого тела) и упругие постоянные  $K$ ,  $G$  и плотность  $\rho$  не зависят от температуры, то получим для  $\rho E$  (внутренней энергии единицы объема), пренебрегая величиной  $\varepsilon_{ll}$  по сравнению с единицей, следующие выражения:

$$\begin{aligned} E_0 \equiv \rho E &= \frac{K}{2}(\varepsilon_{ll})^2 + G\varepsilon_{ij}^{e'}\varepsilon_{ij}^{e'} + \int C_1(T) dT = \\ &= \frac{1}{2K}\left(\frac{\sigma_{ll}}{3}\right)^2 + \frac{J_2'}{2G} + \int C(T) dT = \frac{1}{2}\frac{\sigma_{ll}}{3}\varepsilon_{ll} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}'\varepsilon_{ij}^{e'} + \int C(T) dT \end{aligned} \quad (3.16)$$

совпадающие с (1.13).

Для энтропии и свободной энергии вновь получим выражения (1.14), (1.15) и т. д. Итак, мы здесь опять получаем среду с разделяющейся энер-

<sup>1</sup> В случаях, когда это условие не имеет места, определение производной тензора напряжений, фигурирующей в соотношениях (3.9) Прандтля — Рейсса, не элементарно и требует особых рассмотрений, на что было указано Прагером [8]. См. по этому поводу также недавнюю работу Л. И. Седова [9].

гией и с термодинамическими функциями состояния, аргументы которых те же, что и в обычном упругом теле, т. е. учет пластической деформации в идеальном упруго-пластическом материале Прандтля — Рейсса не добавляет новых параметров, от которых зависели бы термодинамические функции. В этом смысле идеально-пластическое тело является «идеальным» и в термодинамическом отношении, — пластическая деформация никак не влияет на термодинамику среды. Она лишь порождает диссипацию механической энергии, которая в виде тепла участвует в уравнении притока тепла, имеющем окончательно вид

$$C(T) \frac{dT}{dt} = \operatorname{div} (\kappa \operatorname{grad} T) + e(\dot{W}) e(J_2' - k^2) \frac{J_2'}{k^2} \dot{W} \quad (3.17)$$

Очевидно, что этот приток тепла (второе слагаемое в правой части (3.17)) всегда положителен и существует лишь тогда, когда происходит пластическая деформация. Здесь опять система механических уравнений замкнута без (3.17) и интегрируется отдельно, а (3.17) служит для определения поля температур. Заметим еще, что при  $K \rightarrow \infty$  и  $G \rightarrow \infty$  все соотношения рассматриваемого случая переходят в соотношения предыдущего примера (соотношения жестко-пластической идеальной среды).

Рассмотрим, наконец, более сложную модель пластического материала — модель с упрочнением.

В процессе пластического деформирования, вообще говоря, происходит изменение пределов упругости, а также изменение самих упругих постоянных, причем последнее сопровождается возникновением анизотропии в упругих свойствах материала. Поэтому под упрочнением в более широком смысле можно понимать все изменения упругих свойств среды, вызванные пластической деформацией.

Рассмотренный выше пример идеально-пластической среды показывает, что термодинамические функции для этой среды зависят, кроме температуры, от инвариантов тензора упругой деформации и постоянных параметров, характеризующих упругие свойства среды и предел упругости. Поэтому из-за того, что эти постоянные параметры не зависят от характеристик пластической деформации, от них не зависит и вся термодинамика среды. Если эти параметры будут в процессе пластической деформации меняться, то вместе с ними будет меняться и вид термодинамических функций, т. е. эти функции в случае упрочняющегося материала будут зависеть, как от параметров, от характеристик пластической деформации. На примере простейшей модели пластического упрочняющегося материала выясним, к каким термодинамическим следствиям приводит учет этой зависимости.

Рассмотрим модель изотропно упрочняющегося материала Прандтля — Рейсса с критерием текучести Мизеса [7]. Основные соотношения этой модели можно представить в следующем виде:

$$e_{ij}' = \frac{\dot{\sigma}_{ij}'}{G} + \frac{3\dot{\xi}}{\sigma^\circ} \sigma_{ij}', \quad \sigma^\circ \equiv \sqrt{3J_2'}, \quad \sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii} \quad (3.18)$$

$$\dot{\xi} \equiv \frac{d\xi}{dt} = \frac{\dot{\sigma}^\circ}{H'(\xi)} e[\sigma^\circ - H(\xi)] e(\dot{\sigma}^\circ), \quad [\sigma^\circ - H(\xi)] e[\sigma^\circ - H(\xi)] = 0$$

где  $e$  — введенная выше единичная функция,  $H(\xi)$  — функция упрочнения,  $\xi$  — параметр упрочнения, мера пластической деформации, введенная Одквистом. Здесь следует отметить, что хотя для определения

величины  $\xi$ , которая в силу (3.18) может быть выражена через тензор приращения пластической деформации, необходимо интегрировать бесконечно малые положительные ее приращения в процессе активного пластического деформирования, введение  $\xi$  в качестве нового независимого параметра и дифференциального уравнения для  $\xi$  (см. (3.18)) делает все соотношения модели полностью дифференциальными, исключая тем самым зависимость каких-либо элементов модели от «истории деформации». Идея о возможности и необходимости введения при построении любой модели пластического поведения материала дополнительных параметров и соответствующих им дифференциальных уравнений для полного исключения из модели так называемой «истории деформирования», была высказана Л. И. Седовым. В данном случае таким (единственным) параметром<sup>1</sup> является  $\xi$ .

Подставляя теперь соотношения (3.18) в уравнение притока тепла (2.1), мы должны учесть, что, кроме температуры и инвариантов тензора упругой деформации, внутренняя энергия может зависеть еще от параметра  $\xi$ . Следует, однако, иметь в виду, что, так как параметр  $\xi$  может меняться только при условии, что происходит пластическая деформация, т. е. только при необратимых процессах, при написании термодинамических тождеств, которые относятся только к обратимым процессам, мы должны полагать  $d\xi = 0$ . Именно для обратимых процессов в данном случае будем иметь термодинамическое тождество в виде (1.9), в котором дифференциалы  $S$  и  $E$  вычисляются при  $\xi = \text{const}$ . Это с учетом закона Гука в предположении, что упругие постоянные не зависят от температуры, дает выражения для внутренней энергии

$$E = \frac{1}{2K} \left( \frac{\sigma_{11}}{3} \right)^2 + \frac{J_2'}{2G} + \int C(T, \xi) dT + E_0(\xi) \quad (3.19)$$

и для энтропии

$$S = \int \frac{C(T, \xi)}{T} dT + S_0(\xi) \quad (3.20)$$

(где  $E_0$  и  $S_0$  — произвольные функции  $\xi$ ), которые отличаются от (1.13) (или (3.16)) и (1.14) только возможной зависимостью от  $\xi$ . Энтропия оказывается, таким образом, так же, как и теплоемкость, функцией только  $T$  и  $\xi$ . Внутренняя же энергия может зависеть от  $\xi$  не только через  $E_0(\xi)$  и  $C(T, \xi)$ , но также за счет зависимости от  $\xi$  упругих постоянных  $K(\xi)$  и  $G(\xi)$ , которая, таким образом, допускается моделью.

Считая опять, что соотношения (3.19) и (3.20) сохраняются при протекании пластической деформации и при наличии теплопроводности, т. е. при наличии необратимых процессов, подставим соотношения (3.18) и (3.19) в (2.1) и получим после некоторых преобразований

$$C(T, \xi) \frac{dT}{dt} = \text{div} (\kappa \text{grad } T) + \left( \sigma^\circ - \frac{\partial E}{\partial \xi} \right) \frac{d\xi}{dt} \quad (3.21)$$

<sup>1</sup> Для более сложной модели упрочняющейся пластической среды, когда в соответствии со сказанным выше в процессе пластического деформирования материала возникает анизотропия в его упругих свойствах, а также происходит изменение (тоже, вообще говоря, анизотропное) пределов упругости, таких параметров может быть, вообще говоря, несколько. Построение термодинамики для этого случая производится в точности таким же способом, как и в рассматриваемом простейшем случае.

В уравнении (3.21) первое слагаемое определяет приток тепла, связанный с теплопроводностью, а второе — приток тепла, связанный с диссипацией механической энергии.

Интересно отметить, что не вся работа  $\sigma^\circ d\xi / dt$ , затраченная на пластическую деформацию, превращается в тепло, а лишь часть ее

$$\sigma^\circ \frac{d\xi}{dt} - \frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt}$$

т. е. избыток над той работой, которая тратится на увеличение внутренней энергии  $E$  в связи с изменением  $\xi$ .

На это увеличение внутренней энергии можно смотреть как на поглощение материалом энергии необратимого превращения, необратимого изменения структуры, происходящего при пластической деформации. Ввиду положительности  $d\xi / dt$  (см. (3.18)) работа пластической деформации  $\sigma^\circ d\xi / dt$  положительна.

Можно установить, что, кроме того, должен быть положительным и избыток этой работы над энергией превращения.

Проинтегрируем выражение для  $dS / dt$  по некоторому материальному объему  $\Omega$ , пользуясь (3.20) и (3.21), и получим

$$\frac{dS_\Omega}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_\Omega S d\tau = \int_\Sigma \frac{q_n}{T} d\Sigma + \int_\Omega \frac{\kappa}{T^2} (\text{grad } T)^2 d\tau + \int_\Omega \frac{1}{T} \left( \sigma^\circ - \frac{\partial E}{\partial \xi} \right) \frac{d\xi}{dt} d\tau + \int_\Omega \frac{\partial S}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} d\tau \quad (3.22)$$

где  $q_n$  — нормальная составляющая вектора потока тепла. Считая, что поверхность  $\Sigma$ , ограничивающая объем  $\Omega$ , теплонепроницаема (что всегда можно в принципе осуществить, включив в среду тонкий слой идеального теплоизолирующего материала по поверхности  $\Sigma$ ), получим в силу второго закона термодинамики

$$\frac{dS_\Omega}{dt} = \int_\Omega \frac{\kappa}{T^2} (\text{grad } T)^2 d\tau + \int_\Omega \frac{1}{T} \left( \sigma^\circ - \frac{\partial E}{\partial \xi} \right) \frac{d\xi}{dt} d\tau + \int_\Omega \frac{\partial S}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} d\tau > 0 \quad (3.23)$$

Каждый из написанных интегралов должен быть положительным в отдельности, ибо они определяют вклады в общее возрастание энтропии конечного объема от трех разных и независимых необратимых факторов — теплопроводности, тепловыделения за счет диссипации] пластической работы (второй интеграл) и собственно возрастания удельной энтропии при необратимом возрастании параметра  $\xi$  (третий интеграл). Величина  $(\partial S / \partial \xi) (d\xi / dt)$  определяет приращение удельной энтропии за счет необратимых превращений в материале, которые и вызывают изменение  $\xi$ . Это приращение должно быть в силу необратимости указанных превращений положительным; а так как  $d\xi / dt > 0$ , то и  $\partial S / \partial \xi > 0$ . Поэтому третий интеграл и будет положительным независимо от остальных (независимость эта от второго, например, может быть формально усмотрена в независимости и функций  $E_0(\xi)$  и  $S_0(\xi)$ ). Отдельно должен быть положительным и второй интеграл: он определяет возрастание энтропии за счет внутреннего выделения тепла при необратимой пластической деформации.

Ввиду произвольности объема  $\Omega$  всюду в области течения должно поэтому выполняться неравенство

$$\sigma^\circ - \frac{\partial E}{\partial \xi} = H - \frac{\partial E}{\partial \xi} \geq 0 \quad (3.24)$$

которое и означает положительность избытка пластической работы над энергией превращения.

Функции  $E_0(\xi)$  и  $S_0(\xi)$  могут быть найдены путем установления связи между изменением  $\xi$  и теми микроскопическими необратимыми изменениями структуры, на которые тратится дополнительная энергия превращения  $E_0(\xi)$  и которые сопровождаются возникновением энтропии  $S_0(\xi)$ .

Рассмотренный последний пример показывает, что учет зависимости термодинамических функций от параметров, характеризующих упрочнение, т. е. влияние пластической деформации на упругие свойства материала, вносит в термодинамику среды определенные осложнения, однако никаких принципиальных затруднений не вызывает.

Вышеизложенное имело целью показать, что привлечение термодинамики при построении различных моделей для описания движений жидких и особенно твердых пластически деформируемых тел доставляет определенные соотношения и сведения, дополняющие модель в термодинамическом отношении. К сожалению, эти сведения оказывают ограниченную помощь при конструировании механической части модели и существенно не облегчают эту главную задачу. Вместе с тем, при решении этой задачи совершенно необходимо всегда иметь ясное представление о термодинамическом смысле конструируемой модели и обязательно уметь дополнить модель термодинамически.

В заключение мне приятно выразить признательность Л. И. Седову за предложение заняться вопросами термодинамики в теории пластичности и обсуждения, а также Г. И. Баренблатту за интерес к этой работе.

Поступила 7 V 1960

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л е о н т о в и ч М. А. Введение в термодинамику. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1952.
2. К у р а н т Р. и Ф р и д р и х с К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. Изд-во иностр. лит., М., 1950.
3. К о у л Р. Подводные взрывы. Изд-во иностр. лит., М., 1950.
4. Л а н д а у Л. Д. и Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехтеоретиздат, М., 1953.
5. Современное состояние аэродинамики больших скоростей. Ч. I. Под ред. Л. Хоруарта, Изд-во иностр. лит., М., 1955.
6. П р а г е р В. и Х о д ж Ф. Теория идеально пластических тел. Изд-во иностр. лит., М., 1956.
7. Х и л л Р. Математическая теория пластичности. (Перевод с английского). Гостехтеоретиздат, М., 1956.
8. П р а г е р В. Элементарное обсуждение определения скорости изменения напряжений. Доклад на Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. М., 1960.
9. С е д о в Л. И. Понятия разных скоростей изменения тензоров. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 3.